

# 基于有限元概念的解析解\*

隋允康 郭田福

(大连理工大学工程力学研究所, 1988年9月30日收到)

## 摘 要

基于有限元概念, 本文研究了结构响应对于设计变量的严格解析解, 以空间桁架为例, 得到了位移显式的解析表达式——一个关于截面设计变量的有理函数, 并进行了严格的数学论证; 进而推出了有益于结构敏感度分析、结构优化的若干结论, 针对含有位移显式的优化模型, 提出了采用广义几何规划解法的建议; 最后计算了若干简例。

## 一、问题的提出

在有限元方法的应用颇普及、理论研究颇深入的今天, 计算力学呈现出一种进展减慢的趋势, 一方面是由于成果的饱和, 另一方面是由于发展动向的不明晰。其实, 欲打破山穷水尽的局面, 需要有柳暗花明的探索。如果我们能用历史的眼光进行这一探索, 则有可能较快地找到曲径通幽的路径。回顾一下工程力学的发展, 人们长期以来在探求解析解, 数值方法始终是实现解析公式的手段, 有限元的出现打破了徘徊不前的局面, 离散的数值解在工程力学中以主体的身份出现, 有限元提供了人们需要的数值解, 数值解有了充分的发展。永远逗留在数值解上吗? 是不是到了再来一个解析解发展高潮的前夜? 解析——数值——解析, 为什么不可能是这样一个发展过程? 然而新的解析阶段决不是第一个解析阶段的简单再现, 它必然要带上数值阶段的特点, 亦即打上有限元方法的印记。否定之否定, 即将到来的解析解阶段将出现一种基于有限元概念的解析解。

实现这样一个阶段的转变, 既是必要的, 也是可能的。其必要性在于, 结构分析的实现必然给人们带来结构综合的信心, 无论优化设计、计算机辅助设计, 还是参数识别, 都不仅需要一个设计点的数值答案, 更需要表示许多设计点或任意设计点的解答函数, 这就是要给出关于设计变量的解析解; 其可能性在于, 有限元数值解的方程本身就蕴含着求解析解的可能性, 例如表达求解总位移的总刚度阵方程为

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (1.1)$$

利用线性代数的数值解法, 不难求出其解 $\{u\}$ 来。其实(1.1)表达的结构静力响应方程是在某个设计变量 $\{A^0\} \in E^m$ 处建立的, 这里的设计变量视具体情况, 可以是单元的截面积或

\* 唐立民推荐。

厚度,也可以是节点的坐标等,总之设计变量 $\{A\}$ 是我们通过设计打算确定的一组参数,因此(1.1)的实质是

$$[K(\{A^*\})]\{u\}=\{p(\{A^*\})\} \quad (1.2)$$

进一步,如果把某个固定的设计 $\{A^*\}$ 换成变动的设计 $\{A\}$ ,那末结构响应方程则变成含参量的代数方程:

$$[K(\{A\})]\{u\}=\{p(\{A\})\} \quad (1.3)$$

问题就归纳为:找出一种解法,得到(1.3)的含参量解来。为了便于表达,这个含参量 $\{A\}$ 的解不妨记为

$$\{u\}=[K(\{A\})]^{-1}\{p(\{A\})\} \quad (1.4)$$

(1.4)式的解与(1.1)式的解的差别在于,这里的 $\{u\}$ 乃是 $\{A\}$ 的函数。求出(1.4)式的困难就在于方程(1.3)是含参量的,至今,我们还不会求解含参数矩阵的“逆”。不过,借助于有限元概念,我们已经建立了表达这一解析解的方程(1.3)。这就是问题的可能性。

同时,也要注意这里所谓解析解与以往解析解的差别。正如经典弹性理论所表达的,以往解析解是三维空间坐标点的函数。如果是动力问题,则结构响应还是时间的函数,总之,解析解在四维时空中表达。本文通过(1.3)表达的解析解,则是设计变量加上时间的函数。以静力问题为例,则不考虑时间。其实设计变量 $\{A\}$ 本质上也是三维空间的坐标,只不过有限元概念的引入,结构所在的空间点已经按有限元的意义结构化了:分成了表达单元的坐标——截面积或厚度,表达节点的坐标量——节点坐标。因此(1.3)式揭示的解是打上了有限元印记的解析解,顺便指出,设计变量也可以表达弹性模量、泊桑比等物理量,这正如经典解析解中也包含这些物理量一样。

如果真的可以求出有限元意义下的解析解(1.4)式,我们就可以对于常用的结构进行分析——解析意义下的分析,求出解析解,设计改变了,只要将改变了的 $\{A\}$ 代入(1.4)式就得到了具体的解。而对于结构优化设计,勿需进行敏度分析求结构响应对设计变量的导数,也勿需利用低阶的 Taylor 展式构造结构响应对设计变量的近似显函数了,因为我们已经得到了严格的解析解,可以用之建立严格的数学模型,代之以以往近似模型进行优化设计。如果想得到结构响应对设计变量的导数,只要对解析解求导即可得到导函数,而不是导数值,这对于 CAD 也是有用的。总之,今天重提解析解,不仅有重要的理论意义,也有重要的实践意义。

## 二、解析解及其简化表达的定理

下面以空间桁架结构为例探索其解析解。设桁架由 $m$ 个杆单元组成,所有截面积皆为独立设计变量,即设计变量向量 $\{A\} \in E^m$ ,设桁架节点独立位移自由度为 $n$ ,相应的有限元方程为(1.3)式。

利用数值方法,很难解(1.3)式,然而用 Cramer 定理,则可得到(1.3)式的解:

$$\{u\}=\left[ \begin{array}{ccc} |K_{11}| & \cdots & |K_{1n}| \\ \vdots & & \vdots \\ |K_{n1}| & \cdots & |K_{nn}| \end{array} \right] \{p\} / |K| \quad (2.1)$$

其中 $|K|$ 为 $[K]$ 的行列式, $|K_{ij}|$ 为 $[K]$ 的元素 $k_{ij}$ 的代数余子式。

总刚度阵第 $i$ 行,第 $j$ 列元素 $k_{ij}$ 可表为:

$$k_{ij} = \sum_{l=1}^m k_{ijl}^0 A_l \quad (2.2)$$

由行列式定义

$$\begin{aligned} |K| &= \sum_{(P_1 \dots P_n)} (-1)^{[P_1 \dots P_n]} k_{1P_1} \dots k_{nP_n} \\ &= \sum_{(P_1 \dots P_n)} (-1)^{[P_1 \dots P_n]} \left( \sum_{l_1=1}^m k_{1P_1 l_1}^0 A_{l_1} \right) \dots \left( \sum_{l_n=1}^m k_{nP_n l_n}^0 A_{l_n} \right) \\ &= \sum_{(P_1 \dots P_n)} (-1)^{[P_1 \dots P_n]} \sum_{l_1=1}^m \dots \sum_{l_n=1}^m k_{1P_1 l_1}^0 \dots k_{nP_n l_n}^0 A_{l_1} \dots A_{l_n} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中  $P_1 \dots P_n$  是数码  $1, \dots, n$  的一个排列,  $[P_1 \dots P_n]$  为排列  $P_1 \dots P_n$  的逆序总数,  $\sum_{(P_1 \dots P_n)} 1,$

$\dots, n$  一切排列求和。

由(2.3)式可知,  $|K|$  为设计变量的  $n$  次齐次函数, 同样可知,  $|K_{ij}|$  为设计变量的  $n-1$  次齐次函数, 考虑到(2.1)式, 不难推得

$$\{u\} = \{Q_{n-1}(\{A\})\} / Q_n(\{A\}) \quad (2.4)$$

其中  $Q_{n-1}(\{A\})$  与  $Q_n(\{A\})$  分别表示关于变量的  $n-1$  次与  $n$  次齐次函数, 亦即  $\{u\}$  为设计变量的有理函数。

进一步研究发现, (2.4)式的表达式可以简化, 从而得到如下结论。

**定理** 空间桁架的所有杆截面皆为独立设计变量  $\{A\} \in E^m$ , 其节点独立自由度  $n \leq m$ , 则结构静力响应方程  $[K(\{A\})]\{u\} = \{p(A)\}$  的解可以表示为如下有理函数

$$\{u\} = [c]\{x\} / \{d\}^T \{y\} \quad (2.5)$$

其中常数矩阵  $[c]$  的元素为  $c_{ij}, i=1, \dots, n; j=1, \dots, \binom{m}{n-1}$ ; 变量列阵(或称为基向量)  $\{x\}$  是  $\binom{m}{n-1}$  阶列向量, 其元素为  $\{x_j | x_j = A_{i_1} \dots A_{i_{n-1}}, i_1, \dots, i_{n-1} = 1, \dots, m \text{ 且 } i_1 \neq \dots \neq i_{n-1}\}$ ; 常数列阵  $\{d\}$  是  $\binom{m}{n}$  阶向量, 其元素为  $d_k, k=1, \dots, \binom{m}{n}$ ; 变量列阵(或称为基向量)  $\{y\}$  是  $\binom{m}{n}$  阶列向量, 其元素为  $\{y_k | y_k = A_{i_1} \dots A_{i_n}, i_1, \dots, i_n = 1, \dots, m \text{ 且 } i_1 \neq \dots \neq i_n\}$ 。

不难看出, 此定理表达的  $\{u\}$  比(2.4)式大大简化了, 因为(2.4)式的分子共  $A_m^{n-1}$  项, 分母共  $A_n$  项, 而(2.5)式的分子共  $\binom{m}{n-1}$  项, 分母共  $\binom{m}{n}$  项, 由排列数下降为组合数; 此定理揭示出(2.5)式分子、分母皆不含有设计变量分量的二次以上项, 只含有一次项的乘积, 这是一个十分重要的结论。

**证明** 首先证明(2.1)式中  $|K_{ij}|$  或  $|K|$  只含设计变量分量的一次项, 不失一般性, 仅对  $|K|$  进行论证, 对  $|K_{ij}|$  有完全相似的结论。

假定总位移向量除了第  $e$  号杆两端涉及的节点位移在其单元坐标系中描述, 其余的总位移分量在任意取定全局坐标系中描述, 其总刚度阵为  $[K]$ 。

显然第  $e$  号杆的单元刚度阵为

$$[K_e] = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

将总刚 $[K]$ 进行有限次行列交换, 使第 $e$ 号杆两端位移排在前面, 相应地,  $[K]$ 变成了 $[K^0]$ .

$$[K^0] = \begin{bmatrix} K_{:,e}^0 & K_{:,e}^0 \\ K_{:,e}^0 & K_{:,e}^0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

其中 $[K_{:,e}^0]$ 对应第 $e$ 号杆左右端位移, 为 $n_e \times n_e$ 方阵,  $n_e \leq 6$  ( $n_e < 6$ 在第 $e$ 号杆端部有约束时发生).

整个总刚阵 $[K^0]$ 中只有子矩阵 $[K_{:,e}^0]$ 与 $A_e$ 有关. 由于与 $e$ 单元相联的其它单元亦对总刚有贡献, 所以

$$[K_{:,e}^0] = [K_e] + [C] \quad (2.8)$$

其中 $[K_e]$ 即(2.6)式,  $[C]$ 为其它单元对总刚度阵的贡献.

参照(2.7), (2.8)式, 根据 Laplace 展开定理,  $[K^0]$ 的行列式 $|K^0|$ 中所含 $A_e$ 的平方项正负消掉, 只剩下了 $A_e$ 的一次项. 设 $[K^0]$ 是由 $[K]$ 经过 $p$ 次行列交换得到, 则

$$|K| = (-1)^p |K^0| \quad (2.9)$$

由此可知 $|K|$ 只含 $A_e$ 的一次项.

下面把上述结论推广到第 $e$ 号杆也采用全局坐标系的情况. 为此需引进坐标转换阵 $[\lambda_T]$

$$\{u_e^0\} = [\lambda_T] \{u_e^c\} \quad (2.10)$$

$$[\lambda_T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

其中 $\{u_e^c\}$ ,  $\{u_e^0\}$ 分别为第 $e$ 号杆在局部坐标和全局坐标中的位移向量,  $[\lambda]$ 的元素为有关的方向余弦.

为了得到所有位移皆在全局坐标中表达的总刚度阵 $[K^0]$ , 先写出 $[K^0]$ 对应的总势能,

$$\Pi = \frac{1}{2} [u_e^{0T} \ u_e^{cT}] [K^0] \begin{Bmatrix} u_e^c \\ u_e^0 \end{Bmatrix} - \{p\}^T \begin{Bmatrix} u_e^c \\ u_e^0 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

其中 $\{u_e^c\}$ 系除去 $\{u_e^0\}$ 的总位移分量. 将(2.10)式代入(2.13)式可得

$$\Pi = \frac{1}{2} [u_e^{cT} \ u_e^{0T}] \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} [K^0] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e^c \\ u_e^0 \end{Bmatrix} - \{p\}^T \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e^c \\ u_e^0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

因所有位移皆在全局坐标系表达的总位移 $\{u_e\}$ 为

$$\{u_e\}^T = [u_e^{cT} \ u_e^{0T}]$$

所以由(2.14)式可推得

$$[K^G] = [T]^T [K^0] [T] \quad (2.15)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

根据行列式性质

$$|K^G| = |T^T| |K^0| |T| = |T^T| |T| |K^0| = |K^0|$$

故  $|K^G|$  只含  $A_0$  的一次项。由  $A_0$  的任意性,  $|K^G|$  只含各设计变量分量的一次项。再考虑到(2.3)式,  $|K^G|$  只含设计变量分量的乘积项, 每项是由  $n$  个不同的分量相乘表示的, 合并同类项, 共  $\binom{m}{n}$  项, 至此, (2.5) 式的分母形式已证毕。同理不难证明(2.5)式的分子形式。

通常在结构优化中采用设计变量连接技术, 此时(2.5)式的分子、分母中就有设计变量分量的高次项了。

### 三、若干重要推论

在下面讨论中, 为了表达简便, 我们只取(2.5)式的分量形式。

#### 1. 静定结构的位移函数

静定结构的杆件数  $m$  与独立位移自由度数  $n$  相等, 即  $m=n$ , 于是

$$\binom{m}{n} = 1, \quad \binom{m}{n-1} = m$$

此时, 由(2.5)式可得

$$u_i = \sum_{j=1}^m C_{i,j} \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m A_k / \left( d_i \prod_{k=1}^m A_k \right) = \sum_{j=1}^m C_{i,j}^0 / A_j \quad (3.1)$$

其中  $C_{i,j}^0 = C_{i,j} / d_i$

(3.1) 式是我们熟知的结论, Mohr 积分指出

$$u_i = \sum_{j=1}^m \frac{N_j \bar{N}_j l_j}{E_j A_j} \quad (3.2)$$

其中  $N_j, \bar{N}_j$  分别为实、虚荷载下的单元内力, 对于静定结构, 它们是常数, 故(3.2)对于静定结构是位移  $u_i$  的解析解。

#### 2. 倒变量空间近似解的有效性

不少文献指出<sup>[2],[4]</sup>, 在位移对于设计变量的一阶 Taylor 展开中, 倒变量空间中展开的效果最好。这是一个数值实验的结论, 其理论根据不难从本文揭示的解析解找到。

由(2.5)式不难看出, 位移作为设计变量的有理函数, 其分子每项是  $n-1$  个分量的乘积, 其分母是  $n$  个分量的乘积; 从量纲上看, 总体上, 位移是设计变量分量的倒数 (上述静定结构显示了这一结论), 因此按倒变量去展开, 对原函数逼近的程度必然是高的。

### 3. 位移一阶、二阶导数的另一种表达

在下面的推导中, 为了保持简便, 将位移解析表达式简单地记为

$$u_i = D_i / D \quad (3.3)$$

由此求得

$$\frac{\partial u_i}{\partial A_j} = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial D_i}{\partial A_j} - u_i \frac{\partial D}{\partial A_j} \right) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_j \partial A_k} = \frac{1}{D} & \left( \frac{\partial^2 D_i}{\partial A_j \partial A_k} - u_i \frac{\partial^2 D}{\partial A_j \partial A_k} - \frac{\partial u_i}{\partial A_k} \frac{\partial D}{\partial A_j} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u_i}{\partial A_j} \frac{\partial D}{\partial A_k} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

由定理,  $D$  与  $D_i$  只含设计变量分量的一次项, 故当  $j=k$  时得到

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial A_j^2} = \frac{-2\partial u_i \partial D}{D \partial A_j \partial A_j} \quad (3.6)$$

这些导数在建立位移近似显式时提供了涉及行列式的算法, 在应用时可在(3.4)~(3.6)的基础上采用差分近似去计算。

### 4. 关于建立严格优化模型的建议

迄今为止, 由于得不到准确的约束函数, 人们只好通过结构敏感度分析的途径, 形成约束近似显函数建立近似优化模型。本文揭示的结构响应的解析解, 则提供了建立严格优化模型的途径。

首先位移约束根据(2.4)式或(2.5)式可以表达为严格的约束形式, 即

$$u_i = Q_{i-1}^i(\{A\}) / Q_n(\{A\}) \leq \bar{u}_i \quad (3.7)$$

因为应力可以表达为位移的线性组合, 所以(3.7)式也可表达应力约束。(3.7)式也可表示为

$$Q_{i-1}^i(\{A\}) - \bar{u}_i Q_n(\{A\}) \leq 0$$

于是重量最轻的优化模型为

$$\left. \begin{aligned} W = \sum_{j=1}^m \rho_j l_j A_j \rightarrow \min \\ \text{s. t. } Q_{i-1}^i(\{A\}) - \bar{u}_i Q_n(\{A\}) \leq 0 \quad (i=1, \dots, k) \\ \underline{A}_j \leq A_j \leq \bar{A}_j \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

这是严格的优化模型, 由于性能约束是广义多项式, 可以将约束表达为

$$Q_{i-1}^i(\{A\}) - \bar{u}_i Q_n(\{A\}) = \alpha_i(\{A\}) - \beta_i(\{A\}) \leq 0 \quad (3.9)$$

其中  $\alpha_i(\{A\})$ ,  $\beta_i(\{A\})$  分别为  $A_j$  的正项多项式。

进而约束  $\alpha_i(\{A\}) - \beta_i(\{A\}) \leq 0$  可化为

$$\alpha_i(\{A\}) / \beta_i(\{A\}) \leq 1$$

此时(3.8)式可化为

$$\left. \begin{aligned}
 W &= \sum_{j=1}^m \rho_j l_j A_j \rightarrow \min \\
 \text{s.t. } & \alpha_i(\{A\})/\beta_i(\{A\}) \leq 1 \quad (i=1, \dots, k) \\
 & \underline{A}_j \leq A_j \leq \bar{A}_j \quad (j=1, \dots, m)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

接着可以采用单项高阶展式<sup>[5]</sup>，分别处理目标和约束，采用算法高效、收敛稳定的广义几何规划的二阶缩并原算法<sup>[6]</sup>或完全二阶缩并原算法<sup>[7]</sup>求解。

### 四、算 例

#### 1. 三杆问题

不难推得杆1、2、3在全局坐标系的单刚分别为

$$[K_1] = \frac{E_1 A_1}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{E_2 A_2}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{E_3 A_3}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

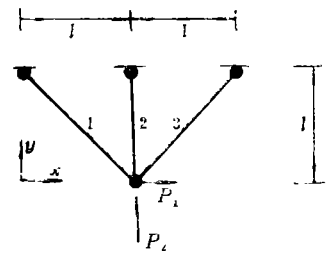


图 1

对截面 $A_1, A_2, A_3$ 进行变换引进 $\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$ 是为了表达简便。组装总刚方程，得到

$$\begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 1] \{\alpha\} & [-1 \ 0 \ 1] \{\alpha\} \\ [-1 \ 0 \ 1] \{\alpha\} & [1 \ 1 \ 1] \{\alpha\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

亦即

$$[K] = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}$$

利用本文的定理，进行行列式计算时对设计变量分量自乘项略掉可简化计算

$$\begin{aligned}
 |K| &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (-\alpha_1 + \alpha_3)^2 \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3
 \end{aligned}$$

$$|K_{11}| = (-1)^{1+1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$|K_{12}| = (-1)^{1+2}(-\alpha_1 + \alpha_3) = \alpha_1 - \alpha_3 = |K_{21}|$$

$$|K_{22}| = (-1)^{2+2}(\alpha_1 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_3$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \end{bmatrix}$$

讨论：1) 检验静定结构解的形式

任取一杆截面为零，如 $A_3=0$ 则

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 & 1/\alpha_2 \\ 1/\alpha_2 & 1/\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

同本文上节结论一致

2) 令  $\alpha_1 = \alpha_3$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1/(2\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

如果视  $2\alpha_1 + \alpha_2$  为独立变量, 则解类似静定结构。

3) 令  $\alpha_2 = \alpha_3$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} / \alpha_2(5\alpha_1 + \alpha_2)$$

完全不象静定结构, 尽管独立杆件数等于独立自由度数。

## 2. 五杆二自由度问题

5根杆在全局坐标系中的单元刚度阵为:

$$[K_1] = \frac{E_1 A_1}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{\sqrt{3}E_2 A_2}{8l} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{E_3 A_3}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_4] = \frac{\sqrt{3}E_4 A_4}{8l} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} = \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_5] = \frac{E_5 A_5}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

组装总刚

$$[K] = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 & -\alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_4 + \alpha_5 \\ -\alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_4 + \alpha_5 & \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_5 \end{bmatrix}$$

利用定理, 简化行列式的计算

$$\begin{aligned} |K| &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_5) \\ &\quad - (-\alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_4 + \alpha_5)^2 \\ &= (4 - 2\sqrt{3})\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + (4 + 2\sqrt{3})\alpha_1\alpha_4 + 4\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3 \\ &\quad + 12\alpha_2\alpha_4 + (4 + 2\sqrt{3})\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_5 + (4 - 2\sqrt{3})\alpha_4\alpha_5 \end{aligned}$$

$$|K_{11}| = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_5$$

$$|K_{12}| = |K_{21}| = \alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 - \sqrt{3}\alpha_4 - \alpha_5$$

$$|K_{22}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$$

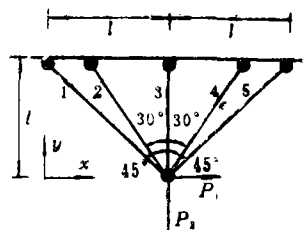


图 2



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_5 & \alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 - \sqrt{3}\alpha_4 - \alpha_5 \\ \alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 - \sqrt{3}\alpha_4 - \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}}{[(4-2\sqrt{3})\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + (4+2\sqrt{3})\alpha_1\alpha_4 + 4\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3 + 12\alpha_2\alpha_4 + (4+2\sqrt{3})\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_5 + (4-2\sqrt{3})\alpha_4\alpha_5]}$$

### 3. 五杆四自由度问题

杆1、2、3、4、5在全局坐标系中的单刚为

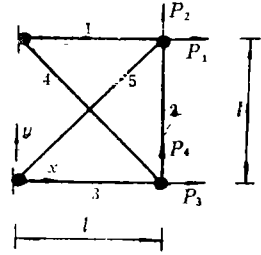


图 3

$$[K_1] = \frac{E_1 A_1}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{E_2 A_2}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{E_3 A_3}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_4] = \frac{E_4 A_4}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_5] = \frac{E_5 A_5}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

总刚度阵为

$$[K] = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_5 & \alpha_5 & 0 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_2 + \alpha_5 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \alpha_4 & -\alpha_4 \\ 0 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$|K_{11}| = \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$|K_{12}| = |K_{21}| = -(\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5)$$

$$|K_{13}| = |K_{31}| = -\alpha_2\alpha_4\alpha_5$$

$$|K_{14}| = |K_{41}| = \alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5$$

$$|K_{22}| = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$\begin{aligned}
|K_{23}| &= |K_{32}| = -(a_1 a_2 a_4 + a_2 a_4 a_5) \\
|K_{24}| &= |K_{42}| = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_3 a_5 + a_2 a_4 a_5 \\
|K_{33}| &= a_1 a_2 a_4 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_4 a_5 \\
|K_{34}| &= |K_{43}| = a_1 a_2 a_4 + a_2 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5 \\
|K_{44}| &= a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_5 + a_1 a_3 a_5 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5 \\
|K| &= a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_5 + a_1 a_2 a_4 a_5 + a_1 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_4 a_5
\end{aligned}$$

由上面可得

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} |K_{11}| & |K_{12}| & |K_{13}| & |K_{14}| \\ |K_{21}| & |K_{22}| & |K_{23}| & |K_{24}| \\ |K_{31}| & |K_{32}| & |K_{33}| & |K_{34}| \\ |K_{41}| & |K_{42}| & |K_{43}| & |K_{44}| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} |K|$$

由这些例子可以看出, 本文给出了从未得到的解析解。程序实现时可以利用本文的定理简化计算。

### 参 考 文 献

- [1] Schmit, L. A. and H. Miura, Approximation concepts for efficient structural synthesis, NASA, CR-2556 (1986).
- [2] 钱令希, 《工程结构优化设计》, 水利电力出版社 (1983).
- [3] 谢邦杰, 《线性代数》, 人民教育出版社 (1978).
- [4] 隋允康, 函数变换下的满应力设计方法, 应用力学学报, 2 (1987).
- [5] 隋允康、耿树森, Taylor 展式的推广及其在求解数学规划中的应用, 工程数学学报, 1 (1985).
- [6] 隋允康、耿树森, 广义几何规划二阶缩并的原算法及其在结构优化中的应用, 计算结构力学及其应用, 1 (1985).
- [7] 隋允康、由衷, 广义几何规划的完全二阶原算法, 计算结构力学及其应用, 4 (1988).

## The Analytical Solutions Based on the Concept of Finite Element Methods

Sui Yun-kang Guo Tian-fu

(Research Inst. of Engng. Mech., Dalian University of Technology, Dalian)

### Abstract

On the basis of the concept of finite element methods, the rigorous analytical solutions of structural response in terms of the design variables are researched in this paper. The spatial trusses are taken as an example for the solution of the analytical expressions of the explicit displacements which are proved mathematically, then some conclusions are reached that are useful to structural sensitivity analysis and optimization. In the third part of the paper, a generalized geometric programming method is suggested for the optimal model with the explicit displacement. Finally, the analytical solutions of the displacements of three trusses are given as examples,