应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

利用特征积分法求解二维波动反问题的速度参数*

金咸熙

(浙江工学院，1988年3月1日收到)

摘　要

对于从地震波勘探中引出的一类二维波动反问题，本文应用特征法，首次给出一个新的求解速度参数的算法，并用理论模型试算，得到较满意的结果。

一、引　言

在石油勘探开发中，为了得到较大的经济效益，引出一类非常重要的来自地震波勘探中的反问题，即是由人工地震波观测资料反演地下介质的各种物性参数，然后通过这些物性参数可以了解地下地质情况，由于速度参数对于了解地下介质有决定性的作用，因此反演速度更较重要。对于该反问题的研究，人们在理论上和算法上都已作过不少探讨[1]，用特征积分法研究一维波动反问题已取得一些成果[2]，它的优点在于不必假设入射波为脉冲，可以是任意子波，与实际情况较吻合，同时计算效率比较高，但也有一些缺点，即当实际的资料存在一定的干扰时，其计算效果欠佳[1]。本文在[3]的基础上，把特征积分法推广应用到二维波动反问题，采用差分离散，把它化为二个一维波动反问题的耦合形式，首次给出一种求取二维速度参数的算法，并对该算法进行了理论模型的数值试验。

二、问题的提出

利用人工地震波进行勘探，非零井源距的VSP物理模型如下图1所示：

假设在地表面上X处放置震源，同时在地表上一测线及在测井中布置接收仪进行检测。按照弹性波动力学的原理，在一定近似条件的假设下，并假定地表上及井中布置接收仪处的应力为零，以及地表放炮处下面的地质介质具有对称性，则我们可以用下述的波动方程来描述。即：

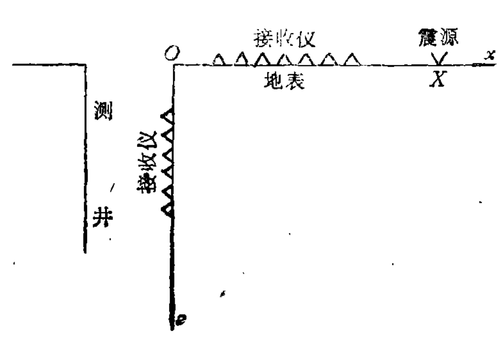

图 1

* 何福保推荐。

$$\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial t^2}=a^2(x,z)\left(\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial z^2}\right)$$

初始条件：

$$\begin{cases}u(x,z,0)=0\\ u_t(x,z,0)=0\end{cases}$$

边界条件：

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x,0,t)}=f(t)\cdot\delta(X)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,z,t)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(X,z,t)}=0\end{cases}\qquad (\mathrm{I})$$

其中 $0\leqslant x\leqslant X$，$0\leqslant z\leqslant Z$，

$a(x,z)$为给定的速度参数，

$f(t)$为人工震源的子波。

上述问题(Ⅰ)，我们称为波动正演问题，通过给出速度模型$a(x,z)$，从而由上述方程，以及给定的初边值条件，模拟出地震波资料$u(x,z,t)$。

现在，我们将由地震波观测资料反演地下介质速度参数的问题描述如下：

$$\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial t^2}=a^2(x,z)\left(\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,z,t)}{\partial z^2}\right)$$

初始条件：

$$\begin{cases}u(x,z,0)=0\\ u_t(x,z,0)=0\end{cases}$$

边界条件：

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x,0,t)}=f(t)\cdot\delta(X)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,z,t)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(X,z,t)}=0\end{cases}\qquad (\mathrm{II})$$

附助条件：

$$\begin{cases}u(x,0,t)=g(x,t)\\ u(0,z,t)=h(z,t)\end{cases}$$

其中 $0\leqslant x\leqslant X$，$0\leqslant z\leqslant Z$，

$f(t)$为人工震源的子波，

$g(x,t)$及$h(z,t)$分别为地表及井中观测到的局部波场资料，

$a(x,z)$在这里为待求的速度参数。

上述问题(Ⅱ)，称为波动反演问题，我们根据上述方程，给定的初边值条件，以及观测得到的局部地震波资料作为附助条件，一起来求解地下介质的速度参数$a(x,z)$。

三、求解问题(Ⅱ)速度参数的特征方法

首先我们设

$$u_0=\frac{\partial u}{\partial t},\quad u_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial z}$$

则可以把上述问题(Ⅰ)等价地写成如下的形式，即：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_0}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0\\[2ex]\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial u_0}{\partial z}=0\end{array}\right\}\ (3.1)\\[2ex]\text{初始条件：}\\ \quad u_0\Big|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\\[2ex]\text{边界条件：}\\ \quad u_1|_{x=0}=u_1|_{x=X}=0\\ \quad u_2|_{z=0}=f'(t)\cdot\delta(X)\\[1ex]\text{附助条件：}\\ \quad u_0\Big|_{z=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{z=0}=g_1'(x,t)\\[2ex] \quad u_0\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}=h_1'(z,t)\end{array}\right\}\qquad (\mathrm{I})'$$

特别我们把上述问题(Ⅰ)′中的(3.1)式，写成矩阵形式，则有

$$A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}=0 \qquad (3.1)'$$

其中

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-a^2&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&-a^2\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

下面我们用特征法求解上述问题，(Ⅰ)′，首先求矩阵T，使得作用于(3.1)′式中的A，B，C之后：

$$A^*=TA,\quad B^*=TB,\quad C^*=TC$$

满足以下等式：

$$QA^*+RB^*+SC^*=0$$

其中Q,R,S分别都为对角阵：

$$Q=qI,\quad R=rI,\quad S=sI$$

这里I为单位阵，q,r,s分别为方程(3.1)′式的三个特征方向的方向余弦，所以它们还满足以

下方程式：

$$q^2+r^2+s^2=1 \tag{3.2}$$

为求得T的非零解，令：

$$\det(QA+RB+SC)=0$$

即：

$$\det\begin{bmatrix} q & -ra^2 & -sa^2 \\ -r & q & 0 \\ -s & 0 & q \end{bmatrix}=0$$

由此可得：

$$q(q^2-r^2a^2-s^2a^2)=0 \tag{3.3}$$

由(3.2)，(3.3)两式，可求得关于$\{q,r,s\}$的一个解族：

$$\left\{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2}}\right\} \tag{3.4}$$

其中： $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。

从上面(3.4)式可以知道，当任意取定三个不同的θ值时，就可求得一个T矩阵，但θ的取值可以为无穷多个，因此求T矩阵为一个多解问题。现在对于问题(Ⅱ)′，为了确定一个有效的T矩阵，我们进行如下的选择：

（1） 当$\theta=0$时：

$$\{q,r,s\}=\left\{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ 0\right\}$$

可得： $(t_{11},t_{12},t_{13})=(1,a,0)$

（2） 当$\theta=\pi$时：

$$\{q,r,s\}=\left\{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}},\ 0\right\}$$

可得： $(t_{21},t_{22},t_{23})=(1,-a,0)$

（3） 当$\theta=\pi/2$时：

$$\{q,r,s\}=\left\{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right\}$$

可得： $(t_{31},t_{32},t_{33})=(1,0,a)$

（4） 当$\theta=3\pi/2$时：

$$\{q,r,s\}=\left\{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\right\}$$

可得： $(t_{41},t_{42},t_{43})=(1,0,-a)$

如上所述，选择矩阵T为：

$$T=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

通过上述T，我们可以将一个二维波动反问题速度参数的求解，化为二个耦合的一维波动反问题方程组的求解，其过程如下：

先把T作用到(3.1)′式，并展开可得：

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & -a^2 & 0 \\ a & -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & -a^2 \\ -a & 0 & -a^2 \\ a & 0 & -a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \end{pmatrix}=0 \tag{3.6}$$

然后整理上式，可得：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(u_0+au_1)-a\frac{\partial}{\partial x}(u_0+au_1)=-a\frac{\partial a}{\partial x}u_1+a^2\frac{\partial u_2}{\partial z} \\ &\frac{\partial}{\partial t}(u_0-au_1)+a\frac{\partial}{\partial x}(u_0-au_1)=-a\frac{\partial a}{\partial x}u_1+a^2\frac{\partial u_2}{\partial z} \\ &\frac{\partial}{\partial t}(u_0+au_2)-a\frac{\partial}{\partial z}(u_0+au_2)=-a\frac{\partial a}{\partial z}u_2+a^2\frac{\partial u_1}{\partial x} \\ &\frac{\partial}{\partial t}(u_0-au_2)+a\frac{\partial}{\partial z}(u_0-au_2)=-a\frac{\partial a}{\partial z}u_2+a^2\frac{\partial u_1}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

从上面(3.7)式，我们可以看到，对于方程组中的前二式和后二式，若分别去掉右端的最后一项，则它们就成为用特征法求解一维反问题所得到的形式[3]。

现在，对于取定的z，我们沿特征线$dx/dt=-a$，将(3.7)式中的第一个方程式化为：

$$\frac{d}{dx}(u_0+au_1)=\frac{\partial a}{\partial x}u_1-a\frac{\partial u_2}{\partial z} \tag{3.8}$$

沿特征线$dx/dt=a$，将(3.7)式中的第二个方程式化为：

$$\frac{d}{dx}(u_0-au_1)=-\frac{\partial a}{\partial x}u_1+a\frac{\partial u_2}{\partial z} \tag{3.9}$$

类似地，对于取定的x，我们沿着特征线$dz/dt=-a$，以及$dz/dt=a$可以将(3.7)式中第三，第四个方程式分别化为：

$$\frac{d}{dz}(u_0+au_2)=\frac{\partial a}{\partial z}u_2-a\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dz}(u_0-au_2)=-\frac{\partial a}{\partial z}u_2+a\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{3.11}$$

现在我们应用特征法，就把求解问题(Ⅰ)化为求解由(3.8)，(3.9)，(3.10)，(3.11)四式所组成的方程组，连同初边值和附助条件一起所成的问题。

四、数 值 算 法

建立如图2所示的差分网格。

当取定$z=z_0$时，我们沿特征线$dx/dt=-a$，从点$(i,j+2)$到$(i+1,j+1)$积分(3.8)式，以及沿特征线$dx/dt=a$，从点(i,j)到$(i+1,j+1)$积分(3.9)式，可得：

$$u_0(i+1,\ z_0,\ j+1)=\frac{1}{2}[u_0(i,z_0,j)+u_0(i,z_0,j+2)]+\frac{1}{4}[a(i,z_0)+a(i+1,z_0)][u_1(i,z_0,j+2)-u_1(i,z_0,j)]+R_{z0}(i+1) \tag{4.1}$$

$$u_1(i+1,z_0,j+1)=\frac{1}{a(i+1,z_0)+a(i,z_0)}\cdot[u_0(i,z_0,j+2)-u_0(i,z_0,j)]+\frac{1}{2}[u_1(i,z_0,j+2)+u_1(i,z_0,j)]+R_{z0}(i+1) \tag{4.2}$$

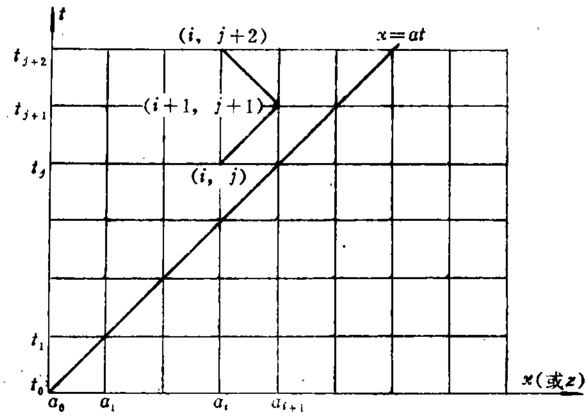

图 2

由于$u_0(i,z_0,i)=u_1(i,z_0,i)=0$，即在特征线$x=at$上，上行波场为零。因此由(3.8)式可得：

$$a(i+1,z_0)=\frac{1}{u_1(i,z_0,i+2)}[2u_0(i,z_0,i+2)+a(i,z_0)u_1(i,z_0,i+2)]+R_{z0}(i+1) \tag{4.3}$$

其中 $R_{z0}(i+1)=a(i+1,z)\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=z0}$.

又当取定$x=x_0$时，我们沿特征线$dz/dt=-a$，从点$(i,j+2)$到$(i+1,j+1)$积分(3.10)式，以及沿特征线$dz/dt=a$，从点(i,j)到$(i+1,j+1)$积分(3.11)式，可得：

$$u_0(x_0,\ i+1,\ j+1)=\frac{1}{2}[u_0(x_0,i,j)+u_0(x_0,i,j+2)]+\frac{1}{4}[a(x_0,i)+a(x_0,i+1)][u_2(x_0,i,j+2)-u_2(x_0,i,j)]+R_{x0}(i+1) \tag{4.4}$$

$$u_2(x_0,\ i+1,\ j+1)=\frac{1}{a(x_0,i+1)+a(x_0,i)}[u_0(x_0,i,j+2)-u_0(x_0,i,j)]+\frac{1}{2}[u_2(x_0,i,j+2)+u_2(x_0,i,j)]+R_{x0}(i+1) \tag{4.5}$$

由于$u_0(x_0,i,i)=u_2(x_0,i,i)=0$，即在特征线$z=at$上，上行波场为零，因此由(3.10)式可得：

$$a(x_0,i+1)=\frac{1}{u_2(x_0,i,i+2)}[2u_0(x_0,i,i+2)+a(x_0,i)u_2(x_0,i,i+2)]+R_{x_0}(i+1) \tag{4.6}$$

其中 $R_{x_0}(i+1)=a(x,i+1)\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_0}$.

由上面(4.1),(4.2),(4.3),(4.4),(4.5),(4.6)六式即可递归求出速度参数$a(x,z)$。

为了检验上述算法，我们首先由文献[4]，对以下图3的速度模型，产生共炮点理论模型记录，其中道间距$\Delta x=25$m，$\Delta z=25$m，时间采样间隔$\Delta t=4$ms，地震子波（震源函数）与[4]相同，为使模拟的资料少受边界条件的影响，我们在差分离散计算上述模型时，还采用了活动边界条件。

对于上述模型的模拟资料，在无噪声背景的情况下，我们采用本文所提的算法，进行速度参数的反演计算，经过几次迭代，能比较准确地得到原假定的速度模型。

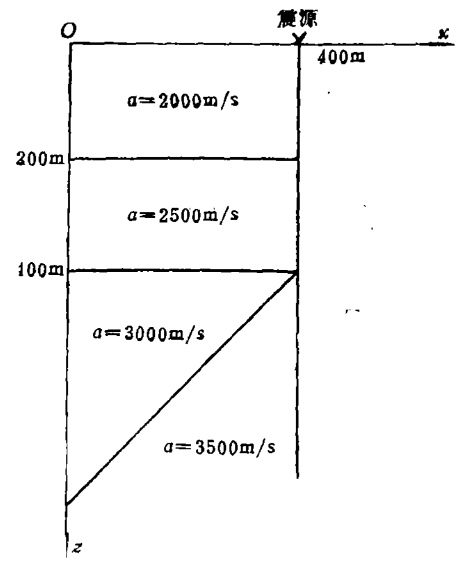

图 3

参 考 文 献

[1] 马在田，地震参数连续估计与波动方程反问题，地球物理学报，29，1 (1986)。

[2] 严昌言等，地震勘探中一维波动方程反问题，物探科技通报，4，1 (1986)，46—51。

[3] Chen Nei-mao and Kuo, John T., 1-D acoustic wave inversion with stratified medium, Project MIDAS Annual Report Ⅱ, ALAG Columbia University in the City of New York (1983).

[4] Alford R.M., et al., Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation, *Geophysics*, 39, 6 (1974).

Solving the Velocity Parameter of the 2-D Wave Inverse Problems with the Integration-Characteristic Method

Jin Xian-xi

(Zhejiang Institute of Technology, Hangzhou)

Abstract

For the 2-D wave inverse problems introduced from geophysical explorafion, in this paper, the author presents integration-characteristic method to solve the velocity parameter, and then applies it to common shotpoint model data, in noisefree case. The accuracy is quite good.