应用数学和力学，第11卷第1期（1990年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

解含转向点问题的完全指数型拟合差分方法*

陈明伦　王国英
（重庆交通学院）（南京大学）

摘　要

本文对含转向点的微分方程边值问题建立了完全指数型拟合差分格式，证明了此格式具有一阶一致收敛性。推广了Miller[1]的方法，简化了证明过程。数值结果表明本格式比Il'in[2]格式要好。

一、引　言

Miller[1]对无转向点的二点边值问题构造了一种完全指数型拟合差分格式，证明了它的解以$O(h)$阶关于ε一致收敛于原连续问题的解。他的方法是对[3]中的一致收敛差分格式的充分条件进行检验。

对含转向点的两点边值问题

$$Lu(x)\equiv\varepsilon u''+p(x)u'-q(x)u=f(x)\quad(-a<x<b)\tag{1.1}$$

$$u(-a)=A,\ u(b)=B\quad(a>0,\ b>0)\tag{1.2}$$

Kellogg[4]研究了$p'(x)<0$的情形，得到了误差估计。Farrell[5]研究了$p(x)=\bar{a}x$，$q(x)=\bar{b}$，$\bar{a}>0$的情形，也得到了类似的结论。林鹏程、颜鹏翔[6]改进了Kellogg[4]的证明方法，证明了Il'in[2]格式对问题(1.1)，(1.2)当$p(0)=0$，$p'(x)<0$，$q(x)\geqslant\beta>0$具有一阶的一致收敛性。

本文对含有转向点问题(1.1)，(1.2)构造了一种完全指数型拟合差分格式，并证明它的解以$O(h)$阶关于ε一致收敛于原连续问题的解。本文的证明方法比[[1]中的方法要简洁得多。最后的数值例子表明，本完全指数型拟合格式的解要比Il'in[2]格式的解更好地逼近于原连续问题的退化解。

二、连续问题解的性质

我们来研究以下两点边值问题：

$$Lu\equiv\varepsilon u''+p(x)u'-q(x)u=f(x)\quad(x\in(-a,\ b))\tag{2.1}$$

* 苏煜城推荐，1988年5月5日收到。

$$u(-a)=A,\qquad u(b)=B \tag{2.2}$$

这里 ε 是正的小参数，$p(x)\in C^2[-a,b]$，$f(x)$，$q(x)\in C^1[-a,b]$，A，B是给定的常数，并假定$p(0)=0$，$p'(x)<0$，$q(x)\geqslant\beta>0$ $(-a\leqslant x\leqslant b)$。文[4，6，7，9，10，13]研究了边值问题的解的渐近性态，指出了边值问题(2.1)、(2.2)的解包含三个部份：(1)在端点的边界层项；(2)当$x=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$时适用的转向点解；(3)外解。

我们假定 $l=-q(x)/p'(x)\neq$ 非负整数，即非共振情形。这时在 $x=-a$ 和 $x=b$ 都有边界层。以下字母 c 都是与 ε 无关的常数。

在上述条件下，(2.1)满足极值原理，即

引理 1 若 $u(x)\in C^2[-a,b]$使得 $Lu\leqslant 0$ 在$[-a,b]$成立，而且 $u(-a)\geqslant 0$，$u(b)\geqslant 0$，则 $u(x)\geqslant 0$，对一切 $x\in[-a,b]$成立。

证明 若不然，则$u(x)$可在 $x_1\in(-a,b)$处取到负的极小值，这样在 $x=x_1$ 处有$u''\geqslant 0$，$u'=0$，故在 $x=x_1$ 处有 $Lu\equiv\varepsilon u''+p(x_1)u'-q(x_1)u>0$，与假设矛盾。

把极值原理用到函数

$$\max(|A|,\ |B|)+\frac{1}{\beta}\max_{-a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\pm u(x)$$

上，就得到

引理 2 $|u(x)|\leqslant\max(|A|,\ |B|)+\dfrac{1}{\beta}\max\limits_{-a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$对一切$x\in[-a,b]$成立[6]。

证明 直接用引理 1 即得结论。

引理 3 $\left|\dfrac{d^ju(x)}{dx^j}\right|\leqslant c\quad\left(x\in[-\eta,\eta],\ 0<\eta<\min\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)\right)$。

证明 设 $W_j(x)=d^ju(x)/dx^j$，对(2.1)式微分 j 次得

$$\begin{cases}\varepsilon W_j''(x)+p(x)W_j'(x)+(p'(x)-q(x))W_j(x)\\ \qquad=\dfrac{d^jf(x)}{dx^j}-\sum\limits_{l=0}^{j-1}\left[\binom{j}{l-1}p_{j+1-l}+\binom{j}{l}q_{j-l}\right]W_l(x)\\ |W_j(\pm\eta)|\leqslant c\end{cases}$$

式中 $p_j=d^jp(x)/dx^j$，$q_j=d^jq(x)/dx^j$。

因为 $p'(x)<0$，利用引理 2，由归纳法，立得$|W_j(x)|\leqslant c$。

注意到$|W_j(\pm\eta)|=|d^ju(x)/dx^j|\leqslant c$，$0<\eta<\min\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$，这可以由[12]的引理2.3及本文的引理 2 得到证明。

利用[12]中引理2.4及引理 3 可得到以下两个定理：

定理 1 设 η 是满足 $0<\eta<\min\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$的任意常数，且$|p(x)|>\alpha>0$($x\in[-a,-\eta]\cup[\eta,b]$)，$u(x)$是问题(2.1)，(2.2)的解，那么$u(x)$具有下述性质：

$$u(x)=\begin{cases}r_1\exp[-p(-a)(x+a)/\varepsilon]+z^{(1)}(x) & (x\in[-a,\ -\eta])\\ u(x) & (x\in[-\eta,\ \eta])\\ r_2\exp[p(b)(b-x)/\varepsilon]+z^{(2)}(x) & (x\in[\eta,\ b])\end{cases}$$

这里 $|r_j|\leqslant c$ $(j=1,2)$，而

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}z^{(1)}(x)\right|\leqslant c[\varepsilon^{1-j}\exp[-\alpha(a+x)/\varepsilon]+1]\qquad(x\in[-a,\ -\eta])$$

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}z^{(2)}(x)\right|\leqslant c[\varepsilon^{1-j}\exp[-\alpha(b-x)/\varepsilon]+1] \qquad (x\in[\eta,b])$$

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}u(x)\right|\leqslant c \qquad (x\in[-\eta,\eta])$$

定理 2 设 w_0 满足方程 $p(x)w_0'-q(x)w_0=f(x)$,

$$\tilde{u}(x)=w_0(x)+\begin{cases}(\Psi_0^{(1)}(x)+\varepsilon\Psi_1^{(1)}(x))\exp\left[\dfrac{-1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x}p(s)ds\right] & (-a\leqslant x\leqslant 0)\\ (\Psi_0^{(2)}(x)+\varepsilon\Psi_1^{(2)}(x))\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{x}^{b}p(s)ds\right] & (0\leqslant x\leqslant b)\end{cases}$$

则

$$|\tilde{u}(x)-u(x)|\leqslant c\varepsilon.$$

其中

$\Psi_i^{(j)}(x)\,(i=0,1;\ j=1,2)$是无限次可微函数，且

$$w_0(-a)+\Psi_0^{(1)}(-a)=A$$

$$w_0(b)+\Psi_0^{(2)}(b)=B.$$

三、差分格式及其误差估计

为了数值解问题(2.1)，(2.2)，我们引进一致网格

$$x_i=-a+ih \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ N,\ h=(a+b)/N)$$

让 u_i 表示 $u(x_i)$的近似值，并引进以下记号

$$D_0u_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{2h},\quad D_+D_-u_i=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2},\quad \rho=\frac{h}{\varepsilon}$$

我们建立差分格式

$$\begin{cases}L^hu_i\equiv\varepsilon\sigma_i(\rho)D_+D_-u_i+p(x_i)\tau_i(\rho)D_0u_i\\ \qquad -q(x_i)u_i=f(x_i) \qquad (i=1,2,\cdots,N-1) & (3.1)\\ u_0=A, \qquad u_N=B & (3.2)\end{cases}$$

我们选择 $\sigma_i(\rho)$，$\tau_i(\rho)$使得当微分方程(2.1)中的系数p、q为常数时相应的齐次微分方程的解是(3.1)相应的齐次差分方程的精确解．易见，在常系数时，齐次微分方程有解 $\exp[\lambda_jx/\varepsilon](j=1,\ 2)$，其中 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2+4q\varepsilon}}{2\varepsilon}$，以此代入相应的齐次差分方程就能定出拟合因子

$$\sigma_i(\rho)=-qh\frac{\rho}{4}\left(1+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1}{2}\operatorname{cth}\frac{\lambda_2h}{2}\right)$$

$$\tau_i(\rho)=\frac{qh}{2p}\left(\operatorname{cth}\frac{\lambda_1h}{2}+\operatorname{cth}\frac{\lambda_2h}{2}\right)$$

当方程(2.1)是变系数时，我们选取

$$\sigma_i(\rho)=-q(x_i)h\frac{\rho}{4}\left(1+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)$$

$$\tau_i(\rho)=\frac{q(x_i)h}{2p(x_i)}\left(\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)$$

若 $x_i=0$，则取极限值 $\sigma_i=\tau_i=1$。

这是 Il'in[2]指数型拟合方法的变形，我们称这种方法为完全指数型拟合方法。关于完全指数型拟合方法的详细论述可参阅[11]。

对于差分算子 L^h，因为 u_{i-1} 和 u_{i+1} 的系数当 h 适当小时都是正的，而且这些系数与 u_i 的系数之和非正，所以差分格式 $L^hu_i=f(x_i)$ 是正型差分格式，对此格式来说极大值原理成立。即有

引理 4 假设 u_i 是一组网格点上的值，满足 $u_0\geqslant 0$，$u_N\geqslant 0$ 和 $L^hu_i\leqslant 0(i=1,2,\cdots,N-1)$，则 $u_i\geqslant 0$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$。

下面我们给出本文的主要结果

定理 3 设 u_i 是(3.1)，(3.2)的解，$u(x_i)$ 是(2.1)，(2.2)的解，则

$$|u_i-u(x_i)|\leqslant ch.$$

证明 设 $V^{(1)}(x)=\exp[-p(-a)(a+x)/\varepsilon]$，$V^{(2)}(x)=\exp[p(b)(b-x)/\varepsilon]$，$r_i=u_i-u(x_i)$。我们进行分段估计

在 $[-a,\ \eta]$ 上设 $L^hV_i^{(1)}=LV^{(1)}(x_i)$：

$$\begin{aligned}L^hV^{(1)}(x_i)=&\Big\{-\frac{h^2q(x_i)}{4}\left(1+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)\\&\cdot\frac{1}{h^2}\left[\exp\left[-p(-a)\left(\frac{-h}{\varepsilon}\right)\right]-2+\exp\left[-p(-a)\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]\right]\\&+\frac{hq(x_i)}{2}\left(\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)\frac{1}{2h}\left[\exp\left[\frac{-p(-a)h}{\varepsilon}\right]\right.\\&\left.-\exp\left[-p(-a)\left(\frac{-h}{\varepsilon}\right)\right]\right]\Big\}V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)\\=&q(x_i)\left(\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)\left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right.\\&\cdot\frac{-1+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}}{\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}}-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\\&\left.\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)\\=&q(x_i)\left(\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)\\&\cdot\left[-\operatorname{cth}\frac{h}{2}\left(\lambda_1(x_i)+\lambda_2(x_i)\right)\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right.\\&\left.-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)\\=&q(x_i)\left(\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\operatorname{cth}\frac{p(x_i)h}{2}\operatorname{sh}\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}-\operatorname{ch}\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}\right]V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

$$=q(x_i)\left[\operatorname{cth}\frac{h\lambda_1(x_i)}{2}+\operatorname{cth}\frac{h\lambda_2(x_i)}{2}\right]\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

因为不等式$|x\operatorname{cth}x-1|\leqslant cx^k$，当$x\in(0,\infty)$，$1\leqslant k\leqslant 2$时成立，因此我们有

$$\frac{1}{x}-c\leqslant\operatorname{cth}x\leqslant\frac{1}{x}+c\qquad(x\in(0,\infty))$$

于是

$$L^hV^{(1)}(x_i)\leqslant q(x_i)\left(\frac{2}{h\lambda_1(x_i)}+\frac{2}{h\lambda_2(x_i)}+2c\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

$$L^hV^{(1)}(x_i)\geqslant q(x_i)\left(\frac{2}{h\lambda_1(x_i)}+\frac{2}{h\lambda_2(x_i)}-2c\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{p(x_i)h}{2\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

因为

$$\frac{1}{\lambda_1(x_i)}+\frac{1}{\lambda_2(x_i)}=\frac{\lambda_1(x_i)+\lambda_2(x_i)}{\lambda_1(x_i)\lambda_2(x_i)}=\frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

所以

$$L^hV^{(1)}(x_i)\leqslant\left[\frac{2p(x_i)}{h}+2cq(x_i)\right]\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

$$L^hV^{(1)}(x_i)\geqslant\left[\frac{2p(x_i)}{h}-2cq(x_i)\right]\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)-q(x_i)V^{(1)}(x_i)$$

因为 $\operatorname{sh}x=x+S\quad(|S|\leqslant 2|x^3|\exp[|x|]/(1+x^2))$

所以

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}+S_1$$

其中 $$|S_1|\leqslant\frac{ch^3}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left[\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}\right],$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)=\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))+S_2$$

其中 $$|S_2|\leqslant\left|\frac{\frac{ch^3}{\varepsilon^3}(p'(\xi))^3(-a-x_i)^3}{1+\frac{h^2}{4\varepsilon^2}(p'(\xi))^2(-a-x_i)^2}\exp\left[\frac{ch}{\varepsilon}(-a-x_i)\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{ch^3(-a-x_i)\varepsilon^{-1}\exp\left[\frac{ch}{\varepsilon}(-a-x_i)\right]}{(h+\varepsilon)^2},$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}h\varepsilon^{-1}p(x_i)+S_3$$

其中 $$|S_3|\leqslant\frac{ch^3}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left[\frac{h}{2\varepsilon}p(x_i)\right].$$

$$LV^{(1)}(x)=\frac{p(-a)}{\varepsilon}[p(-a)-p(x)]V^{(1)}(x)-q(x)V^{(1)}(x)$$

$$L^hV^{(1)}(x_i)-LV^{(1)}(x_i)\leqslant\frac{2p(x_i)}{h}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right)V^{(1)}(x_i)+2cq(x_i)$$

$$\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(-a)\frac{h}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)}\operatorname{sh}\left[\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))\right]V^{(1)}(x_i)$$

$$-\frac{p(-a)}{\varepsilon}[p(-a)-p(x_i)]V^{(1)}(x_i)=-\frac{p(-a)}{\varepsilon}[p(-a)-p(x_i)]V^{(1)}(x_i)$$

$$+2cq(x_i)\frac{\left[\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}+S_1\right]\left[\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))+S_2\right]}{\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}+S_3}V^{(1)}(x_i)$$

$$+\frac{2p(x_i)\left[\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}+S_1\right]\left[\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i)+S_2\right]}{\frac{h^2}{2\varepsilon}p(x_i)+hS_3}V^{(1)}(x_i)$$

$$=\{p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}[p(-a)-p(x_i)]S_1+p(x_i)p(-a)\frac{h}{\varepsilon}S_2$$

$$+2p(x_i)S_1S_2-\frac{h}{\varepsilon}p(-a)[p(-a)-p(x_i)]S_3\}V^{(1)}(x_i)$$

$$\cdot\left[h\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}+2cq(x_i)\left[\frac{p(-a)h}{2\varepsilon}+S_1\right]$$

$$\cdot\left[\frac{h}{2\varepsilon}(p(-a)-p(x_i))+S_2\right]V^{(1)}(x_i)\cdot\left[\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right]\right]^{-1}$$

利用不等式 $\mathrm{sh}x\geqslant cx(1+x)^{-1}\exp[x](x>0)$ 我们有

$$\left[\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}\leqslant c\frac{\varepsilon}{h}\left(\frac{\varepsilon+h}{\varepsilon}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}p(x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right]$$

再利用 S_1，S_2，S_3 的估计，我们有

$$|L^hV^{(1)}(x_i)-LV^{(1)}(x_i)|\leqslant\frac{ch^2}{\varepsilon(h+\varepsilon)}\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]$$

$$+c\frac{h}{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]$$

于是

$$|L^hV^{(1)}(x_i)-LV^{(1)}(x_i)|\leqslant c\exp\left[\frac{-\alpha(a+x_i)}{\varepsilon}\right]\cdot\frac{h}{\varepsilon}$$

再设 $L^hz_i^{(1)}=Lz^{(1)}(x_i)$，则

$$|L^hz^{(1)}(x_i)-Lz^{(1)}(x_i)|\leqslant c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(\varepsilon\left|\frac{d^3z^{(1)}(x)}{dx^3}\right|+\left|\frac{d^2z^{(1)}(x)}{dx^2}\right|\right)dx \tag{3.3}$$

为了证明它，我们需要以下引理

引理 5 $|\tau_i(\rho)-1|\leqslant ch$，$|\varepsilon\sigma_i(\rho)-\varepsilon|\leqslant ch$.

证明 因为 $\lambda_1+\lambda_2=-\frac{p(x)}{\varepsilon}$，$\lambda_1\cdot\lambda_2=-\frac{q(x)}{\varepsilon}$，

$$|x\mathrm{cth}x-1|\leqslant cx^k\qquad(x\in(0,\infty),\ 1\leqslant k\leqslant 2)$$

我们有

$$|\tau_i(\rho)-1|=\left|\frac{qh}{2p}\left(\mathrm{cth}\frac{h\lambda_1}{2}+\mathrm{cth}\frac{h\lambda_2}{2}\right)-1\right|$$

$$=\left|\frac{h\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\mathrm{cth}\frac{h\lambda_1}{2}+\mathrm{cth}\frac{h\lambda_2}{2}\right)-1\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{h\lambda_1\lambda_2}{2}\left(\mathrm{cth}\frac{h\lambda_1}{2}+\mathrm{cth}\frac{h\lambda_2}{2}\right)-(\lambda_1+\lambda_2)\right)\right|$$

$$=\left|\frac{\lambda_2\left(\frac{h\lambda_1}{2}\mathrm{cth}\frac{h\lambda_1}{2}-1\right)+\lambda_1\left(\frac{h\lambda_2}{2}\mathrm{cth}\frac{h\lambda_2}{2}-1\right)}{\lambda_1+\lambda_2}\right|$$

$$\leqslant c_1\left|\frac{\lambda_1\lambda_2h+\lambda_1\lambda_2h}{\lambda_1+\lambda_2}\right|$$

$$=2c_1h\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=2c_1h\frac{q(x)}{p(x)}\leqslant ch$$

$$\frac{\sigma_i(\rho)}{\tau_i(\rho)}=\frac{ph}{2\varepsilon}\mathrm{cth}\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{ph}{2\varepsilon}\mathrm{cth}\frac{ph}{2\varepsilon}$$

所以

$$\left|\frac{\sigma_i(\rho)}{\tau_i(\rho)}-1\right|\leqslant c\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^k\quad(1\leqslant k\leqslant 2)$$

于是

$$|\sigma_i-1|\leqslant|\sigma_i-\tau_i|+|\tau_i-1|$$
$$=|\tau_i|\left|\frac{\sigma_i}{\tau_i}-1\right|+|\tau_i-1|$$
$$\leqslant c_1\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^k+c_1\frac{h}{\varepsilon}\leqslant c\frac{h}{\varepsilon}.$$

所以$|\varepsilon\sigma_i(\rho)-\varepsilon|\leqslant ch$。引理证毕。

利用引理 5，我们来证(3.3)式。

$$L^h z^{(1)}(x_i)-Lz^{(1)}(x_i)=\varepsilon(\sigma_i(\rho)-1)D_+D_-z^{(1)}(x_i)$$
$$+\varepsilon\left(D_+D_-z^{(1)}(x_i)-\frac{d^2z^{(1)}(x_i)}{dx^2}\right)+p(x_i)(\tau_i(\rho)-1)D_0z^{(1)}(x_i)$$
$$+p(x_i)\left(D_0z^{(1)}(x_i)-\frac{dz^{(1)}(x_i)}{dx}\right)$$

因为

$$|z(x+h)-z(x-h)|=\left|\int_{x-h}^{x+h}z'(s)ds\right|\leqslant\int_{x-h}^{x+h}|z'(s)|ds$$

所以

$$|D_0z^{(1)}(x_i)|\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|z'(s)|ds \tag{3.4}$$

再利用带有积分形式余项的 Taylor 展式，我们有

$$z(x-h)=z(x)-hz'(x)+\int_x^{x-h}z''(s)(x-h-s)ds \tag{3.5}$$

$$z(x+h)=z(x)+hz'(x)+\int_x^{x+h}z''(s)(x+h-s)ds \tag{3.6}$$

因此

$$|z(x+h)-2z(x)+z(x-h)|=\left|\int_{x-h}^{x}z''(s)(s+h-x)ds\right.$$
$$\left.+\int_x^{x+h}z''(s)(x+h-s)ds\right|\leqslant(x+h-x)\int_{x-h}^{x+h}|z''(s)|ds$$
$$=h\int_{x-h}^{x+h}|z''(s)|ds,$$

$$|D_+D_-z^{(1)}(x_i)|\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{d^2z^{(1)}(s)}{ds^2}\right|ds \tag{3.7}$$

我们还有

$$\left|D_+D_-z^{(1)}(x_i)-\frac{d^2z^{(1)}(x_i)}{dx^2}\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{d^3z^{(1)}(s)}{ds^3}\right|ds \tag{3.8}$$

$$\left|D_0z^{(1)}(x_i)-\frac{dz^{(1)}(x_i)}{dx}\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{d^2z^{(1)}(s)}{ds^2}\right|ds \tag{3.9}$$

由引理 5 和(3.4)，(3.7)～(3.9)，我们得到

$$|L^h z^{(1)}(x_i)-Lz^{(1)}(x_i)|\leqslant c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(\varepsilon\left|\frac{d^3z^{(1)}(x)}{dx^3}\right|+\left|\frac{d^2z^{(1)}(x)}{dx^2}\right|\right)dx$$
$$\leqslant c\left(h+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x+a)]dx\right)$$
$$\leqslant c\left(h+(\mathrm{sh}(\alpha\rho))\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]\right)$$

综合前面的估计就有

$$|L^hu_i-L^hu(x_i)|\leqslant c\left(h+\left(\frac{h}{\varepsilon}+\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)\right)\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]\right)\quad(-a\leqslant x_i\leqslant -\eta)$$

类似地在$[\eta,\ b]$上可得到估计

$$|L^hu_i-L^hu(x_i)|\leqslant c\left(h+\left(\frac{h}{\varepsilon}+\mathrm{sh}\,\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)\exp\left[-\frac{\alpha(b-x_i)}{\varepsilon}\right]\right)\quad(\eta\leqslant x_i\leqslant b)$$

以及在$[-\eta,\ \eta]$的的估计

$$|L^hu_i-L^hu(x_i)|\leqslant c\left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(\varepsilon\left|\frac{d^3u(x)}{dx^3}\right|+\left|\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right|\right)dx\leqslant ch\quad(-\eta\leqslant x_i\leqslant\eta)\right.$$

由于

$$L^h\left(\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]\right)\leqslant-\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\alpha(x_i+a)}{\varepsilon}\right]\quad(x_i\in[-a,\ -\eta])$$

$$L^h\left(\exp\left[\frac{-\alpha(b-x_i)}{\varepsilon}\right]\right)\leqslant-\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\alpha(b-x_i)}{\varepsilon}\right]\quad(x_i\in[\eta,\ b])$$

以上$c>0$。

通过直接计算，我们有

$$L^h(1)\leqslant-\beta$$

因此我们选取闸函数

$$\psi_i=\begin{cases}c\left(h+(h+\varepsilon\mathrm{sh}(\alpha\rho))\exp\left[\frac{-\alpha(a+x_i)}{\varepsilon}\right]\right) & (-a\leqslant x_i\leqslant-\eta)\\ ch & (-\eta\leqslant x_i\leqslant\eta)\\ c\left(h+(h+\varepsilon\mathrm{sh}(\alpha\rho))\exp\left[\frac{-\alpha(b-x_i)}{\varepsilon}\right]\right) & (\eta\leqslant x_i\leqslant b)\end{cases}$$

容易验证

$$L^h(\psi_i\pm r_i)\leqslant 0.$$

于是由引理4得

$$|r_i|\leqslant\psi_i\leqslant ch.$$

四、数 值 例 子

我们用完全指数型拟合格式来计算以下问题的近似解：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon u''+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\cdot u'-\cos\pi x\cdot u=-1\quad(-1<x<1)\\&u(-1)=-1,\ u(1)=1\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)$$

易知，(4.1)的退化问题的解是

$$u(x)=\cos\pi x.$$

我们在粗网格($h=0.1$)上用完全指数型拟合格式和 Il'in 格式分别进行计算。对于 $\varepsilon=10^{-8}$，我们得出相应结果进行比较(见表 1)。

表 1

点坐标	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
退化问题解	0.96106	0.80902	0.58779	0.30901	0	−0.30902	−0.58779	−0.80903	−0.95106
完全指数型拟合格式解	0.93135	0.78351	0.53442	0.24355	−0.11304	−0.39145	−0.64103	−0.85203	−0.95547
Il'in 格式解	0.82712	0.51245	0.16524	−0.19330	−0.52708	−0.76812	−0.94421	−1.03114	−1.07358

数值结果表明，本格式的解要比 Il'in 格式的解更好地逼近原连续问题的退化解。

参 考 文 献

[1] Carroll, J. and J. J. H. Miller, Completely exponentially fitted finite difference schemes for some singular perturbation problems, boundary and interior layers—computational and asymptotic methods, Ed. J.J.H. Miller, Boole Press, Dublin (1980), 225—230.

[2] Il'in, A. M., Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Math. Notes Acad. Sci.*, USSR, 6 (1969), 596—602.

[3] Miller, J. J. H., Sufficient conditions for the convergence uniformly in ε, of a three-point difference scheme for a singular perturbation problem, *Proc. Oberwolfach, Germany, Lecture Notes in Maths.*, *Springer-Verlag*, **679** (1977), 85—91.

[4] Kellogg, R. B., Difference Approximation for a singular perturbation problem with turning points, *Analysis and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, S. Axelsson, L. S. Frank and V. Slusisleds (eds), North-Holland Publishing Company (1981), 133—139.

[5] Farrell, P. A., A uniformly convergent difference scheme for turning point problems, *The First Conference on Boundary and Interior Layers-Computation and Asymptotic Methods*, Dublin, Ireland, Jan. (1982), 14—18.

[6] 林鹏程、颜鹏翔，无共振转向点问题的数值解，应用数学和力学，**6**，5 (1985)，423—430.

[7] Ackerberg, R. C. and R. E. O'Malley, Boundary layer problem exhibiting resonance, *Studies in Appl. Math.*, **49**, 3 (1970), 277—295.

[8] Lakin, W. D., Boundary value problems with a turning point, *Studies in Appl. Math.*, **51**, 3 (1972), 261—275.

[9] O'Malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, *Acad. Press*, New York and London (1974).

[10] Cook, L. P. and W. Eckhaus, Resonance in boundary value problem of singular perturbation type, *Studies in Appl. Math.*, **52**, 2 (1973), 129—139.

[11] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers, Boole Press, Dublin (1980).

[12] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning point, *Math. Comp.*, 32 (1978), 1025—1039.

[13] Jiang Fu-ru, On boundary value problems for a class of ordinary differential equations with turning points, *App. Math. Mech.*, 1, 2 (1978), 201—213.

Completely Exponentially Fitted Finite Difference Methods for Problems of Turning Point

Chen Ming-lun

(*Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing*)

Wang Guo-ying

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper we construct a completely exponentially fitted finte difference scheme for the boundary value problem of differential equation with turning points, extending Miller's method [1] and simplifying the method of the proof. We prove the first order uniform convergence of the scheme. The numerical results show that it is better than Il'in's scheme.