

半无限长圆管内Stokes流的入口流

王鲁男 王敏中

(北京大学力学系, 1989年7月19日收到)

摘 要

本文研究了半无限长圆管内Stokes流的入口流问题。我们导出了一种新的级数解, 它与文献[1, 2]的解有一个明显的区别就是该解中不包含无穷积分, 因此有利于计算。本文利用配点法进行了计算, 得到了满意的结果。

一、引 言

Stokes流的研究近来受到了人们的注意, 这是因为在石油、化工以及生物力学中都遇到了许多低雷诺数的流动^[3]。本文研究的是Stokes流的初始效应, 即所谓入口流问题。

1969年Lew及Fung^[1]首次研究了半无限长圆管内的Stokes入口流问题, 并得到了形式较复杂的级数解。为了避免直接计算级数解中出现的富氏积分的困难, 文[1]用富氏级数近似地代替富氏积分, 这在理论上等价于用有限长圆管来逼近无限长圆管。类似于圣维南原理, Stokes流动中, 某一点给定的流动只对这一点的邻域内的流动产生影响, 而对较远处则影响不大, 因此他们认为有限长圆管的入口流可以是半无限长圆管入口流的很好的近似。Dagan^[4]等人的工作支持了这种观点。但Gluckman^[5]等人又举出以下实例: 两同样大小的圆球, 间隔为20倍圆球直径, 在平行于圆球中心联线的方向上有Stokes流流来, 可得出双球问题中每一个圆球的阻力和单球问题中的阻力相差5%。这样的偏差显然是很大的。因此需要进一步研究。

1983年吴望一和斯加拉克^[2]再次研究了同样的问题, 得到了与文[1]形式不同的级数解。在处理级数解中出现的富氏积分时, 文[2]没有用富氏级数来代替富氏积分, 而是直接进行数值计算, 因此得到的结果也较可靠。

由于计算富氏积分比较麻烦, 所以, 如能得到一种不含无穷积分的解, 将会有利于计算。

在研究不可压弹性体与Stokes流的关系时, 我们导出了一种不含无穷积分的Stokes入口流的级数解, 并且利用配点法进行了计算, 得到了与文[2]相同的结果。

• 吴望一推荐。

二、解的理论推导

考虑半无限长圆管内的Stokes流动。我们取柱坐标系如图所示，原点放在入口截面的重心上。设圆管半径为 a ，则圆管内的区域为 $\{0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq +\infty\}$ 。我们假定来流是轴对称的，于是我们的问题为轴对称问题。

取 a ， U ， $\mu U/a$ 为长度，速度，压力的特征值。其中 $U = Q/\pi a^2$ 是平均流速， Q 是体积流量， μ 是流体的动粘性系数。以它们为参考值，可得到无量纲形式的Stokes流动方程如下

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} &= \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中

$$\mathbf{v} = r^0 v_r + k v_z \quad (2.2)$$

$$\nabla = r^0 \frac{\partial}{\partial r} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

为柱坐标系下的轴对称梯度算子。 \mathbf{v} ， p 为无量纲的速度矢量及压力函数。

引进旋度 Ω

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.4)$$

并将(2.2)，(2.3)的表达式代入上式，可推出

$$\Omega = \theta^0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \theta^0 (v_{r,z} - v_{z,r})$$

即

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_\theta = \Omega = v_{r,z} - v_{z,r}, \quad \Omega_z = 0$$

对 Ω 再取旋度

$$\begin{aligned} \nabla \times \Omega &= \left(r^0 \frac{\partial}{\partial r} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \Omega \theta^0 \\ &= k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\Omega}{r} \right) + r^0 \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据方程(2.1)，(2.4)及公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \nabla - \nabla^2 \mathbf{v}$$

可推出

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times \Omega \quad (2.6)$$

于是利用(2.4)，(2.6)，可将方程(2.1)化成如下等价形式

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \Omega - \nabla \times \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla p + \nabla \times \Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

方程(2.7)的分量形式为

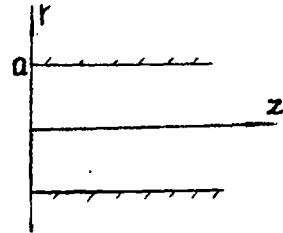


图 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \Omega - \frac{\partial v_r}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\Omega}{r} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这样,我们就将二阶方程(2.1)化成了一阶线性方程组,这种形式是利于研究的.

如果令

$$f = \begin{pmatrix} v_r \\ v_z \\ \Omega \\ p \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

则方程组(2.8)可化成如下向量方程

$$\frac{\partial}{\partial r} f + \frac{1}{r} P f + Q f + S \frac{\partial}{\partial z} f = 0 \quad (2.9)$$

为保证解在无穷远处收敛于稳定的Poiseuille流动,设(2.9)的解为如下形式

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} K_n f^{(n)}(r) \exp[\alpha_n z] + f^{(0)} \quad (2.10)$$

其中

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1-r^2) \\ 4r \\ p_0 - 8z \end{pmatrix}$$

为无穷远处的Poiseuille流动, p_0 为临界压力. $f^{(0)}$ 本身满足方程(2.9),而 $f^{(n)}(r)$ 为待定函数, K_n 为待定系数, α_n 为待定指数.

将(2.10)代入到(2.9)中,我们得到一个向量方程

$$\frac{d}{dr} f^{(n)} + \frac{1}{r} P f^{(n)} + Q f^{(n)} + \alpha_n S f^{(n)} = 0 \quad (2.11)$$

将方程(2.11)再写成分量形式

$$\begin{cases} \frac{df_1^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_1^{(n)} + \alpha_n f_2^{(n)} = 0 & (2.12a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{df_2^{(n)}}{dr} + f_2^{(n)} - \alpha_n f_1^{(n)} = 0 & (2.12b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{df_3^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_3^{(n)} + \alpha_n f_4^{(n)} = 0 & (2.12c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{df_4^{(n)}}{dr} - \alpha_n f_3^{(n)} = 0 & (2.12d) \end{cases}$$

将 (2.12d) 代入到 (2.12c) 中, 可推出

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{df_3^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_3^{(n)} \right) + \alpha_n^2 f_3^{(n)} = 0$$

即

$$\frac{d^2 f_3^{(n)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_3^{(n)}}{dr} + \left(\alpha_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) f_3^{(n)} = 0 \quad (2.13)$$

方程 (2.13) 是一阶 Bessel 方程, 由于是内问题, 不考虑 Neumann 函数, 故其通解为⁽⁶⁾

$$f_3^{(n)} = C_1 J_1(\alpha_n r) \quad (2.14)$$

其中 C_1 为任意常数.

将 (2.14) 代入 (2.12c) 中, 并利用公式⁽⁷⁾

$$\frac{d}{dx} (xJ_1) = xJ_0$$

可得到 $f_4^{(n)}$ 的解

$$f_4^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{df_3^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_3^{(n)} \right) = -C_1 J_0(\alpha_n r) \quad (2.15)$$

再由 (2.12a) 与 (2.12b), 得到

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{df_1^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_1^{(n)} \right) + \alpha_n (\alpha_n f_1^{(n)} - f_3^{(n)}) = 0$$

将 (2.14) 代入上式, 得到

$$\frac{d^2 f_1^{(n)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1^{(n)}}{dr} + \left(\alpha_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) f_1^{(n)} = C_1 \alpha_n J_1(\alpha_n r) \quad (2.16)$$

方程 (2.16) 的齐次方程与 (2.13) 相同, 故其通解已经求出, 只需找一个特解. 设特解为

$$-\frac{1}{2\alpha_n} C_1 \alpha_n r J_0(\alpha_n r)$$

验证:

$$\text{左端} = -\frac{G}{2\alpha_n} \left[\frac{d^2}{dr^2} (\alpha_n r J_0(\alpha_n r)) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\alpha_n r J_0(\alpha_n r)) \right.$$

$$\left. + \left(\alpha_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) \alpha_n r J_0(\alpha_n r) \right]$$

由公式⁽⁷⁾

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \quad (2.17)$$

$$xJ_0(x) = J_1(x) + x \frac{d}{dx} J_1(x) \quad (2.18)$$

得到

$$\text{左端} = C_1 \alpha_n J_1(\alpha_n r) = \text{右端}$$

于是

$$f_1^{(n)} = C_2 J_1(\alpha_n r) - \frac{C_1}{2} r J_0(\alpha_n r) \quad (2.19)$$

其中 C_2 为任意常数.

再由 (2.12a) 得到

$$f_2^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{df_1^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} f_1^{(n)} \right]$$

$$= -C_2 J_0(\alpha_n r) + \frac{C_1}{\alpha_n} J_0(\alpha_n r) - \frac{C_1}{2} r J_1(\alpha_n r) \quad (2.20)$$

到此 $f^{(n)}$ 的解已经求出, 只剩其中的常数 α_n , C_1 , C_2 没有定出。

下面, 我们将利用管壁的边界条件定出上述常数。

为使在管壁处速度满足无滑移条件:

$$v_r = 0, \quad v_z = 0$$

则应有

$$f_1^{(n)}(1) = 0, \quad f_2^{(n)}(1) = 0$$

此即

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left(-\frac{1}{2} J_0(\alpha_n) \right) + C_2 J_1(\alpha_n) &= 0 \\ C_1 \left(-\frac{1}{\alpha_n} J_0(\alpha_n) - \frac{1}{2} J_1(\alpha_n) \right) - C_2 J_0(\alpha_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

为了使方程组 (2.21) 关于 C_1 , C_2 有非零解, 则其系数行列式的值必须为零, 即

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} J_0(\alpha_n) & J_1(\alpha_n) \\ \frac{1}{\alpha_n} J_0(\alpha_n) - \frac{1}{2} J_1(\alpha_n) & -J_0(\alpha_n) \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$\frac{1}{2} J_0^2(\alpha_n) - \frac{1}{\alpha_n} J_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n) + \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_n) = 0 \quad (2.22)$$

由公式^[7]

$$2J_1(x) = x(J_0(x) + J_2(x)) \quad (2.23)$$

并代入 (2.22) 中, 可得出关于 α_n 的本征方程

$$J_0(\alpha_n) \cdot J_2(\alpha_n) = J_1^2(\alpha_n) \quad (2.24)$$

由此本征方程可确定本征值 α_n 。

方程 (2.24) 已经被 Friedmann^[8] 研究过, 它有无穷个根, 全部为复数, 很显然是成对共轭的复根。为了保证 $z \rightarrow \infty$ 其解收敛到 Poiseuille 流, 我们取 α_n 具有负实部, 其前 15 个 α_n 如表 1 所示。

表 1

$\pm \text{Re} \alpha_n$	$\pm \text{Im} \alpha_n$	$\pm \text{Re} \alpha_n$	$\pm \text{Im} \alpha_n$
4.466299	1.467470	29.792475	2.392226
7.694104	1.726972	32.938331	2.442135
10.874574	1.894943	36.083507	2.487512
14.036891	2.020063	39.228158	2.529113
17.195565	2.119946	42.372390	2.587518
20.347988	2.203124	45.516290	2.603184
23.497724	2.274406	48.659915	2.636475
26.645717	2.336779		

当 α_n 满足本征方程 (2.24) 时, 方程 (2.21) 的解可选定为

$$C_1 = 2J_1(\alpha_n), \quad C_2 = J_0(\alpha_n) \quad (2.25)$$

将 (2.25) 分别代入到 (2.14), (2.15), (2.19), (2.20) 中, 可得到解如下

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(n)}(r) &= J_0(\alpha_n)J_1(\alpha_n r) - rJ_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r) \\ f_2^{(n)}(r) &= -rJ_1(\alpha_n)J_1(\alpha_n r) + \left[\frac{2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n) - J_0(\alpha_n) \right] J_0(\alpha_n r) \\ f_3^{(n)}(r) &= 2J_1(\alpha_n)J_1(\alpha_n r) \\ f_4^{(n)}(r) &= -2J_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r) \end{aligned} \right\} (2.26)$$

到此为止, 通解 (2.10) 中的向量 $f^{(n)}$ 及指数 α_n 都已求出, 只差系数 K_n 未定. K_n 应由入口处的边条件来决定. 由于 α_n 是复数, 相应的 $f^{(n)}(r)$ 、 K_n 也都是复数, 而 f 要求是实数, 所以我们在 (2.10) 中取级数项如下

$$n=1 \text{ 时对应 } \alpha_1, \quad n=2 \text{ 时对应 } \bar{\alpha}_1, \dots$$

如此下去, 并在以后的实际计算中将 $\bar{\alpha}_n$ 的项去掉, 而只保留 α_n 的项, 于是, 解 (2.10) 应变为如下形式

$$f = 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} K_n f^{(n)}(r) \exp[\alpha_n z] + f^{(0)} \quad (2.27)$$

这里的 n 是与 α_n 对应的.

三、配点法计算

我们计算进口处具有均匀轴向速度和零径向速度的入口流. 将通解 (2.27) 中的级数在 n 项上截断, 这样, 在边界上均匀地取 n 个点, 根据给定的边界条件列出 $2n$ 个方程, 这 $2n$ 个方程确定 n 个复系数 K_n . 我们计算了 $n=10$ 与 $n=15$ 两种情形.

我们只计算了具有代表性的速度值. 计算结果列于表 2 和表 3 中. 从表中可以看出, 10 项与 15 项的结果相差不到 1%, 可见配点法的收敛性是很好的. 而且这一结果与文 [2] 的结果接近. 定义速度剖面和 Poiseuille 剖面相差为平均速度的 1% 的地方到入口处的距离 L 为入口段长度, 则根据表中结果, $L=1.2a$. 仍与文 [2] 相同. 这些结论说明了本文的解是正确的, 同时也证实了文 [2] 的结论.

表 2a
径向速度分量 $v_R (n=10)$

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0000	-0.0434	-0.0677	-0.0762	-0.0729	-0.0628	-0.0602	-0.0378	-0.0272	-0.0188	-0.0126	-0.0082	-0.0052
0.20	0.0000	-0.0858	-0.1347	-0.1504	-0.1423	-0.1212	-0.0958	-0.0715	-0.0511	-0.0351	-0.0234	-0.0151	-0.0095
0.30	0.0000	-0.1306	-0.2020	-0.2203	-0.2039	-0.1701	-0.1320	-0.0970	-0.0683	-0.0465	-0.0307	-0.0197	-0.0123
0.40	0.0000	-0.1815	-0.2665	-0.2816	-0.2522	-0.2040	-0.1541	-0.1107	-0.0765	-0.0513	-0.0334	-0.0212	-0.0132
0.50	0.0000	-0.2208	-0.3261	-0.3282	-0.2797	-0.2167	-0.1578	-0.1101	-0.0744	-0.0489	-0.0314	-0.0197	-0.0120
0.60	0.0000	-0.2980	-0.3781	-0.3490	-0.2767	-0.2022	-0.1407	-0.0947	-0.0622	-0.0400	-0.0252	-0.0155	-0.0094
0.70	0.0000	-0.3287	-0.3957	-0.3251	-0.2333	-0.1582	-0.1043	-0.0676	-0.0431	-0.0270	-0.0167	-0.0101	-0.0060
0.80	0.0000	-0.4058	-0.3698	-0.2375	-0.1484	-0.0923	-0.0575	-0.0358	-0.0221	-0.0135	-0.0082	-0.0048	-0.0028
0.90	0.0000	-0.3775	-0.1846	-0.0907	-0.0488*	-0.0279	-0.0165	-0.0099	-0.0059	-0.0035	-0.0021	-0.0012	-0.0006

表 2b
轴向速度分量 $v_z (n=10)$

R	z=0.0	z=0.1	z=0.2	z=0.3	z=0.4	z=0.5	z=0.6	z=0.7	z=0.8	z=0.9	z=1.0	z=1.1	z=1.2
0.00	1.0000	1.0452	1.1594	1.3082	1.4578	1.5957	1.7105	1.7999	1.8659	1.9127	1.9447	1.9659	1.9795
0.10	1.0000	1.0461	1.1600	1.3059	1.4567	1.5909	1.7028	1.7891	1.8528	1.8973	1.9278	1.9479	1.9608
0.20	1.0000	1.0486	1.1612	1.3048	1.4488	1.5757	1.6781	1.7556	1.8116	1.8504	1.8764	1.8934	1.9042
0.30	1.0000	1.0444	1.1629	1.3024	1.4356	1.5474	1.6338	1.6986	1.7404	1.7699	1.7892	1.8016	1.8093
0.40	1.0000	1.0570	1.1678	1.2972	1.4121	1.5008	1.5641	1.6069	1.6349	1.6528	1.6639	1.6707	1.6748
0.50	1.0000	1.0505	1.1698	1.2847	1.3707	1.4297	1.4601	1.4791	1.4895	1.4950	1.4978	1.4992	1.4998
0.60	1.0000	1.0632	1.1747	1.2561	1.2970	1.3101	1.3095	1.3040	1.2977	1.2923	1.2882	1.2853	1.2833
0.70	1.0000	1.0896	1.1643	1.1856	1.1637	1.1291	1.0970	1.0719	1.0536	1.0415	1.0333	1.0280	1.0247
0.80	1.0000	1.0459	1.0955	1.0178	0.9277	0.8575	0.8084	0.7757	0.7545	0.7409	0.7324	0.7272	0.7240
0.90	1.0000	1.0991	0.8330	0.6490	0.5409	0.4771	0.4386	0.4152	0.4009	0.3922	0.3869	0.3838	0.3820

表 3a
徑向速度分量 $v_R(n=15)$

R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0000	-0.0431	-0.0671	-0.0758	-0.0727	-0.0628	-0.0502	-0.0379	-0.0273	-0.0189	-0.0127	-0.0082	-0.0052
0.20	-0.0000	-0.0858	-0.1341	-0.1498	-0.1420	-0.1212	-0.0959	-0.0717	-0.0512	-0.0353	-0.0235	-0.0152	-0.0086
0.30	-0.0000	-0.1305	-0.2008	-0.2196	-0.2037	-0.1703	-0.1324	-0.0974	-0.0686	-0.0467	-0.0308	-0.0198	-0.0124
0.40	0.0000	-0.1777	-0.2655	-0.2812	-0.2524	-0.2047	-0.1548	-0.1113	-0.0770	-0.0516	-0.0336	-0.0213	-0.0132
0.50	0.0000	-0.2282	-0.3252	-0.3284	-0.2808	-0.2179	-0.1589	-0.1109	-0.0748	-0.0492	-0.0315	-0.0198	-0.0121
0.60	-0.0000	-0.2786	-0.3749	-0.3508	-0.2792	-0.2042	-0.1420	-0.0956	-0.0627	-0.0403	-0.0254	-0.0156	-0.0094
0.70	-0.0000	-0.3326	-0.4031	-0.3312	-0.2373	-0.1806	-0.1057	-0.0683	-0.0435	-0.0272	-0.0168	-0.0102	-0.0060
0.80	0.0000	-0.4182	-0.3722	-0.2445	-0.1521	-0.0942	-0.0584	-0.0382	-0.0223	-0.0137	-0.0082	-0.0049	-0.0028
0.90	-0.0000	-0.3903	-0.1885	-0.0934	-0.0502	-0.0286	-0.0168	-0.0100	-0.0080	-0.0036	-0.0021	-0.0012	-0.0007

表 3b
軸向速度分量 $v_z(n=15)$

R	$z=0.0$	$z=0.1$	$z=0.2$	$z=0.3$	$z=0.4$	$z=0.5$	$z=0.6$	$z=0.7$	$z=0.8$	$z=0.9$	$z=1.0$	$z=1.1$	$z=1.2$
0.00	1.0000	1.0442	1.1604	1.3063	1.4573	1.5949	1.7097	1.7992	1.8655	1.9124	1.9445	1.9658	1.9785
0.10	1.0000	1.0482	1.1607	1.3057	1.4550	1.5900	1.7018	1.7884	1.8521	1.8970	1.9276	1.9478	1.9607
0.20	1.0000	1.0486	1.1607	1.3039	1.4477	1.5746	1.6772	1.7550	1.8111	1.8501	1.8762	1.8933	1.9042
0.30	1.0000	1.0470	1.1618	1.3006	1.4339	1.5460	1.6328	1.6959	1.7400	1.7697	1.7891	1.8015	1.8092
0.40	1.0000	1.0486	1.1643	1.2943	1.4097	1.4992	1.5630	1.6063	1.6346	1.6526	1.6638	1.6707	1.6748
0.50	1.0000	1.0533	1.1668	1.2809	1.3680	1.4251	1.4593	1.4787	1.4893	1.4949	1.4978	1.4992	1.4998
0.60	1.0000	1.0577	1.1657	1.2507	1.2945	1.3091	1.3092	1.3039	1.2977	1.2924	1.2883	1.2853	1.2833
0.70	1.0000	1.0534	1.1522	1.1823	1.1632	1.1293	1.0973	1.0722	1.0540	1.0416	1.0333	1.0280	1.0247
0.80	1.0000	1.0587	1.1015	1.0216	0.9301	0.8589	0.8093	0.7762	0.7547	0.7410	0.7325	0.7272	0.7240
0.90	1.0000	1.2356	0.8459	0.6552	0.5439	0.4785	0.4393	0.4156	0.4011	0.3923	0.3870	0.3838	0.3820

参 考 文 献

- [1] Lew, H. S. and Y. C. Fung, On the low-Reynolds-number entry flow into a circular cylindrical tube, *J. Biomechanics*, 2 (1969), 105—119.
- [2] 吴望一、R. 斯加拉克, 半无穷长圆管内的低雷诺数入口流, *应用数学和力学*, 4, 6 (1983), 743—756.
- [3] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff Publishers (1983).
- [4] Dagan, Z., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, 115 (1982), 502—523.
- [5] Gluckman, M.J., S. Weinbaum and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, 55 (1972), 677—709.
- [6] 丁同仁, 《常微分方程基础》, 上海科技出版社.
- [7] 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 科学出版社 (1965).
- [8] Friedmann, M., J. Gillis, and N. Liron, Laminar flow in a pipe at low and moderate Reynolds numbers, *Appl. Sci. Res.*, 19 (1968).

On the Stokes Entry Flow into a Semi-Infinite Circular Cylindrical Tube

Wang Lu-nan Wang Min-zhong

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

The problem of Stokes entry flow into a semi-infinite circular cylindrical tube was studied in this paper. A new kind of series solutions was derived. Their evident difference from the solutions in References [1,2] is that the present solutions don't involve infinite integral. So they are favourable for calculation. We calculated an example by allocated method and obtained satisfied results.