

弹性杆的动态屈曲模态*

李庆明

(太原工业大学, 1988年3月16日收到)

摘 要

本文提出了屈曲相关初缺陷的概念, 采用最优模态分析方法, 由Bernoulli-Euler梁方程出发给出了弹性杆在齐次边条件下的动态屈曲模态。由此对两端固支弹性杆的动态屈曲模态进行了讨论。

一、引 言

当弹性杆中轴力大于 Euler 临界载荷后杆发生屈曲。这个过程实际上是一个动力过程。Koning和Taub最早对这一问题作了动力分析^[1], 他们选择基本的 Euler 屈曲模态为初始缺陷, 由此得到的屈曲模态就是基本 Euler 模态。类似的工作还可见参考文献[2], [3]。

Lavrentier和Ishinsky在1949年首次提出最优模态(preferred mode)的概念^[4]。他们将初始缺陷表示成杆自由振动模态的级数形式, 并认为屈曲主导模态是初缺陷中随时间的增长发展最快的模态, 即最优模态。Housner和Tso^[5]进一步考虑了转动惯量与剪力, 结果表明它们的影响可以忽略不计。

文献[6]和[7]将初缺陷表示为正弦级数并采用最优模态方法分别得到了杆在冲击载荷作用下弹性与塑性屈曲半波长。

本文将初始缺陷分为屈曲相关初缺陷与屈曲无关初缺陷。所谓相关缺陷系指有可能被发生屈曲的系统所激发的缺陷形式, 由屈曲系统确定。由此, 我们从 Bernoulli-Euler 梁方程出发, 通过分离变量得到空间变量函数在齐次边条件下的本征值问题, 将由此得到的本征函数形式作为屈曲相关初缺陷形式。它们的组合就构成相关缺陷。然后利用最优模态法得到屈曲模态。

作为例子, 本文讨论了两端固支弹性杆的动力屈曲模态。

二、理 论 分 析

根据文献[5], 在屈曲运动分析中忽略转动惯量与剪力的影响。采用图1符号规定, Bernoulli-Euler梁方程如下

* 杨桂通推荐。山西省自然科学基金资助课题。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

式中 E 为弹性模量, ρ 为杆的密度, A 为杆截面积, P 为杆中轴力, $I = Ar^2$ 为杆截面最小惯性矩。

$$\text{令 } \bar{w} = w/r, \quad \xi = x/L, \quad \tau = t / \sqrt{\frac{\rho A}{E}},$$

$$\alpha = \frac{P}{EA}, \quad \beta = \frac{L}{r}, \quad \gamma = \frac{L}{\sqrt{A}}$$

这里 L 为杆的长度。则方程(2.1)可写为:

$$\bar{w}'''' + \alpha\beta^2 \bar{w}'' = \beta^2 \gamma^2 \ddot{\bar{w}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{式中 } \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} L, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{\rho A}{E}}$$

设

$$\bar{w} = y(\xi)T(\tau) \quad (2.3)$$

则

$$y'''' + \alpha\beta^2 y'' + \omega^2 y = 0 \quad (2.4a)$$

$$\ddot{T} - \frac{\omega^2}{\beta^2 \gamma^2} T = 0 \quad (2.4b)$$

由(2.4b)可得:

$$T = \alpha_1 \exp\left[\frac{\omega}{\beta\gamma} \tau\right] + \alpha_2 \exp\left[-\frac{\omega}{\beta\gamma} \tau\right] \quad (2.5)$$

由(2.4a)可得:

(a) 当 $\omega^2 < \alpha^2 \beta^4 / 4$ 时,

$$y = A_1 \cos K_1 \xi + A_2 \sin K_1 \xi + A_3 \cos K_2 \xi + A_4 \sin K_2 \xi \quad (2.6a)$$

式中

$$K_{1,2} = \left[\frac{\alpha\beta^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^4}{4} - \omega^2} \right]^{1/2}$$

A_1, A_2, A_3 和 A_4 为待定常系数 (以下类同)。

(b) 当 $\omega^2 = \alpha^2 \beta^4 / 4$ 时

$$y = A_1 \cos K \xi + A_2 \sin K \xi + A_3 \xi \cos K \xi + A_4 \xi \sin K \xi \quad (2.6b)$$

式中, $K = \sqrt{\alpha\beta^2 / 2}$ 。

(c) 当 $\omega^2 > \alpha^2 \beta^4 / 4$ 时

$$y = A_1 \exp[K_1 \xi] \cos K_2 \xi + A_2 \exp[K_1 \xi] \sin K_2 \xi + A_3 \exp[-K_1 \xi] \cos K_2 \xi + A_4 \exp[-K_1 \xi] \sin K_2 \xi \quad (2.6c)$$

$$\text{式中 } K_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\omega \mp \frac{\alpha\beta^2}{2} \right)}$$

$\omega^2 < 0$ 时, 由(2.5)式可知杆的运动属于振动类型; $\omega^2 = 0$ 则为静力问题。故要求 $\omega^2 > 0$ 。

定解条件可分为初始条件与边界条件。其中初始条件包括位移初条件与速度初条件, 它们是作为初始缺陷给出的。在此, 我们仅考虑速度缺陷, 对位移缺陷可作同样讨论, 得到的结

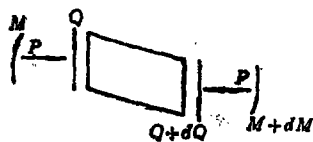


图1 梁单元及符号规定

果相近。

$$\text{故 } w|_{\tau=0} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\dot{w}|_{\tau=0} = \dot{w}_0 \quad (2.7b)$$

对于边界条件本文仅考虑如下的齐次边条件

$$G(w)|_{\xi=0,1} = 0 \quad (2.8)$$

G 为线性微分算子。

由式(2.6a~c)及(2.8)可以得到一系列的本征值与相应的本征函数。它们的组合构成了理想直杆可能发生的运动形式。事实上屈曲模态是由杆的几何形状、支承条件及载荷条件共同确定的。初始缺陷的给出仅仅是为了满足动力分析的要求,对此不可能进行准确的描述。因此,我们认为初始缺陷应分为屈曲相关缺陷和屈曲无关缺陷。前者是有可能被发生屈曲的系统所激发出的缺陷。根据以上分析,初缺陷中与本征函数有关的部份应作为屈曲相关缺陷。

故(2.7b)中, $\dot{w}_0 = \dot{w}_1 + \sum_{i=1}^N B_i x_i(\xi)$, 这里 \dot{w}_1 是屈曲无关缺陷, 在屈曲分析中可以不予考虑。 $x_i(\xi)$ 为对应于本征值 ω_i 的本征函数。这里假定 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, B_i 为常系数。这样(2.7a~b)可写为:

$$w|_{\tau=0} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\dot{w}|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^N B_i x_i(\xi) \quad (2.9b)$$

由(2.3)式可知, 解的一般形式为:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N B_i x_i(\xi) T_i(\tau) \quad (2.10)$$

式中 T_i 为相应于本征值 ω_i 的时间因子, 由(2.5)式决定。

考虑到初条件(2.9a~b), (2.10)式可写为:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N B_i x_i(\xi) \eta_i(\tau) \quad (2.11)$$

$$\text{式中 } \eta_i = \text{sh}\left(\frac{\omega_i}{\beta\gamma} \tau\right) / \left(\frac{\omega_i}{\beta\gamma}\right).$$

比较式(2.9b)与式(2.11)发现, 真实的屈曲运动是在初缺陷上乘以放大函数 $\eta_i(\omega_i, \tau)$ 所得到的运动。可以证明: $\eta(\omega, \tau) = \text{sh}\left(\frac{\omega}{\beta\gamma} \tau\right) / \left(\frac{\omega}{\beta\gamma}\right)$ 是 ω 的增函数, 故 $\eta_{\max} = \eta_N(\omega_N, \tau)$ 。

图2给出了 $\eta(\omega, \tau)$ 在不同 τ 值下随 ω 的变化曲线, 考虑到本征值 ω_i 的离散性, 当 τ 较大时, $\eta_N \gg \eta_i (i=1, 2, \dots, N-1)$ 。因此, 屈曲运动解(2.11)中的分量 $B_N x_N(\xi) \eta_N(\tau)$ 将在屈曲运动中占主要地位, 本征函数 $x_N(\xi)$ 成为屈曲主导模态, 这正是最优模态的基本思想。

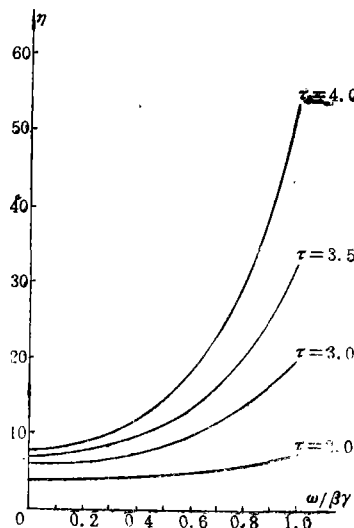


图2 放大函数随 ω 的变化

三、讨 论

作为例子我们考虑两端固支弹性杆的动态屈曲模态。

边界条件(2.8)可具体写为:

$$y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0 \quad (3.1a\sim d)$$

由方程(2.6a~c)及(3.1a~d)可得本征方程如下

$$2K_1K_2(1-\cos K_1\cos K_2)=(K_1^2+K_2^2)\sin K_1\sin K_2 \quad (3.2)$$

这里

$$K_{1,2}=[2p\pi^2 \mp \sqrt{4p^2\pi^4 - \omega^2}]^{1/2}, \quad p=P/P_{cr}, \quad P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

是静态Euler临界载荷, 式中 $\omega^2 < a^2\beta^4/4 (=4p^2\pi^4)$, 其相应屈曲模态为

$$y = \cos K_1\xi - \cos K_2\xi + \frac{\cos K_2 - \cos K_1}{K_2\sin K_1 - K_1\sin K_2} \cdot (K_2\sin K_1\xi - K_1\sin K_2\xi) \quad (3.3)$$

当 $\omega^2 \geq a^2\beta^4/4$ 时, 相应本征方程无解。

由(3.2)式决定的 ω_{\max} 与 p 的关系可见图3。当 $p < 1$ 时无解; $p = 1$ 时, $\omega_{\max} = 0$ 退化为静力问题, 当 $p > 1$ 时, $\omega_{\max} > 0$, 且是 p 的单调递增函数。

计算表明, 随着 p 的增加, 屈曲半波数也增加, 但是屈曲半波数在 p 的一定范围内是不变的。表1给出了屈曲半波数 n 与载荷 p 之间的关系。

表1 屈曲半波数 n 随载荷 p 之变化

n	2	3	4	5
p	$1.00 \leq p < 2.48$	$2.48 \leq p < 4.98$	$4.98 \leq p < 8.42$	$8.42 \leq p < 12.98$
p^*	$1.00 \leq p^* < 2.00$	$2.00 \leq p^* < 4.50$	$4.50 \leq p^* < 8.00$	$8.00 \leq p^* < 12.50$
n	6	7	8	
p	$12.98 \leq p < 18.42$	$18.42 \leq p < 24.92$	$24.92 \leq p < 32.00$	
p^*	$12.50 \leq p^* < 18.00$	$18.00 \leq p^* < 24.50$	$24.50 \leq p^* < 32.00$	

其中 p^* 由文献[6]中方法来确定, 即

$$n = [\sqrt{2p^*}] + 1 \quad (3.4)$$

这里 $[\quad]$ 为取整符号, $p^* = P/P_{cr}$ 。

可见, 由文献[6]中方法求得的屈曲半波数与无量纲载荷参量之间的关系和由本文方法所得结果相差不大。但是采用文献[6]的方法只能给出均匀分布的屈曲模态, 无法解释实验中屈曲非均匀现象。

图4给出 p 不同时的屈曲模态。随着 p 的增加屈曲形状由低模态转变为高模态。屈曲模态有对称与反对称两种类型, 这两种类型的转换点 p_n 由下式近似决定:

$$p_n = n^2/2 \quad (n \geq 2) \quad (3.5)$$

令 $p_1 = 1$, 则得到 p_n 的一个序列 $p_1 = 1, p_2 = 2, \dots, p_n = n^2/2 \dots$, 当 $p \in [p_1, p_2]$ 时, 屈曲模态为对称型, 有两个半波; $p \in [p_2, p_3]$ 时, 为反对称型, 有三个半波。随着 p 的增加这两种屈曲

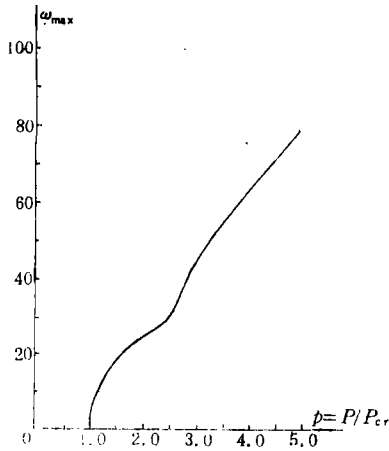


图3 最大本征值与载荷参数之间的关系

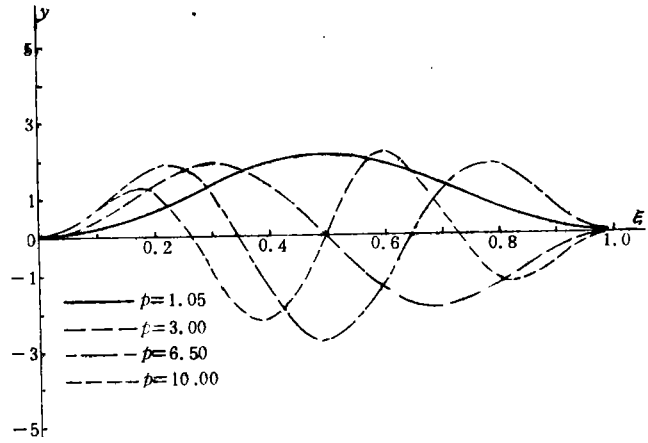


图4 屈曲类型随载荷的变化

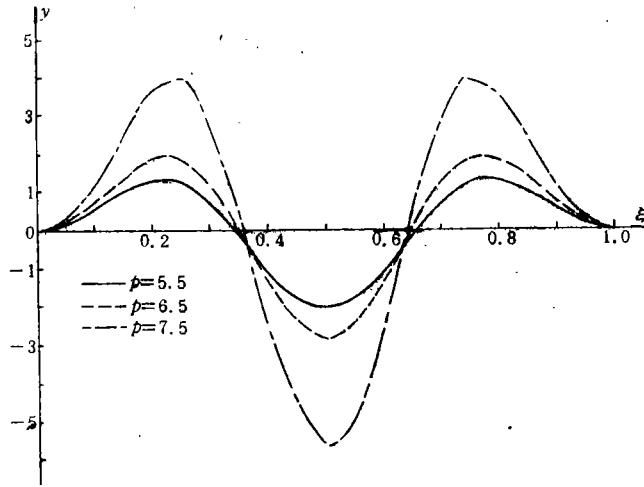


图5 同类型屈曲形状随载荷的变化

类型交替出现。每当 p 通过一个序列点，屈曲类型发生一次转换，屈曲半波数增加1。

图5给出在一个载荷序列区间内屈曲模态随 p 的变化。这里 $p \in [p_3, p_4]$ ，由此图可看到屈曲半波数没有变化，屈曲半波长变化也不大。但是屈曲形状则不大相同。有趣的是，在 $\xi = 0.363$ 及其中心对称点 $\xi = 0.637$ 处杆具有几乎相同的屈曲位移。

四、结 论

本文提出了屈曲相关初缺陷的概念，采用最优模态理论给出了分析具有齐次边条件弹性杆动态屈曲模态的一般方法。通过对两端固支弹性杆的分析得到以下结论。

1. 当载荷大于Euler 临界载荷时，杆发生动态屈曲。随着载荷提高，屈曲模态在对称与反对称之间不断转化。
2. 屈曲模态随载荷的变化是连续的，但是屈曲类型随载荷的变化是不连续的。
3. 由文献[6]的方法可以较好地确定屈曲半波数及屈曲平均半波长。但是不能很好地描述屈曲模态。

参 考 文 献

- [1] Taub, J. and C. Koning, Impact buckling of thin bars in the elastic range hinged at both ends, *NACA*, TM748 (1934).
- [2] Meier, J. H., On the dynamics of elastic buckling, *J. of the Aeronautical Sciences*, 12 (1945), 433—440.
- [3] Davidson, J. F., Buckling of strucs. under dynamic loading, *J. of Mech. and Phy. of Solids*, 2 (1953), 54—66.
- [4] Lavrentier, M. A. and A. V. Ishinsky, Dynamic forms of loss of stability of elastic systems, *Doklady Akademiya Nauk, USSR*, 64 (1949), 779—782; English translation by R. Cooper in STL-TR-61-511J-41, Space Tech. Lab., Los Angeles, Calif.
- [5] Housner, G. W. and W. K. Tso, Dynamic behavior of super-critically loading strucs., *J. of the Engin. Mech. Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* (1962), 41—65.
- [6] Lindberg, H. E., Impact buckling of a thin bar, *ASME J. of Appl. Mech.*, 32, 2 (1965), 315—322.
- [7] Abrahamson, R. and J. N. Goodier, Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave, *ASME J. of Appl. Mech.*, 33 (1966), 241—247.

Dynamic Buckling Mode of an Elastic Bar

Li Qing-ming

(~~Taiyuan~~ University of Technology, Taiyuan)

Abstract

The conception of buckling relative initial imperfection is presented in this paper. According to Bernoulli-Euler beam equation, the dynamic buckling mode of an elastic bar under the homogeneous boundary conditions can be derived by applying the preferred mode analytical method. As an example, the dynamic buckling mode of an elastic bar clamped at both ends is discussed.