

曲线边界薄板弯曲问题的一种新单元 ——曲边四边形单元

钱伟长 王刚

(上海工业大学) (上海铁道学院, 上海市应用数学和力学研究所)
(1988年5月1日收到)

摘 要

本文提出了曲边四边形薄板弯曲单元解决曲线边界薄板的弯曲问题。文中给出了二维坐标的变换关系。由于引进了基于广义变分原理的附加刚度^[2], 使计算精度更高, 计算机时相对缩短。通过算例, 说明这种单元计算精度是相当高的。

一、前 言

矩形薄板单元用于计算正交边界薄板的弯曲问题, 能很好地吻合边界, 收敛情况较好, 但对于非正交边界或者曲线边界的薄板, 则不能吻合边界。它给边界条件的处理带来困难, 通常采用加密计算网格或者加用三角形单元来近似。也有人提出适应非正交边界的新单元^[4], 但都只能以直线代替曲线。为解决这个困难, 作者提出一种适应曲线边界的新单元——曲边四边形单元, 文中将其称为R-16单元。考虑到单元自由度较多, 在相邻单元边界上引进了基于广义变分原理的附加刚度。算例表明, 这种单元具有很好的收敛性和计算精度。

二、坐 标 变 换

把曲边四边形(图1)变换成 $O\xi\eta$ 坐标下的正方形(图2)可以采用如下变换公式

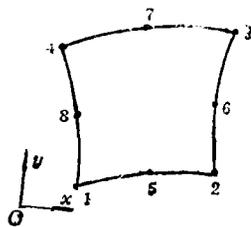


图 1

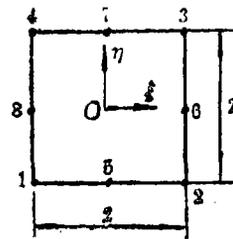


图 2

$$x=[L]\{x_i\}, y=[L]\{y_i\} \quad (2.1)$$

(2.1)式中

$$[L]=[L_1, L_2, \dots, L_8]$$

$$L_i=(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1)/4 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$L_i=(1-\xi^2)(1+\eta_0)/2 \quad (i=5, 7)$$

$$L_i=(1-\eta^2)(1+\xi_0)/2 \quad (i=6, 8)$$

$$\{x_i\}=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_8]^T, \{y_i\}=[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_8]^T$$

由(2.1)式可知, Oxy 和 $O\xi\eta$ 两套坐标之间存在下列关系

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix}=[J_1]\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

其中

$$[J_1]=\begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix}$$

称为一阶雅可比矩阵。同时有

$$\begin{Bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ \partial^2/\partial x\partial y \end{Bmatrix}=[J_2]^{-1}\begin{Bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 \\ \partial^2/\partial\eta^2 \\ \partial^2/\partial\xi\partial\eta \end{Bmatrix}-[A][J_1]^{-1}\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

其中

$$[J_2]^{-1}=\frac{1}{|J_1|^2}\begin{bmatrix} y_{,\eta}^2 & y_{,\xi}^2 & -2y_{,\xi}y_{,\eta} \\ x_{,\eta}^2 & x_{,\xi}^2 & -2x_{,\xi}x_{,\eta} \\ -x_{,\eta}y_{,\eta} & -x_{,\xi}y_{,\xi} & x_{,\xi}y_{,\eta}+x_{,\eta}y_{,\xi} \end{bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} x_{,\xi\xi} & y_{,\xi\xi} \\ x_{,\eta\eta} & y_{,\eta\eta} \\ x_{,\xi\eta} & y_{,\xi\eta} \end{bmatrix}, [J_1]^{-1}=\frac{1}{|J_1|}\begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}$$

$[J_2]$ 称为二阶雅可比矩阵。

三、曲边四边形单元的位移模式

单元节点的基本未知量见图3.可见曲边四边形单元有16个自由度。设位移函数为

$$w=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^3+a_8\xi^2\eta+a_9\xi\eta^2+a_{10}\eta^3$$

$$+a_{11}\xi^4+a_{12}\xi^3\eta+a_{13}\xi^2\eta^2+a_{14}\eta^4+a_{15}\xi^4\eta+a_{16}\xi\eta^4 \quad (3.1)$$

由上式,转角为

$$\theta_\xi=\partial w/\partial\eta=a_3+a_5\xi+2a_6\eta+a_8\xi^2+2a_9\xi\eta+3a_{10}\eta^2+a_{12}\xi^3$$

$$+3a_{13}\xi^2\eta+4a_{14}\eta^3+a_{15}\xi^4+4a_{16}\xi\eta^3 \quad (3.2)$$

$$\theta_\eta=-\partial w/\partial\xi=-(a_2+2a_4\xi+a_5\eta+3a_7\xi^2+2a_8\xi\eta+a_9\eta^2+4a_{11}\xi^3$$

$$+3a_{12}\xi^2\eta+a_{13}\eta^3+4a_{15}\xi^3\eta+a_{16}\eta^4) \quad (3.3)$$

将图3中各个节点坐标和节点广义位移分别代入(3.1)、(3.2)和(3.3)式,可以得到用16个参数 a_1, a_2, \dots, a_{16} 表示节点广义位移的联立方程。求解这组方程,得到以节点广义位移表示的16个参数,再代回(3.1),整理后可得,

$$w=\sum_{i=1}^8 [N_i]\{\delta_i\}=[N]\{\delta\} \quad (3.4)$$

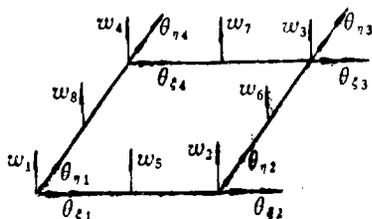


图 3

式中 $\{\delta_i\}^e = [w_i \ \theta_{\xi i} \ \theta_{\eta i}]^T \quad (i=1, 2, 3, 4)$
 $\{\delta_i\}^e = w_i \quad (i=5, 6, 7, 8)$ (3.5)

$[N_i] = [N_i \ N_{\xi i} \ N_{\eta i}] \quad (i=1, 2, 3, 4)$
 $[N_i] = N_i \quad (i=5, 6, 7, 8)$ (3.6)

而 $N_i = (\xi^2 + \xi_0 \eta_0 + \eta^2 + \xi^2 \eta_0 + \xi_0 \eta^2) / 2 - (1 + \xi^4 + \eta^4 + \eta_0 \xi^4 + \xi_0 \eta^4) / 4$
 $+ (\xi_0 + \eta_0 - \xi_0 \xi^2 - \eta_0 \eta^2 - \xi_0 \eta_0 \xi^2 - \xi_0 \eta_0 \eta^2) / 8 \quad (i=1, 2, 3, 4)$
 $N_{\xi i} = (1 + \xi_0)(\eta^3 - \eta - \eta_0 \eta + \eta_0 \eta^3) / 8 \quad (i=1, 2, 3, 4)$
 $N_{\eta i} = (1 + \eta_0)(\xi^3 - \xi - \xi_0 \xi + \xi_0 \xi^3) / 8 \quad (i=1, 2, 3, 4)$
 $N_i = (1 + \eta_0)(1 - \xi^2)^2 / 2 \quad (i=5, 7)$
 $N_i = (1 + \xi_0)(1 - \eta^2)^2 / 2 \quad (i=6, 8)$

其中, $\xi_0 = \xi_i \xi, \eta_0 = \eta_i \eta$
 把 $\theta_{\xi i}, \theta_{\eta i}$ 换成 Oxy 中的表示形式 $\theta_{x i}, \theta_{y i}$, 有

$w = [N] \{\delta\}^e$ (3.7)

其中

$[N_i] = \begin{cases} [N_i \ N_{x i} \ N_{y i}] & (i=1, 2, 3, 4) \\ N_i & (i=5, 6, 7, 8) \end{cases}$ (3.8)

$\{\delta\}^e = [w_1 \ \theta_{x 1} \ \theta_{y 1} \ \dots \ w_4 \ \theta_{x 4} \ \theta_{y 4} \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8]^T$ (3.9)

而 $N_{x i} = y_{, \eta i} N_{\xi i} + y_{, \xi i} N_{\eta i}, N_{y i} = -(x_{, \eta i} N_{\xi i} + x_{, \xi i} N_{\eta i})$ (3.10)

四、R-16单元的刚度矩阵

1. 单元刚度矩阵 $[K_1]^e$

单元 e 内的应变能为

$$U_1^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{;\alpha\beta} w_{;\gamma\delta} d\Omega = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{\delta\}^{eT} [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\delta\}^{eT} [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e |J_1| d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K_1]^e \{\delta\}^e \quad (4.1)$$

其中

$[K_1]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J_1| d\xi d\eta$ (4.2)

$$\begin{aligned}
 [B] &= - \left\{ \begin{array}{l} [N],_{xx} \\ [N],_{yy} \\ 2[N],_{xy} \end{array} \right\} \\
 &= - [T][J_2]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} [N],_{\xi\xi} \\ [N],_{\eta\eta} \\ [N],_{\xi\eta} \end{array} \right\} - [A][J_1]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} [N],_{\xi} \\ [N],_{\eta} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

而

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 由于相邻单元边界位移不协调引起的附加刚度矩阵 $[K2]^e$

在所选的位移插值函数中, 横向位移 w 在相邻单元边界上是连续的, 即 $w^e - w^{e'} = 0$; 而单元边界上的法向导数 $w_{,n}^e$ 是不协调的, 所以, 在相邻单元边界上的附加能量为^{[1][2]}

$$U_2^e = \frac{1}{2} \sum_{\text{all } S^{e,e'} \text{ of } e} \int_{S^{e,e'}} (M_n^e - M_n^{e'}) w_{,n}^e dS \quad (4.3)$$

将 $w^e = [N]\{\delta\}^e$ 代入上式可得

$$U_2^e = \{\delta\}^{eT} [K2]^e \{\delta\}^e / 2 \quad (4.4)$$

3. R-16单元的总刚度矩阵

将各单元刚度矩阵 $[K1]^e$, $[K2]^e$ 按节点的总体编码集成总刚 $[K]^*$, 可以得到矩阵形式的能量方程

$$U = \{\delta\}^T [K]^* \{\delta\} / 2 - \{\delta\}^T \{Q\}$$

由 U 的变分驻值条件可得

$$[K]\{\delta\} - \{Q\} = 0 \quad (4.5)$$

式中 $\{Q\}$ 的意义可参见文献[3], 这里不再列出。而

$$[K] = ([K]^* + [K]^{*T}) / 2 \quad (4.6)$$

将边界条件引入(4.5), 可得到正定对称的 $[\bar{K}]$, 于是

$$[\bar{K}]\{\delta\} = \{\bar{Q}\} \quad (4.7)$$

解方程(4.7), 可以得到所有的节点广义位移 $\{\delta\}$ 。

五、算 例

例1 四周固支圆板受横向均布力 q , 板厚 $t=0.1\text{m}$, $\nu=0.3$, $E=2.1 \times 10^7 \text{N/m}^2$, 圆板半径 $a=2\text{m}$ 。由于板的对称性, 可只计算板的 $1/4$ 。单元划分如图4, 计算结果见表1。

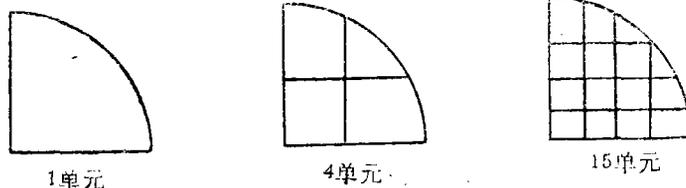


图 4

例2 四周简支各向同性方板受中心集中力 P 。计算参数： $a=2\text{m}$ ， $t=0.1\text{m}$ ， $E=2.1 \times 10^7\text{N/m}^2$ ， $\nu=0.3$ 。单元划分如图5。计算结果见表2。

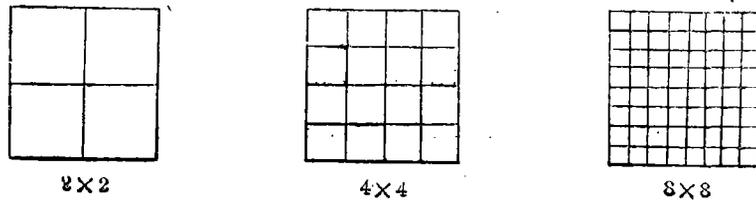


图 5

例3 四周简支各向同性方板受均布载荷 q 。网格划分及计算参数同例2。计算结果见表3。

例4 四周固支方板受均布载荷 q 。网格划分与计算参数同例2。计算结果见表4。

表 1

单元数	α^*	$\Delta\%^{**}$
1	0.0108	-18.92
4	0.0115	-11.54
15	0.0124	-4.62
解析解	0.0130	

表 2

网格划分	α	$\Delta\%$
2x2	0.01124	-3.07
4x4	0.01156	-0.34
8x8	0.01159	-0.09
解析解	0.01160	

表 3

单元划分	α	$\Delta\%$
2x2	0.004078	0.38
4x4	0.004078	0.38
8x8	0.004085	0.07
解析解	0.004062	

表 4

单元划分	α	$\Delta\%$
2x2	0.00135	6.97
4x4	0.00134	6.58
8x8	0.00129	2.86
解析解	0.00126	

* α 为 $w_{\max}=\alpha(qa^4/D)$ 或 $w_{\max}=\alpha(Pa^3/D)$ 中的系数。 $D=Et/12(1-\nu^2)$ 。

** $\Delta\% = \frac{\text{数值解} - \text{解析解}}{\text{解析解}} \times 100\%$

参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社 (1985).
- [2] Chien, W. Z., Incompatible plate elements based upon generalized variational principles, *Hybrid and Mixed Finite Element Method*, Ed. by A. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz (1983), 381-404.
- [3] 钱伟长、王刚, 基于广义变分原理的矩形薄板单元, *应用数学和力学*, 10, 11 (1989), 947-954.
- [4] 罗崧发, 非正交边界薄板弯曲问题的一种新单元, *计算结构力学*, 2, 3 (1985).

A New Element for Thin Plate of Bending with Curvilinear Boundary——Curvilinear Boundary Quadrilateral Element

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Wang Gang

*(Shanghai Institute of Railway Technology; Shanghai Institute
of Appl. Math. Mech., Shanghai)*

Abstract

This paper presents a curvilinear boundary quadrilateral element for the problem of thin plate of bending with curvilinear boundary. A coordinate transformation of two dimensions is performed in the calculation of FEM. The introduction of an additional stiffness matrix based on the generalized variational principles results in high accuracy and less computation time. The numerical results agree with the analytical solution very well.