应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

对于正交异性材料屈服与流动的探讨*

袁祖培　郑　耀

（哈尔滨工业大学）　（浙江大学土木系）

摘　要

假定正交异性材料的屈服准则与各向同性材料的Huber-Mises准则同构，提出了无量纲应力屈服准则，进而推导了与之相关的塑性流动规则．用不同的简单应力状态下的应力-应变试验曲线，可以得到不同的广义等效应力-应变关系．

一、引　言

对于正交异性材料塑性行为的理论分析似乎始于Hill，他于1948年提出了一个屈服准则及与之相关的流动法则[1][2]

$$2f(\sigma_{ij})=F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2$$

$$+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2=1 \tag{1.1}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.2}$$

式中材料常数

$$\left.\begin{aligned}
2F&=\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{X^2}, \quad 2L=\frac{1}{R^2}\\
2G&=\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{X^2}-\frac{1}{Y^2}, \quad 2M=\frac{1}{S^2}\\
2H&=\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{Z^2}, \quad 2N=\frac{1}{T^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

这里在材料主轴坐标系$(x,\ y,\ z)$中$X,\ Y,\ Z$为单轴拉伸或压缩屈服应力，$R,\ S,\ T$为对应坐标平面$(y,\ z)$，$(z,\ x)$，$(x,\ y)$的纯剪切屈服应力．

Hill在推导过程中采用了屈服准则与应力球张量无关的假定．这也许是理论上的瑕疵，因为在应力球张量作用下，正交异性材料还会产生形变，如果形变能是材料屈服的物理因素这一假设能被人们接受的话．尽管如此，由于Hill屈服准则在形式上整齐、简洁，因而获得了广泛的应用．

正交异性材料的屈服准则主要有同源的两派．同一个根源就是以形变能作为物理因素假

* 汤任基推荐．1989年2月27日收到．

设的Huber-Mises屈服准则。一派是上面提到的Hill屈服准则。Huber-Mises屈服准则为应力分量的二次非齐次式，对于更一般的情况，Mises采用应力分量的二次齐次式。Hill接过Mises的二次齐次式，并且作了一些限制，提出了一个著名的屈服准则。另一派是Olszak与Urbanowski广义的畸形能准则[3]。后者由于表达式异常繁琐，不便应用，因而几乎湮没无闻。

谁想既要舍弃Hill屈服准则理论上的瑕疵，又要回避Olszak与Urbanowski屈服准则表达式的繁琐，出路何在？若将以上两准则进行修补，也恐难成美，我们只好回到Hill，Olszak，Urbanowski等人的出发地。

二、无量纲应力屈服准则

为了窥探出一点端睨，我们且将各向同性材料的Huber-Mises屈服准则无量纲化

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)^2+(\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)^2+(\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x)^2+6(\tilde{\tau}_{xy}^2+\tilde{\tau}_{yz}^2+\tilde{\tau}_{zx}^2)}=1 \tag{2.1}$$

式中无量纲应力$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}/\sigma_S$，这里$\sigma_S$为单轴拉伸或压缩屈服应力。

我们作这样的设想：正交异性材料的屈服准则与(2.1)式同构，且当正交异性材料退化为各向同性材料时，正交异性材料的屈服准则能退化为(2.1)式。

正交异性材料的屈服准则如果限于四阶张量的范畴，在材料主轴坐标系(x, y, z)中应是

$$A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=\text{常量} \tag{2.2}$$

由于应力张量为二阶的对称张量，所以系数A_{ijkl}为四阶的对称张量。为了简洁起见，暂且采用简记符号：$\sigma_1=\sigma_{xx}$，$\sigma_2=\sigma_{yy}$，$\sigma_3=\sigma_{zz}$，$\sigma_4=\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\sigma_5=\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\sigma_6=\tau_{zx}=\tau_{xz}$。将(2.2)式展开，同类项合并之后即为Mises二次齐次式

$$\begin{aligned}&B_{11}\sigma_1^2+B_{12}\sigma_1\sigma_2+B_{13}\sigma_1\sigma_3+B_{14}\sigma_1\sigma_4+B_{15}\sigma_1\sigma_5+B_{16}\sigma_1\sigma_6\\&+B_{22}\sigma_2^2+B_{23}\sigma_2\sigma_3+B_{24}\sigma_2\sigma_4+B_{25}\sigma_2\sigma_5+B_{26}\sigma_2\sigma_6\\&+B_{33}\sigma_3^2+B_{34}\sigma_3\sigma_4+B_{35}\sigma_3\sigma_5+B_{36}\sigma_3\sigma_6+B_{44}\sigma_4^2\\&+B_{45}\sigma_4\sigma_5+B_{46}\sigma_4\sigma_6+B_{55}\sigma_5^2+B_{56}\sigma_5\sigma_6+B_{66}\sigma_6^2=\text{常量}\end{aligned} \tag{2.3}$$

虑及任一剪应力分量改变方向即改变正负号不影响屈服，故要求$B_{14}=B_{15}=B_{16}=B_{24}=B_{25}=B_{26}=B_{34}=B_{35}=B_{36}=B_{45}=B_{46}=B_{56}=0$，于是(2.3)式变为

$$\begin{aligned}&B_{11}\sigma_x^2+B_{22}\sigma_y^2+B_{33}\sigma_z^2+B_{12}\sigma_x\sigma_y+B_{23}\sigma_y\sigma_z+B_{13}\sigma_x\sigma_z\\&+B_{44}\tau_{xy}^2+B_{55}\tau_{yz}^2+B_{66}\tau_{zx}^2=\text{常量}\end{aligned} \tag{2.4}$$

出于正交异性材料的屈服准则与各向同性材料的Huber-Mises准则(2.1)同构的想象，选取系数

$$\left.\begin{aligned}&B_{11}=\frac{1}{\Sigma_x^2},\quad B_{22}=\frac{1}{\Sigma_y^2},\quad B_{33}=\frac{1}{\Sigma_z^2}\\&B_{12}=-\frac{1}{\Sigma_x\Sigma_y},\quad B_{23}=-\frac{1}{\Sigma_y\Sigma_z},\quad B_{13}=-\frac{1}{\Sigma_x\Sigma_z}\\&B_{44}=\frac{1}{T_{xy}^2},\quad B_{55}=\frac{1}{T_{yz}^2},\quad B_{66}=\frac{1}{T_{zx}^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式中Σ_x，Σ_y，Σ_z分别为正交异性材料主轴x，y，z方向单轴拉伸或压缩屈服应力，T_{xy}，

T_{yz}，T_{zx}分别为对应于坐标平面$(x,\ y)$，$(y,\ z)$，$(z,\ x)$的纯剪屈服应力。

于是(2.4)式变为

$$\frac{1}{2}[(\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)^2+(\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2]$$
$$+\tilde{\tau}_{xy}^2+\tilde{\tau}_{yz}^2+\tilde{\tau}_{zx}=1 \qquad (2.6)$$

式中 无量纲应力$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}/\Sigma_{ij}$，这里$\Sigma_{ij}$为正交异性材料主轴坐标系中的屈服应力。

由于(2.6)式中的各个应力张量的分量不能同时更换为应力偏张量的分量，因而本文中提出的屈服准则不是与应力球张量无关的。若仅有应力球张量作用，此时$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\sigma_m$，屈服时

$$\sigma_m=\pm\frac{\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z}{\sqrt{\Sigma_z^2(\Sigma_x-\Sigma_y)^2+\Sigma_x^2(\Sigma_y-\Sigma_z)^2+\Sigma_y^2(\Sigma_z-\Sigma_x)^2}} \qquad (2.7)$$

三、相关的本构方程

根据屈服准则(2.6)可定义等效应力

$$\bar{\sigma}=\frac{K}{\sqrt{2}}\sqrt{(\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)^2+(\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)^2+(\tilde{\sigma}_z-\sigma_x)^2+2(\tilde{\tau}_{xy}^2+\tilde{\tau}_{yz}^2+\tilde{\tau}_{zx}^2)} \qquad (3.1)$$

式中应力量纲的常数K待定（将在下节中讨论等效应力与等效应变关系时再选定）。

将屈服函数作为塑性势

$$f(\sigma_{ij})=\frac{K^2}{2}[(\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)^2+(\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)^2+(\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x)^2+2(\tilde{\tau}_{xy}^2+\tilde{\tau}_{yz}^2+\tilde{\tau}_{zx}^2)] \qquad (3.2)$$

则相关的塑性流动规则为

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$$

即

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_x^p&=d\lambda\frac{K^2}{\Sigma_x}(2\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z), & \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^p&=d\lambda\frac{K^2}{T_{xy}}\tilde{\tau}_{xy}\\
d\varepsilon_y^p&=d\lambda\frac{K^2}{\Sigma_y}(2\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x), & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^p&=d\lambda\frac{K^2}{T_{yz}}\tilde{\tau}_{yz}\\
d\varepsilon_z^p&=d\lambda\frac{K^2}{\Sigma_z}(2\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y), & \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^p&=d\lambda\frac{K^2}{T_{zx}}\tilde{\tau}_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

式中$d\lambda$为正的参数。为了确定它的表达式，将上式改写成如下形式

$$\frac{\Sigma_x d\varepsilon_x^p}{K^2(2\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)}=\frac{\Sigma_y d\varepsilon_y^p}{K^2(2\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x)}=\frac{\Sigma_z d\varepsilon_z^p}{K^2(2\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}T_{xy}d\gamma_{xy}^p}{K^2\tilde{\tau}_{xy}}=\frac{\frac{1}{2}T_{yz}d\gamma_{yz}^p}{K^2\tilde{\tau}_{yz}}=\frac{\frac{1}{2}T_{zx}d\gamma_{zx}^p}{K^2\tilde{\tau}_{zx}}=d\lambda$$

前三项互作差比

$$\frac{\Sigma_x d\varepsilon_x^p-\Sigma_y d\varepsilon_y^p}{3K^2(\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y)}=\frac{\Sigma_y d\varepsilon_y^p-\Sigma_z d\varepsilon_z^p}{3K^2(\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z)}=\frac{\Sigma_z d\varepsilon_z^p-\Sigma_x d\varepsilon_x^p}{3K^2(\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x)}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}T_{xy}d\gamma^p_{xy}}{3K^2\tilde{\tau}_{xy}}=\frac{\frac{3}{2}T_{yz}d\gamma^p_{yz}}{3K^2\tilde{\tau}_{yz}}=\frac{\frac{3}{2}T_{zx}d\gamma^p_{zx}}{3K^2\tilde{\tau}_{zx}}$$

由此解出无量纲正应力分量的差值和剪应力分量，并代入等效应力定义式(3.1)，得到

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{3\sqrt{2}Kd\lambda}\left\{(\Sigma_x d\varepsilon^p_x-\Sigma_y d\varepsilon^p_y)^2+(\Sigma_y d\varepsilon^p_y-\Sigma_z d\varepsilon^p_z)^2\right.$$

$$\left.+(\Sigma_z d\varepsilon^p_z-\Sigma_x d\varepsilon^p_x)^2+\frac{9}{2}[(d\gamma^p_{xy})^2+(d\gamma^p_{yz})^2+(d\gamma^p_{zx})^2]\right\}^{1/2}\tag{3.4}$$

因而定义等效塑性应变增量

$$\overline{d\varepsilon^p}=\frac{\sqrt{2}}{3K}\left\{(\Sigma_x d\varepsilon^p_x-\Sigma_y d\varepsilon^p_y)^2+(\Sigma_y d\varepsilon^p_y-\Sigma_z d\varepsilon^p_z)^2\right.$$

$$\left.+(\Sigma_z d\varepsilon^p_z-\Sigma_x d\varepsilon^p_x)^2+\frac{9}{2}[(d\gamma^p_{xy})^2+(d\gamma^p_{yz})^2+(d\gamma^p_{zx})^2\right\}^{1/2}\tag{3.5}$$

于是

$$d\lambda=\frac{\overline{d\varepsilon^p}}{2\bar{\sigma}}\tag{3.6}$$

如此定义等效应力与等效塑性应变增量之后，按塑性微功的定义可得

$$dW^p=\sigma_{ij}d\varepsilon^p_{ij}=\bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon^p}$$

在等比加载条件下，积分(3.3)式之后，得到全量关系

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon^p_x&=\lambda\frac{K^2}{\Sigma_x}(2\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z) & \frac{1}{2}\gamma^p_{xy}&=\lambda\frac{K^2}{T_{xy}}\tilde{\tau}_{xy}\\
\varepsilon^p_y&=\lambda\frac{K^2}{\Sigma_y}(2\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x) & \frac{1}{2}\gamma^p_{yz}&=\lambda\frac{K^2}{T_{yz}}\tilde{\tau}_{yz}\\
\varepsilon^p_z&=\lambda\frac{K^2}{\Sigma_z}(2\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y) & \frac{1}{2}\gamma^p_{zx}&=\lambda\frac{K^2}{T_{zx}}\tilde{\tau}_{zx}
\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

式中

$$\lambda=\frac{\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}}\tag{3.8}$$

等效塑性应变为

$$\int\overline{d\varepsilon^p}=\bar{\varepsilon}^p=\frac{\sqrt{2}}{3K}\left\{(\Sigma_x\varepsilon^p_x-\Sigma_y\varepsilon^p_y)^2+(\Sigma_y\varepsilon^p_y-\Sigma_z\varepsilon^p_z)^2\right.$$

$$\left.+(\Sigma_z\varepsilon^p_z-\Sigma_x\varepsilon^p_x)^2+\frac{9}{2}[(\gamma^p_{xy})^2+(\gamma^p_{yz})^2+(\gamma^p_{zx})^2]\right\}^{1/2}\tag{3.9}$$

于是塑性功为

$$W^p=\sigma_{ij}\varepsilon^p_{ij}=\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}^p$$

对于正交异性的理想刚塑性材料，本构方程为增量关系(3.3)式或全量关系(3.7)式。在塑性体积不可压缩条件下，由于(3.3)式或(3.7)式中前三式不独立，所以还应有一个物理方程。进入塑性状态后，等效应力为常量，这与屈服准则等价，因而屈服准则(2.6)式也是物理方程之一。

四、正交异性的强化材料

对于强化材料，屈服准则仅用于判断材料在一点应力作用下处于弹性状态还是塑性状态，已不再是物理方程之一．因而需要建立等效应力与等效塑性应变增量的积分间的函数关系．

对于各向同性材料，若采用等向强化模型，使本构方程简单，便于应用．对于正交异性材料，由于异性主轴方向正应力的屈服应力不相等，异性主轴平面上剪应力的屈服应力也不相等，因而等向强化这一概念对各向异性材料已不适用，我们不妨采用相似强化（或等比强化）这一概念，即

$$\sigma_{ij}=\beta\Sigma_{ij} \tag{4.1}$$

式中　β为大于1的强化参数．此时在六维的应力空间加载曲面(超曲面)作相似的扩张．在相似强化模型下，假定

$$\bar{\sigma}=\psi\left(\int\overline{d\varepsilon^p}\right) \tag{4.2}$$

此函数图象见示意图1．

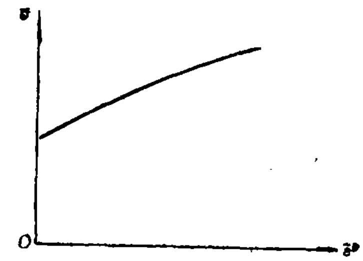

图　1

函数ψ可由简单应力状态（单轴拉伸或纯剪切）实验确定．简单应力状态下加载是等比加载的特例，因而

$$\int\overline{d\varepsilon^p}=\overline{\varepsilon^p}.$$

若曲线$\bar{\sigma}$-$\int\overline{d\varepsilon^p}$用$\sigma_x$-$\varepsilon_x^p$确定，则等效应力(3.1)式及等效塑性应变增量(3.5)式中的K应等于Σ_x；若用σ_y-ε_y^p确定，则K应等于Σ_y；若用σ_z-ε_z^p确定，则K应等于Σ_z；此外还可用τ_{xy}-γ_{xy}^p，τ_{yz}-γ_{yz}^p，τ_{zx}-γ_{zx}^p曲线确定，对应地K也有不同的数值．

对于各向同性材料$\bar{\sigma}$-$\int\overline{d\varepsilon^p}$曲线唯一，而对于正交异性材料，$\bar{\sigma}$-$\int\overline{d\varepsilon^p}$曲线不唯一，依赖于人们的选择，但它们描述同一个塑性变形规律．

虑及$d\bar{\sigma}=\psi'\cdot\overline{d\varepsilon^p}=\psi'\overline{d\varepsilon^p}$，则(3.6)式变为

$$d\lambda=\frac{d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}\psi'} \tag{4.3}$$

(3.3)式变为

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_x^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2\Sigma_x\bar{\sigma}\psi'}(2\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z), & \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2T_{xy}\bar{\sigma}\psi'}\tilde{\tau}_{xy}\\
d\varepsilon_y^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2\Sigma_y\bar{\sigma}\psi'}(2\tilde{\sigma}_y-\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x), & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2T_{yz}\bar{\sigma}\psi'}\tilde{\tau}_{yz}\\
d\varepsilon_z^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2\Sigma_z\bar{\sigma}\psi'}(2\tilde{\sigma}_z-\tilde{\sigma}_x-\tilde{\sigma}_y), & \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^p&=\frac{K^2d\bar{\sigma}}{2T_{zx}\bar{\sigma}\psi'}\tilde{\tau}_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

上式连同(4.2)式就是相似强化模型下的本构方程．

五、结 论

1. 本文中提出的屈服准则与Huber-Mises屈服准则同构，与应力球张量有关；

2. 相似强化材料的等效应力-等效塑性应变曲线不唯一，依赖于人们的选择，但它们描述同一个塑性变形规律；

3. 当正交异性材料退化为各向同性材料时，屈服准则(2.6)退化为Huber-Mises屈服准则，相关的本构方程(3.3)退化为Prandtl-Reuss方程，本构方程(3.7)退化为Hencky方程。

参 考 文 献

[1] Hill, R., A theory of the yielding and flow of anisotropic metals, *Proc. Roy. Soc.* (London), **Ser. A 193**, A1033 (1948), 281—297.

[2] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London (1950), 317-321; 中译本《塑性数学理论》，王仁等译，科学出版社 (1966).

[3] Olszak, W. and W. Urbanowski, The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies, *Arch. Mech. Stos.*, **8**, 4 (1956), 671—694.

[4] Hu, L. W., Studies on plastic flow of anisotropic metals, *J. Appl. Mech.* (ASME), **23** (1956), 444—450.

A Study on Yield and Flow of Orthotropic Materials

Yuan Zu-pei

(*Dept. of Engrg. Mechanics, Haerbin Institute of Technology, Haerbin*)

Zheng Yao

(*Dept. of Civil Engrg., Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

On the assumption that the yield criterion of orthotropic materials is isomorphic with Huber-Mises Criterion of isotropic materials, we put forward a dimensionless stress yield criterion, and obtained the associated plastic flow law. Using experimental stress-strain curves in various simple stress states, generalized effective stress-strain formulae may be derived correspondingly in various forms.