

受弯层合板边缘效应数值-摄动分析*

叶碧泉 周焕文

(武汉大学, 1988年12月28日收到)

摘 要

本文将分析一个受弯复合材料层合板的计算模型。首先利用无量纲变量将层合板任一层的平衡方程变成以位移表示的摄动型微分方程式; 然后利用合成展开法, 将求解区域分成内部区域和边界层区域, 并推导出求解外部解和内部解的数学模型。为突出边缘效应, 最后用边界积分方程表示内部解。

一、引 言

层状复合材料结构边缘效应分析曾引起国内外很多学者的关注, 因为在自由边近区即所谓“边界层”区内潜在有较高的应力梯度, 并认为它是层状结构破坏的“源泉”, 因此对“边界层”区内应力数值的分析和计算将为层状结构的设计提供数值结果, 并对其承载能力或破坏方式提供理论预测。

以往对这一课题的分析和研究都是基于一个拟三维计算模型^{[1]—[6]}, 即认为在中面 xy 平面上, 沿 x 方向作用有均匀分布的拉应力, 而 y 方向则为自由边; 在层合板的上、下表面没有任何外载荷作用。

本文将考虑一个受弯层合板的计算模型, 即认为在中面 xy 上, $x=+a$ 时, 其边界固定; 在 $y=+b$ 时为自由边; 而在层合板的上表面上作用有均布垂直载荷 $q(x, y)$, 这一计算模型比上面所提及的计算模型要复杂得多。

二、基本假设和基本方程

考虑一个受弯复合材料层合板的计算模型, 如图1所示。

xyz 坐标系的原点取在层合板的中心, xy 平面位于层合板的中面内, z 轴垂直中面, 设层合板的表面作用有垂直载荷 $q(x, y)$; 并认为层厚与中面特征长度相比很小, 即假定

$$\left(\frac{h}{a}, \frac{h}{b}\right) \ll 1$$

为导出摄动型方程式, 引进如下无量纲变量:

* 国家自然科学基金资助课题。

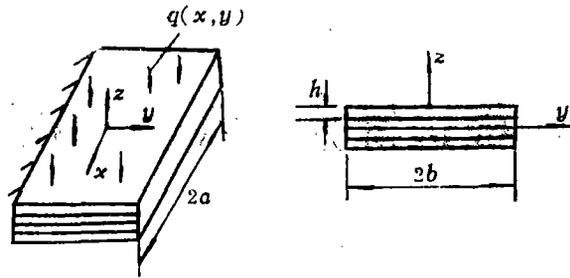


图 1

$$x = a\bar{x}, \quad y = b\bar{y}, \quad z = h\bar{z} \quad (2.1)$$

$$u = \frac{h^2}{a}\bar{u}, \quad v = \frac{h^2}{b}\bar{v}, \quad w = h\bar{w} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \alpha = \frac{a}{b} \quad (2.3)$$

在上面的假设下, 层合板任一层的基本方程如下:

a. 广义虎克定律

在新坐标下, 广义虎克定律变为:

$$\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_{ij}] \bar{\varepsilon} \quad (2.4)$$

其中

$$\bar{\varepsilon}^T = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

$$[\bar{\sigma}_{ij}] = [c_{ij}] \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \varepsilon^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

b. 平衡方程

为书写方便起见, 省略层间标记“j”, 且仍用x代替 \bar{x} , u代替 \bar{u} ...等等, 则以位移表示的层合板任一层“j”的摄动型方程为:

$$c_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \varepsilon^2 \left[\left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha^2 c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \alpha^2 (c_{12} + c_{55}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

(2.7)

$$c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \varepsilon^2 \left[\left(c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha^2 c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

(2.8)

$$c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left[\left(c_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha^2 c_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \alpha^2 (c_{33} + c_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right] = 0$$

(2.9)

c. 边界条件

$$z \text{ 方向: 在上表面: } \sigma_i = \begin{cases} 0 & (i=4, 5) \\ q & (i=3) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{在层间: } {}^j \sigma_i = {}^{j+1} \sigma_i \quad (i=3, 4, 5; j=1, 2, \dots, M-1) \quad (2.11)$$

$$x \text{ 方向: } w=0, u=0, v=0 \quad (2.12)$$

$$y \text{ 方向: } {}^j \sigma_i = 0 \quad (i=2, 4, 6; j=1, 2, \dots, M) \quad (2.13)$$

三、外部解和内部解的数学模型

下面我们将利用所谓“合成展开”法来导出外部解和内部解的数学模型^[6], 为此令

$$\eta = (y-1)/\alpha\varepsilon \quad (3.1)$$

$$u = u^{(0)}(x, y, z, \varepsilon) + u^{(1)}(x, \eta, z, \varepsilon)$$

$$v = v^{(0)}(x, y, z, \varepsilon) + v^{(1)}(x, \eta, z, \varepsilon) \quad (3.2)$$

$$w = w^{(0)}(x, y, z, \varepsilon) + \varepsilon w^{(1)}(x, \eta, z, \varepsilon)$$

其中

$u^{(0)}, v^{(0)}$ 和 $w^{(0)}$ 为外部解;

$u^{(1)}, v^{(1)}$ 和 $w^{(1)}$ 为内部解.

将外部解和内部解展成 ε 的幂级数, 即令

$$u^{(0)} = \sum u_n^{(0)}(x, y, z) \varepsilon^{2n}$$

$$v^{(0)} = \sum v_n^{(0)}(x, y, z) \varepsilon^{2n} \quad (3.3)$$

$$w^{(0)} = \sum w_n^{(0)}(x, y, z) \varepsilon^{2n}$$

$$u^{(1)} = \sum u_n^{(1)}(x, \eta, z) \varepsilon^n$$

$$v^{(1)} = \sum v_n^{(1)}(x, \eta, z) \varepsilon^n \quad (3.4)$$

$$w^{(1)} = \sum w_n^{(1)}(x, \eta, z) \varepsilon^n$$

将方程(3.2)及(3.3)和(3.4)代入控制微分方程(2.7)~(2.9), 则得受弯层合板任一层的外部解和内部解的零级近似数学模型:

a. 外部解

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_0^{(0)}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 w_0^{(0)}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (3.5)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial z^2} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 w_0^{(0)}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3.6)$$

$$c_{33} \frac{\partial^2 w_0^{(0)}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.7)$$

b. 内部解

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_0^{(4)}}{\partial z^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_0^{(4)}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 v_0^{(4)}}{\partial z^2} + c_{22} \frac{\partial^2 v_0^{(4)}}{\partial \eta^2} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 w_0^{(4)}}{\partial \eta \partial z} = 0 \quad (3.9)$$

$$c_{33} \frac{\partial^2 w_0^{(4)}}{\partial z^2} + c_{44} \frac{\partial^2 w_0^{(4)}}{\partial \eta^2} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 v_0^{(4)}}{\partial \eta \partial z} = 0 \quad (3.10)$$

四、数值分析

对于外部解零级近似的数学模型(3.5)~(3.7)我们可以适当改写一下, 将其写成:

$$c_{55} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial x} \right) + c_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.5)'$$

$$c_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial y} \right) + c_{23} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.6)'$$

$$c_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.7)'$$

若假定在内部区域——边界层之外的区域层合板的变形满足克希霍夫假定, 即假定

$$\frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial y} = 0$$

则方程(3.5)~(3.7)可恒被满足, 这就是说, 薄板弯曲的克希霍夫假定是外部解零级近似的特例, 因此, 若我们承认在内部区域受弯层合板满足克希霍夫假定, 那么我们就可以用常规分析方法求其外部解 $u_0^{(0)}$, $v_0^{(0)}$ 和 $w_0^{(0)}$ 。本文的重点在于讨论边缘效应, 下面转向求内部解。

将以应力表示的边界条件化成以位移来表示, 若边界条件对于内部解也仅取零级, 则取如下形式:

z 方向:

$$c_{23} \alpha \frac{\partial v_0^{(4)}}{\partial \eta} + c_{33} \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\alpha \frac{\partial v_0^{(4)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

x 方向:

$$u_0^{(4)} = 0, \quad v_0^{(4)} = 0, \quad w_0^{(4)} = 0 \quad (4.4)$$

y 方向:

$$\alpha c_{22} \frac{\partial v_0^{(4)}}{\partial \eta} + c_{23} \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

$$\alpha \frac{\partial v_0^{(4)}}{\partial z} + \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.7)$$

补充边界条件为:

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} u_0^{(4)} = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} v_0^{(4)} = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} w_0^{(4)} = 0 \quad (4.8)$$

下面着手求微分方程(3.8)~(3.10)在边界条件(4.1)~(4.8)下的解。

从内部解方程的结构看,显然求解 $u_0^{(4)}$ 可以与 $v_0^{(4)}$, $w_0^{(4)}$ 分开,因为不但控制方程而且边界条件也不耦合,求解 $u_0^{(4)}$ 的控制方程和边界条件较为简单,因此我们着重讨论关于 $v_0^{(4)}$ 和 $w_0^{(4)}$ 的求解。为此引进所谓“广义应力函数” F ,即令

$$w_0^{(4)} = -(c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial z} \quad (4.9)$$

$$v_0^{(4)} = \left(c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) F \quad (4.10)$$

则 F 满足下列控制微分方程:

$$L(F) = 0 \quad (4.11)$$

这里微分算子定义为

$$L = \left\{ c_{33} c_{44} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + c_{22} c_{44} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + [c_{22} c_{23} + c_{44}^2 - (c_{23} + c_{44})^2] \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial z^2} \right\}$$

当相应于 $v_0^{(4)}$ 和 $w_0^{(4)}$ 的边界条件转化为 F 的定解条件后,求内部解 $v_0^{(4)}$ 和 $w_0^{(4)}$ 的问题就转化为求“广义应力函数” F 。为求常系数线性偏微分算子 L 所确定的微分方程(4.11)在相应边界条件下的解,我们首先定义 L 的伴随算子 L^* 和双线性形式 $L'[\cdot, \cdot]$ 为:

$$\int_{\Omega} u L(v) d\theta = \int_{\Omega} v L^*(u) d\theta + \int_{\Gamma} L'[u, v] d\Gamma \quad (4.12)$$

假定 L 的伴随算子 L^* 的基本解为 E^* ,则^[7]

$$C_\theta F(P) = - \int_{\Gamma} L'[E^*, F] d\Gamma \quad (4.13)$$

这里

$$C_\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} d\Gamma \quad (4.14)$$

ω_{n-1} 是 $n-1$ 维单位球面积。若设 G 是球心在 P 点半径为 ε 的小球与 Q 的交,则 Γ_{ε} 是 G 的边界。

Malgrange曾证明, R^n 上的常系数线性偏微分算子 $L^*(D)$ 有基本解 $E^* \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$,即

$$L^*(D)E^* = \delta \quad (4.15)$$

并且^[8]

$$E^*(P) = (2\pi)^{-n} \int \exp[iP\xi] \frac{d\xi}{L^*(\xi)} \quad (4.16)$$

$\mathcal{D}'(R^{n+1})$ 是 R^n 上的 $n+1$ 阶广义函数空间。

于是, (4.13) 就是求“广义应力函数” F 的边界积分方程式。利用边界单元离散就可求其数值解。有了 F 的数值则可以求出内部解 $v^{(4)}$ 和 $w^{(4)}$, 然后和 $u^{(4)}$ 一起就可以讨论自由边的边缘效应问题。

参 考 文 献

- [1] Pipes, R. B. and N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension, *J. Comp. Materials*, 4 (1970).
- [2] Wang, A. S. D. and F. W. Crossman, Some new results on edge effects in symmetric composite laminates, *J. Comp. Materials*, 11 (1977).
- [3] Pichas, R. Y. and T. H. H. Pian, Calculation of interlaminar stress concentration in composite laminates, *J. Comp. Materials*, 15 (1981).
- [4] Luo, Zu-dao, On the nature of interlaminar edge stress in laminated composite structures, *Proceedings of International Symposium on Composite Materials and Structures*, Beijing, China, June (1986), 10—13.
- [5] 叶碧泉、周焕文, 层状复合材料结构边缘效应数值分析, *应用数学和力学*, 9, 5 (1983年), 403—410.
- [6] 周焕文, 奇扰动在圆板大挠度问题中的应用, 《奇异扰动理论及其在力学中的应用》(钱伟长主编), 科学出版社 (1981年).
- [7] 彭晓林、何广乾, 广义函数法边界积分方程的建立, *应用数学和力学*, 7, 6 (1986年), 497—504.
- [8] 齐民友编著, 《线性偏微分算子引论》, 科学出版社 (1986年).

Numerical-Perturbation Analysis of Edge Effect in Bending Laminated Plate

Ye Bi-quan Chou Huan-wen

(Wuhan University, Wuhan)

Abstract

In this paper, we consider a bending laminated plate. At first, the dimensionless variables are used to transform the equilibrium equations of any layer to perturbation differential equations. Secondly, the composite expansion is used and the solution domain is divided into interior and boundary layer regions and the mathematical models for the outer solution and the inner solution are yielded respectively. Then the inner solution is expressed with the boundary integral equation.