

悬臂矩形板在对称边界荷载下的屈曲*

成祥生

(同济大学, 1988年9月21日收到)

摘要

本文用变分法对悬臂矩形板在对称边界荷载下的稳定性进行研究. 我们将对在悬臂矩形板的一对相对的自由边作用有不同的对称边界荷载时, 求出薄板的最小临界力. 文中分别讨论了有一对集中力, 均布荷载, 局部均布荷载, 三角形分布荷载及一对集中力偶作用之下悬臂矩形板发生屈曲时的最小临界荷载.

一、方法原理

为了寻求悬臂矩形板在对称边界荷载作用之下发生屈曲时的最小的临界荷载, 我们将应用最小势能原理^[1~3]. 由能量分析可知, 当薄板系统发生屈曲时, 其总势能应达到驻值, 从而求出最小的临界荷载. 总势能为驻值的条件就是

$$\delta\Pi=0 \quad (1.1)$$

其中 Π 表示薄板系统的总势能, 它包括薄板系统的形变势能 U 和外力的势能 V , 即

$$\Pi=U+V \quad (1.2)$$

若薄板为一等厚的各向同性板, 则当板面发生弯曲时, 其整个系统所储存的形变势能为^[1]

$$U=\frac{D}{2}\iint[(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)]dxdy \quad (1.3)$$

其中 $D=Ek^3/12(1-\mu^2)$, 是板的弯曲刚度; E , h , μ 分别为薄板材料的弹性模量, 板厚和泊松比. ∇^2 为拉普拉斯算子, w 为挠曲函数, w_{xx} , w_{yy} , w_{xy} 等为挠曲函数对相应下标的偏导数; 二重积分遍及板的中面.

若薄板在一对相对的自由边 $x=0$ 和 $x=a$ 上作用有对称的分布荷载 $p(y)$, 这荷载沿 y 轴方向是变化的, 而作用的方向是沿 x 轴的方向, 如图1所示.

这时, 外力的势能是

$$V=-\frac{1}{2}\iint p(y)w_x^2dxdy \quad (1.4)$$

* 潘立宙推荐.

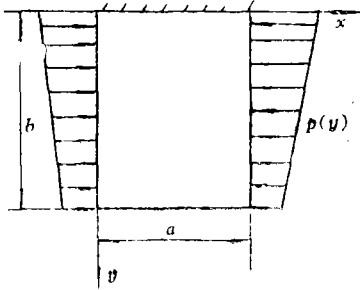


图 1

其中 $p(y)$ 为分布荷载沿 y 轴方向变化的集度, w_x 为挠曲函数对 x 的一阶偏导数, 积分遍及板的中间全域。

只要我们对每一个具体的情况能写出(1.3)和(1.4), 从而组成(1.2), 于是由条件(1.1)就可求出薄板发生屈曲时的最小的临界荷载。

在公式(1.3)和(1.4)中的挠曲函数 $w=w(x, y)$ 应事先选择, 至少使它满足薄板的全部几何边界条件。但若能满足一部分内力边界条件, 不但能使计算过程简单, 而且还能提高计算精度。

现在对图1所示的薄板, 当受到对称的压力后发生屈曲, 试用下式来表示形成的挠曲面

$$w = f_1 \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) + f_2 \frac{y^2}{b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (1.5)$$

其中 a 和 b 分别为薄板沿 x 轴和 y 轴边的长度, 而 f_1 和 f_2 为未知数的系数。式中第二项和实际弯曲形式非常接近, 但不能满足一对自由边 $x=0$ 和 $x=a$ 上的挠度不为零的条件, 然而当增加了第一项之后就克服了这个缺点。现在函数(1.5)能满足悬臂矩形板的全部几何边界条件, 即在固定边 $y=0$ 上

$$w|_{y=0} = 0, \quad w_y|_{y=0} = 0 \quad (1.6)$$

及在其它三个自由边上, 挠度不等于。

如果挠曲函数还能满足一部分内力边界条件那就更好了。现在使函数(1.5)满足在自由边 $y=b$ 上的合成横向剪力 V_y 为零, 即⁽¹⁾

$$[w_{yyy} + (2-\mu)w_{xyy}]_{y=b} = 0 \quad (1.7)$$

若将(1.5)代入(1.7), 并消去三角函数 $\sin(\pi x/a)$ 之后可得到

$$f_1 = -4(2-\mu)(b^2/a^2)f_2 \quad (1.8)$$

于是函数(1.5)中的两个系数之间存在一个由上式表示的约束关系。这样在函数(1.5)中将只有一个系数是独立的, 从而在以下的计算中可得到很大的方便, 同时由于函数(1.5)又满足了在自由边 $y=b$ 的合成横向剪力为零的部分内力边界条件(1.7), 于是计算精度也相应地得到提高。

对于方板的情形, 因 $b=a$, 若取 $\mu=0.3$ 则由(1.8)可得

$$f_1 = -6.80f_2 \quad (1.9)$$

二、具体数值算例

情形 A 设有一悬臂矩形板, 在点 $(0, b)$ 和点 (a, b) 各有一个集中力 P 作用, 如图2所示。

先计算薄板的形变势能, 为此将函数(1.5)代入(1.3), 进行积分可得到

$$U = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\pi^4 a}{32b^3} f_1^2 + \left[\frac{\pi^4 b}{10a^3} + \frac{2a}{b^3} + \frac{\pi^2}{ab} \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \right] f_2^2 + \left[\frac{4a}{b^3} - \frac{2\mu\pi^2}{ab} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right] f_1 f_2 \right\} \quad (2.1)$$

再计算外力的势能, 应用(1.4), 并注意到是集中力的情形, 则有

$$V = -\frac{1}{2}P \int_0^a (w_x)_{x=b}^2 dx \quad (2.2)$$

将函数(1.5)代入上式可得到

$$V = -\frac{1}{2} \times 4.93485 \frac{P}{a^2} f_2^2 \quad (2.3)$$

对于方板的情形, 因 $b=a$, 若取 $\mu=0.3$, 则(2.1)可简化为

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} (3.03125f_1^2 + 18.97870f_2^2 + 2.87824f_1f_2) \quad (2.4)$$

再应用(1.9)可得到

$$U = \frac{1}{2} \times 139.57167 \frac{D}{a^2} f_2^2 \quad (2.5)$$

对于方板的情形, 将(2.3)和(2.5)代入(1.2), 再由(1.1)对一个参数 f_2 进行变分, 可得到图2所示的悬臂方板在一对集中力作用下发生屈曲时的最小的临界荷载

$$P_{cr} = \frac{139.57167}{4.93485} \frac{D}{a} = 28.282826 \frac{D}{a} \quad (2.6)$$

用上述同样的方法还计算了以下几种情形, 就是

情形B 一悬臂方板, 在点 $(0, a/2)$ 和点 $(a, a/2)$ 各有一个集中力 P 作用, 如图3所示. 求得最小的临界荷载为

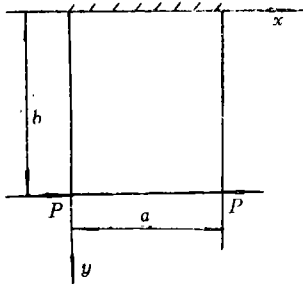


图 2

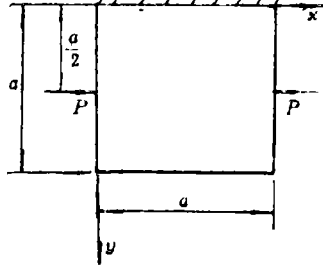


图 3

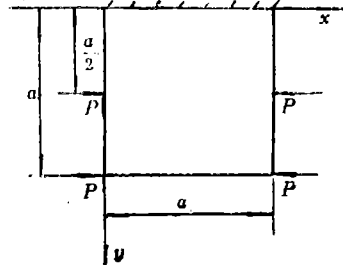


图 4

$$P_{cr} = 452.53080D/a \quad (2.7)$$

情形C 一悬臂方板, 有四个相等的集中力 P 作用, 如图4所示. 求得最小的临界荷载为

$$P_{cr} = 26.61946D/a \quad (2.8)$$

不难验证: 以上三种情形的临界荷载之间有如下简单的关系

$$\frac{1}{P_{cr}^{(C)}} = \frac{1}{P_{cr}^{(A)}} + \frac{1}{P_{cr}^{(B)}} \quad (2.9)$$

式中 $P_{cr}^{(A)}$, $P_{cr}^{(B)}$ 和 $P_{cr}^{(C)}$ 分别为情形A、情形B和情形C的临界荷载.

情形D 一悬臂方板, 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个自由边上各有一均匀分布压力 p_0 作用, 如图5所示.

情形E 一悬臂方板在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个自由边上各有一三角形分布的荷载

$$p(y) = (1 - y/b)p_0 \quad (2.10)$$

作用, 如图6所示.

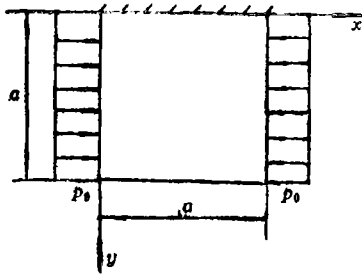


图 5

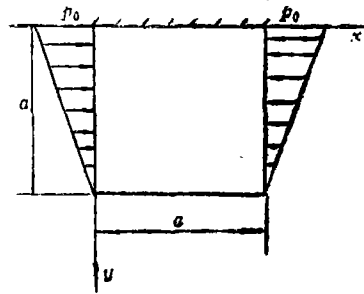


图 6

情形F 一悬臂方板在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个自由边上各有一如下的三角形分布荷载

$$p(y) = \frac{y}{b} p_0 \quad (2.11)$$

作用, 如图7所示.

情形D、E、F的计算结果均列于表1中. 容易验证, 情形D、E、F的最小临界荷载 $(p_0)_{cr}^{(D)}$, $(p_0)_{cr}^{(E)}$ 和 $(p_0)_{cr}^{(F)}$ 之间也有如下简单的关系

$$\frac{1}{(p_0)_{cr}^{(D)}} = \frac{1}{(p_0)_{cr}^{(E)}} + \frac{1}{(p_0)_{cr}^{(F)}} \quad (2.12)$$

情形G 设有一悬臂方板, 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个自由边上, 从离开固定端为 l_1 到 l_2 之间各有一个局部均匀分布压力 p_0 作用, 如图8所示. 求出它的最小的临界荷载是

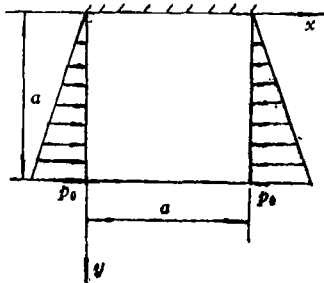


图 7

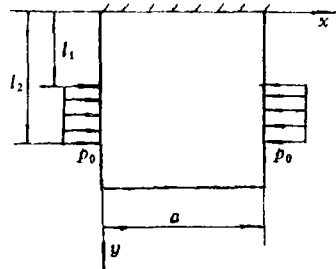


图 8

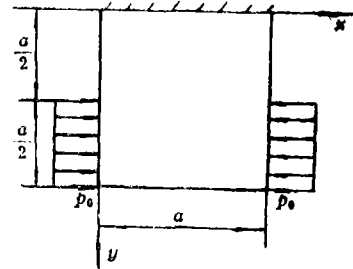


图 9

$$(p_0)_{cr} = \frac{139.57167a^3}{0.98696(l_2^2 - l_1^2)} \sqrt[3]{D} \quad (2.13)$$

上式的具体数值, 要根据 l_1 和 l_2 的量来确定, 现在讨论两种特殊情形.

情形H 设的均匀压力为 p_0 , $l_1 = a/2$, $l_2 = a$, 如图9所示. 求出它的最小的临界荷载是

$$(p_0)_{cr} = 145.97768D/a^2 \quad (2.14)$$

情形I 设均匀压力为 p_0 , $l_1 = 0$, $l_2 = a/2$, 如图10所示. 求出它的最小的临界荷载是

$$(p_0)_{cr} = 4525.30798D/a^2 \quad (2.15)$$

不难验证, 情形H、I和D的最小临界荷载 $(p_0)_{cr}^{(H)}$, $(p_0)_{cr}^{(I)}$ 和 $(p_0)_{cr}^{(D)}$ 之间有如下简单

的关系

$$\frac{1}{(p_0)_{cr}^{(D)}} = \frac{1}{(p_0)_{cr}^{(H)}} + \frac{1}{(p_0)_{cr}^{(I)}} \quad (2.16)$$

情形J 设一悬臂方板, 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个自由边上各有一组如下的压力

$$p_x = \left(2\frac{y}{b} - 1\right)p_0 \quad (2.17)$$

作用, 如图11所示。

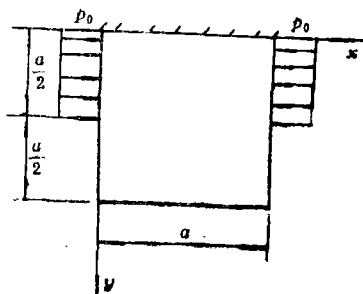


图 10

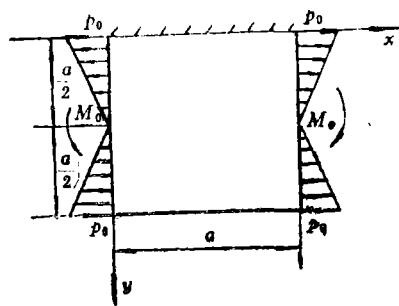


图 11

我们仍然认为压力取正号, 其中 p_0 为在 $y=0$ 和 $y=a$ 点处的压力强度。

在这种情形下求出它的最小的临界压力

$$(p_0)_{cr} = 212.14402D/a^2 \quad (2.18)$$

或用(画在图11中的)一对力偶 M_0 来代替由(2.17)式所表示的压力的作用, 于是

$$(M_0)_{cr} = 35.35734D \quad (2.19)$$

其中 $M_0 = p_0 a^2 / 6$ 。

将以上各情形的全部计算结果列于表1中。

表 1

情形	临界荷载	图号	情形	临界荷载	图号
A	$P_{cr} = 28.28286D/a$	2	F	$(p_0)_{cr} = 169.69905D/a^2$	7
B	$P_{cr} = 452.53080D/a$	3	G	$(p_0)_{cr} = \frac{139.57187a^2}{0.98698(l_1^2 - l_2^2)} - D$	8
C	$P_{cr} = 26.61946D/a$	4	H	$(p_0)_{cr} = 145.97768D/a^2$	9
D	$(p_0)_{cr} = 141.41587D/a^2$	5	I	$(p_0)_{cr} = 4525.30798D/a^2$	10
E	$(p_0)_{cr} = 848.49525D/a^2$	6	J	$(M_0)_{cr} = 35.35734D$	11

三、结 束 语

1. 本文用变分法给出了悬臂板在十种受力情形(A~J)下发生对称屈曲时的最小的临界荷载。

2. 当薄板不是方形板时, 只要根据边长比从(1.8)先求出 f_1 和 f_2 的关系, 然后由(2.1)求薄板系统的形变势能, 由(1.4)求外力的势能, 最后可得到任意边长比的悬臂矩形板在各种

情形下发生对称屈曲时的最小的临界荷载。

3. 本文中所选用的挠曲函数, 不仅满足了薄板的全部几何边界条件, 同时还满足了一条自由边 $y=b$ 上合成横向剪力为零的部分内力边界条件, 于是可使计算精度提高, 同时由于使挠曲函数中独立的系数的个数减少, 因此也减轻了计算工作量。

4. 在本文所选用的挠曲函数的情形下, 对于一块受组合外荷载的薄板, 它的最小的临界荷载可由总荷载的各个组成部分所引起的各个最小的临界荷载, 通过简单的计算而得, 例如(2.9)、(2.12)和(2.16)式。

5. 由于所选用的挠曲函数不是唯一的, 故由不同的挠曲函数所求得的临界荷载一般也不相同, 近似解的好坏, 主要取决于所选用的函数。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability* (1930).
- [2] Rayleigh, J.W.S., *Theory of Sound*, Macmillan and Co. Ltd., London (1877).
- [3] Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik, *Jour. für die reine und angewandte Mathematik*, 135 (1908), 1—61.

On Buckling of Cantilever Rectangular Plates under Symmetrical Edge Loading

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The stability of cantilever rectangular plates under the symmetrical edge loading will be studied in this paper by the variational calculus. We are going to find out the minimum critical loading for cantilever rectangular plates subjected to various edge loadings symmetrically on a pair of opposite free edges. We'll discuss the least critical loadings when the bucklings of rectangular plates acted on by a pair of concentrated forces, uniformly distributed loads, locally uniform distributed loads, distributed loads in the form of triangle and a pair of concentrated couples occur respectively.