非水平分层区域Helmholtz边值问题的解析解*

张　鹏

（中国科学院应用数学研究所，1988年8月22日收到）

摘　要

在(x, y, z)直角坐标系中，N个物性参数不同的区域D_j $(j=0, 1, \cdots, N-1)$充斥着整个空间，这些区域间的分界面是非水平的光滑曲面$S_{j,j+1}$。下面的边值问题称为非水平分层区域Helmholtz边值问题：

$$\nabla^2 H^{(j)}+K_j H^{(j)}=0 \qquad (j=0, 1, \cdots, N-1)$$
$$(H^{(0)}-H^{(1)})_{S_{0,1}}=\delta(S) \qquad (\delta(S):\text{广义}\delta\text{-函数})$$
$$(H^{(j)}-H^{(j+1)})_{S_{j,j+1}}=0 \qquad (j=1, \cdots, N-2)$$

本文给出了此问题的解析解。

一、引　言

电磁波在空间中的传播和地球物理中的一些问题可以归结为下面的边值问题：

在(x, y, z)直角坐标系中，有N个物性参数不同的区域$D_j(j=0, 1, \cdots, N-1)$充斥整个空间，这些区域间的分界面是二维任意光滑曲面，亦即在任一个与y-z面平行的平面上，每一个光滑曲面具有形状完全相同的光滑曲线。在每个区域$D_j(0\leqslant j\leqslant N-1)$内，函数$H^{(j)}(x, y, z)$满足Helmholtz方程：

$$\nabla^2 H^{(j)}+K_j H^{(j)}=0 \tag{1.1}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad K_j=a_j+b_j i$$

a_j和b_j均是正实数而i是虚数单位。

在区域D_0和D_1的分界面$S_{0,1}$上，$H^{(0)}$和$H^{(1)}$的边值关系是：

$$(H^{(0)}-H^{(1)})_{S_{0,1}}=I_0\delta(x_0, y_0, z_0) \tag{1.2}$$

式中I_0是正实数，$\delta(x_0, y_0, z_0)$是三维广义δ-函数。此边界条件源于电磁场论中的边值关系且其中的δ函数表示点状电磁源。在每个区域的无穷远点（如果它有的话），我们有：

$$(H^{(j)})_{(x, y, z)\to\infty}=0 \tag{1.3}$$

---

* 秦元勋推荐。

在 D_j 和 D_{j+1} ($1\leqslant j\leqslant N-1$) 间分界面上，我们有：

$$(H^{(j)}-H^{(j+1)})_{S_{j,j+1}}=0 \tag{1.4}$$

50年代初期，J. R. Wait 和 A. N. Gordon 分别给出了水平分层区域 Helmholtz 边值问题(包括式(1.2))的解析解[7],[8]。之后，许多学者试图求解非水平分层区域Helmholtz边值问题。迄今为止，即使其数值解，也未有人给出满意的结果。本文给出此问题的解析解。

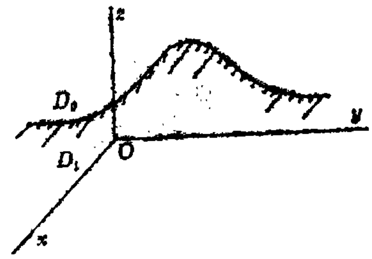

图 1

注 本文的结果可推广到 K_j 是 y 和 z 的连续函数的情形。

二、变换处理

为后面求解所需，先对上面的边值问题作如下的变换处理：

（1） **付里叶变换** 注意非水平分层区域的分界面沿 x 方向的不变性和上面的边值问题解的连续性，我们对 $H^{(j)}(x,y,z)$ 关于 x 施行付里叶变换 ($0\leqslant j\leqslant N-1$)：

$$\bar{H}^{(j)}(\lambda,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}H^{(j)}(x,y,z)\exp[i\lambda x]dx \tag{2.1}$$

于是，式(1.1)，(1.2)，(1.3)，(1.4)成为：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bar{H}^{(j)}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{H}^{(j)}+(K_j-\lambda^2)\bar{H}^{(j)}=0 \tag{2.2}$$

$$(\bar{H}^{(0)}-\bar{H}^{(1)})_{(y,z)\in S_{0,1}}=\frac{I_0}{\sqrt{2\pi}}\exp[i\lambda x_0]\delta(y_0,z_0) \tag{2.3}$$

$$(\bar{H}^{(j)})_{(y,z)\to\infty}=0 \qquad (j=0,\cdots,N-1) \tag{2.4}$$

$$(\bar{H}^{(j)}-\bar{H}^{(j+1)})_{(y,z)\in S_{j,j+1}}=0 \qquad (j=2,\cdots,N-2) \tag{2.5}$$

（2） **保角变换** 如果我们定义 $V=y+zi$，式(2.2)～(2.5)给出了V平面上非水平分层区域的 Helmholtz 边值问题。借助于复变函数论中保角变换 $\alpha=f(V)$，我们可以把 V 平面上非水平分层区域映射为 α 平面上的水平分层区域。当然变换应保持分层区域的顺序。

保角变换引起边值问题(2.2)～(2.5)的形式变化。设 $\alpha=f(V)=u(y,z)+v(y,z)i$ (这里 u 和 v 是 y，z 的实函数)，那么式(2.1)中的 $\bar{H}^{(j)}(\lambda,y,z)$ 成为 $\bar{H}^{(j)}(\lambda,u,v)$。根据隐函数微分法和解析函数的柯西-黎曼方程，我们可证明：式(2.2)成为：

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\bar{H}^{(j)}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar{H}^{(j)}+\frac{(K_j-\lambda^2)}{|d\alpha/dV|^2}\bar{H}^{(j)}=0 \tag{2.6}$$

式中 $|d\alpha/dV|=|f'(V)|$ 是 $\alpha=f(V)$ 导函数的模，它是关于 $\alpha=u+vi$ 的非常复杂的函数。如果V平面上区域 D_j 与 D_{j+1} 间分界线 $L_{j,j+1}$ 被映为 α 平面上的分界线 $L_{j,j+1}$，则式(2.3)～(2.5)只作字母代换，而形式不变。

复分析中保角变换存在性定理指出：除了全空间外的任二个单连通区域间必存在着保角变换；作者研究了十多个非水平分层区域的保角变换，这里仅举一例说明变换方法。

由许-克变换，我们可将图2中含有倾斜裂缝CDE的下半平面 $ABCDE$ 映为图4中W_1平面的下半平面。此许-克变换积分是：

$$V=C\left(\frac{1}{1-\alpha'}W_1^{1-\alpha'}-\frac{1}{\alpha'}W_1^{-\alpha'}\right)+C_1$$

由对应点坐标，可定得 C 和 C_1：

$$C=\frac{(1-\alpha')\alpha'}{\sin\alpha'\pi},\quad C_1=\mathrm{ctg}\,\alpha'\pi$$

同样，$\alpha=\ln W_1$ 给出了从图 4 到图 3 的保角变换．总之，式

$$V=\frac{1}{\sin\alpha'\pi}\exp[-\alpha'\alpha](\alpha'e^{\alpha}+(\alpha'-1))+\mathrm{ctg}\,\alpha'\pi$$

给出了从 α 平面上的水平分层区域$A'B'C'D'E'$到V平面上区域$ABCDE$的保角变换．

在式

$$V=\frac{1}{\sin\alpha'\pi}\exp[-\alpha'\alpha](\alpha'e^{\alpha}+(\alpha'-1))+\mathrm{ctg}\,\alpha'\pi$$

中，令 α 为虚数 $-\mu i$ ($\mu>0$，$\mu<\pi$) 可计算知，此映射可将V平面上形如 I-J 的曲线映为 α 平面上的水平直线I'-J'．于是，从V平面上区域$ABIJ$到 α 平面上区域$A'B'I'J'$的映射就完成了．

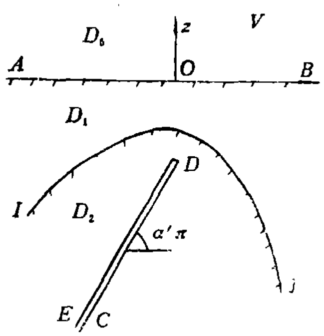

图 2

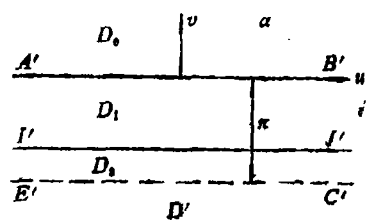

图 3

图 4

借助于许-克变换和一些由初等解析函数定义的保角变换，V 平面上许多分界线是光滑曲线的非水平分层区域可映为 α 平面上水平分层区域．当然，我们希望所作的保角变换是双向单值的，为此，我们给出定理 1．

定理 1 如果 D 是单连通多角形区域，$\alpha=f(V)$ 是由

$$\frac{d\alpha}{dV}=C_1\prod_{j=1}^{n}(\alpha-p_j)^{\mu_j}\qquad(\text{这里}|\mu_j|<1)$$

定义的许-克变换，那么 $\alpha=f(V)$是D和 α 平面的下半平面间的双向单值映射．

证明 引入下面的引理[1]：

引理 设解析函数 $\alpha=f(V)$将V平面边界为C的单连通区域D映为 α 平面边界为C^* 的单连通区域D^*且：C^*上含有数个无穷远点，它们伸向无穷远处的分枝所成角分别为 $b_j\pi$；而C上与上面无穷远点相对应的点分别是z_j，其切线间的夹角分别为$a_j\pi$ ($0\leqslant b_j\leqslant 2$，$0\leqslant a_j\leqslant 2$)，

若：

① $f(V)$在D内解析并且在D之边界C上除z_j外连续，$f(V)$在z_j的邻域是μ_j级无穷大，并且至少有一点使其满足：$\mu_j<(b_j+2)/a_j$；

② $f(V)$将C保持方向、双向单值地映为C^*，则$f(V)$将D单叶、保角映为D^*。引理完

因为许-克积分中的μ_j满足$|\mu_j|\leqslant 1$且α平面的实轴在其任意点处所成的角均为π，因此$a_j=1$。因为D是多角形区域，在无穷远点（如果它含有的话）$0\leqslant b_j\leqslant 1$。因此，$V=f^{-1}(\alpha)$是单叶的（$f$的上标$-1$表示$f(V)$的反函数）。此外，许-克积分中的任意常数被确定后，$V=f^{-1}(\alpha)$就是单值函数。根据$V=f^{-1}(\alpha)$的单叶、单值性又可推知$\alpha=f(V)$的单叶、单值性。 证毕

三、方程的复形式和 Riemann 函数

在式(2.6)中，我们记$(K_j-\lambda^2)/|d\alpha/dV|^2$为$C^{(j)}(\lambda, u, v)$，则(2.6)为：

$$\frac{\partial^2 \bar{H}^{(j)}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \bar{H}^{(j)}}{\partial v^2}+C^{(j)}(\lambda, u, v)\bar{H}^{(j)}=0 \tag{3.1}$$

引入复变量：$\alpha=u+vi$，$\beta=u-vi$ 且令 $\alpha\in D_j$，$\beta\in D_j^*$（D_j^* 是 D_j 的共扼域），于是，$u=(\alpha+\beta)/2$，$v=(\alpha-\beta)/2i$。这样，

$$\bar{H}^{(j)}(\lambda, u, v)=\bar{H}^{(j)}\left(\lambda,\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \frac{1}{2i}(\alpha-\beta)\right)$$

记为$\bar{H}^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)$，

$$C^{(j)}(\lambda, u, v)=C^{(j)}\left(\lambda,\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \frac{1}{2i}(\alpha-\beta)\right)$$

记为$C^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)$。

因为

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}=\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

我们可以得到：

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

于是式(3.1)成为：

$$\frac{\partial^2\bar{H}^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)\bar{H}^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)=0 \qquad (\alpha\in D_j,\ \beta\in D_j^*) \tag{3.2}$$

定义 1 若 D_j 是 α 平面上这样的单连通区域，使 $C^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)$是柱域$(D_j, D_j^*)$ $(\alpha\in D_j, \beta\in D_j^*)$ 内的解析函数，则称D_j为方程(3.2)的基本区域。

定义 2 如果 D_j 是(3.2)的基本区域且复函数 $G^{(j)}(\alpha, \beta;\ t, \tau)$ $(\alpha, t\in D_j,\ \beta, \tau\in D_j^*)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 G^{(j)}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda, \alpha, \beta)G^{(j)}=0 \tag{3.3}$$

及条件：

$$G^{(j)}(t,\beta;\ t,\tau)=G^{(j)}(\alpha,\tau;\ t,\tau)=1,\quad G^{(j)}(\alpha,\beta;\ t,\tau)=G^{(j)}(t,\tau;\ \alpha,\beta)$$

$$(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \tag{3.4}$$

则称 $G^{(j)}(\alpha,\ \beta;\ t,\ \tau)$ $(\alpha,\ t\in D_j;\ \beta,\ \tau\in D_j^*)$ 为方程(3.2)的 Riemann 函数。

设 D_j 是(3.2)的基本区域且 $\alpha\in D_j$，$\beta\in D_j^*$，我们将(3.3)写为：

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(G^{(j)}(\alpha,\ \beta;\ \ t,\ \tau)+\int_t^\alpha d\xi\int_\tau^\beta\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda,\ \xi,\ \eta)G^{(j)}(\xi,\ \eta;\ t,\ \tau)d\eta\right)=0$$

即是：

$$G^{(j)}(\alpha,\ \beta;\ t,\ \tau)+\int_t^\alpha d\xi\int_\tau^\beta\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda,\ \xi,\ \eta)G^{(j)}(\xi,\ \eta;\ t,\ \tau)d\eta$$

$$=\Phi(\alpha)+\Psi(\beta)$$

这里$\Phi(\alpha)$，$\Psi(\beta)$分别是D_j和 D_j^* 内的全纯函数。根据(3.4)，我们可以证明$\Phi(t)+\Psi(\tau)=1$。因为$(t,\ \tau)$是柱域 $(D_j,\ D_j^*)$ 内的任意点，于是对任意 $\alpha\in D_j$，$\beta\in D_j^*$ 均有$\Phi(\alpha)+\Psi(\beta)=1$。亦即：

$$G^{(j)}(\alpha,\beta;\ t,\ \tau)+\int_t^\alpha d\xi\int_\tau^\beta\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda,\ \xi,\ \eta)G^{(j)}(\xi,\ \eta;\ t,\ \tau)d\eta=1$$

$$\alpha,\ t\in D_j;\ \ \beta,\ \tau\in D_j^* \tag{3.5}$$

方程(3.5)是复 Volterra 积分方程。根据 Volterra 积分方程理论，И. Н. Bekya 给出了下面的定理[2]。

定理2 如果$C^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)$是$(D_j,\ D_j^*)$内的解析函数，方程(3.5)在$(D_j,\ D_j^*)$内有唯一的解析解，它以递归级数形式给出：

$$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)=1+\int_t^\alpha d\xi\int_\tau^\beta\Gamma_j(\xi,\eta;t,\tau)d\eta \tag{3.6}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_j(\xi,\eta;t,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}K^{(m)}(\xi,\eta;t,\tau)\\
&K^{(0)}(\xi,\eta;\ t,\tau)=\frac{1}{4}C^{(j)}(\lambda,\xi,\eta)\\
&K^{(m)}(\xi,\eta;t,\tau)=\int_t^\xi dt'\int_\tau^\eta K^{(0)}(\xi,\eta;t',\tau')K^{(m-1)}(t',\tau';t,\tau)d\tau'
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

推论 若 $C^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)$ 在 (D_j,D_j^*) 内解析，在 D_j 边界上只有阶数小于1的极点，则$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)$是闭柱域$(\overline{D_j},\overline{D_j^*})$内的解析函数。

证明 考虑$K^{(0)}(\alpha,\beta;t,\tau)=C^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)/4$和式(3.7)中的第三个方程，使用一般积分法则容易得到上面的结论。 证毕

令 $F(\bar{H}^{(j)}(\lambda,\ \alpha,\ \beta))=\dfrac{\partial^2\bar{H}^{(j)}}{\partial\alpha\partial\beta}+\dfrac{1}{4}C^{(j)}\bar{H}^{(j)}$

注意到Riemann函数 $G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)$ 满足方程(3.3)和(3.4)，对$(D_j,\ D_j^*)$ 内的任一解析函数$\bar{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)$，下面的恒等式均成立：

$$\frac{\partial^2\bar{H}^{(j)}G^{(j)}}{\partial\alpha\partial\beta}-G^{(j)}F(\bar{H}^{(j)})=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\bar{H}^{(j)}\frac{\partial}{\partial\beta}G^{(j)}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\bar{H}^{(j)}\frac{\partial}{\partial\alpha}G^{(j)}\right) \tag{3.8}$$

在式(3.8)中，我们交换α和t的位置和β和τ的位置，然后对t从α_0到α积分，对τ从β_0到β积分，

我们得到

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)=\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha_0,\beta_0)G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta)+\int_{\alpha_0}^{\alpha}G^{(j)}(t,\beta_0;\alpha,\beta)$$

$$\cdot\frac{\partial\tilde{H}^{(j)}}{\partial t}(\lambda,t,\beta_0)dt+\int_{\beta_0}^{\beta}G^{(j)}(\alpha_0,\tau;\alpha,\beta)\frac{\partial\tilde{H}^{(j)}}{\partial\tau}(\lambda,\alpha_0,\tau)d\tau$$

$$+\int_{\alpha_0}^{\alpha}dt\int_{\beta_0}^{\beta}G^{(j)}(t,\tau;\alpha,\beta)F(\tilde{H}^{(j)}(\lambda,t,\tau))d\tau \tag{3.9}$$

这里α_0是D_j内一常点而β_0是D_j^*内的常点。方程(3.9)对(D_j,D_j^*)内的任意解析函数$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)$均成立，特别地，如果我们令$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)=G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta)$ 并且考虑方程(3.4)，那么：

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}dt\int_{\beta_0}^{\beta}G^{(j)}(t,\tau;\alpha,\beta)F(G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;t,\tau))d\tau=0 \tag{3.10}$$

因为$G^{(j)}(t,\tau;\alpha,\beta)$在$(D_j,D_j^*)$中并不恒等于零，所以式(3.10)意味着 $F(G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;t,\tau))=0$。这告诉我们：$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)$就变量$t$，$\tau$也是方程 (3.3) 的解。设 $\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)$ 满足$F(\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta))=0$，我们得到：

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha,\beta)=C_0G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta)+\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Phi(\lambda,t)G^{(j)}(t,\beta_0;\alpha,\beta)dt$$

$$+\int_{\beta_0}^{\beta}\Psi(\lambda,\tau)G^{(j)}(\alpha_0,\tau;\alpha,\beta)d\tau \tag{3.11}$$

式中 $C_0=\tilde{H}^{(j)}(\lambda,\alpha_0,\beta_0)$，$\Phi(\lambda,t)=\dfrac{\partial\tilde{H}^{(j)}}{\partial t}(\lambda,t,\beta_0)$，$\Psi(\lambda,\tau)=\dfrac{\partial\tilde{H}^{(j)}}{\partial\tau}(\lambda,\alpha_0,\tau)$

因为方程(3.8)是对在(D_j,D_j^*)内任一解析函数均成立的恒等式，所以 $\Phi(\lambda,t)$ 和$\Psi(\lambda,\tau)$是(D_j,D_j^*)内任意全纯函数而C_0是任意复常数。

由于$G^{(j)}(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta)$就$\alpha$和$\beta$也是方程(3.3)的解，所以(3.11)右侧的三项就 α 和β分别是(3.1) 的解。$\Phi(\lambda,t)$ 和$\Psi(\lambda,\tau)$是任意全纯函数，所以(3.11)右侧的每一项可以考虑为方程(3.2)的解[2][4]。这里，我们取(3.11)右侧的第二项：

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,u,v)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}G^{(j)}(t,\beta_0;\alpha,\beta)\Phi(\lambda,t)dt \tag{3.12}$$

这里β_0是D_j^*之边界∂D_j^*的常点；$\alpha=u+vi$且β是α的复共轭；$j=0,1,\cdots,N-1$ 表示 α 平面上第j个区域。

И. Н. Векуа证明了这样的事实[2]：如果$\Phi(\lambda,\alpha)$是定义在区域D_j内的全纯函数而α_0是D_j之边界上的常点，式(3.12)给出了(3.2)在域D_j内的一个解析解，并且此解具有连续的一阶和二阶偏导数。

四、问题的解析解

式(3.12)给出了α平面上每个区域内方程(3.2)的解析解表达式。于是，问题归结为根据边值关系（与(2.3)、(2.4)、(2.5)一致）确定(3.12)中的任意全纯函数$\Phi(\lambda,\alpha)$。我们不妨设保角变换$\alpha=f(V)$ 将V平面的非水平分层区域映为α平面上这样的水平分层区域：D_0与D_1

的分界线与α平面上u轴重合（否则，平移坐标即可）。我们以图5为例说明$\Phi(\lambda,t)$的求法。

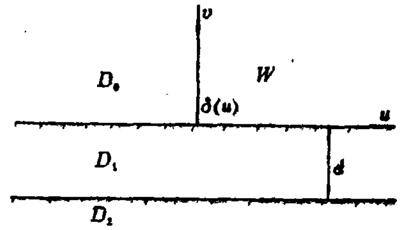

图 5

根据定理2和它的推论，式(3.12)中的被积函数是闭柱域$(D_j,D_j^*)+(\partial D_j,\partial D_j^*)$（这里$\partial D_j$和$\partial D_j^*$分别为$D_j$和$D_j^*$的边界）上的解析函数。因为解析函数的积分与积分路径无关，(3.12)可以写为定义在区域边界上的积分的形式。在图5中，当α和α_0（β取作α的复共扼）均定义在区域边界时，(3.12)成为：

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,u,0)=\int_{-\infty}^{u}G^{(j)}(t,\beta_j;u,u)\Phi(\lambda,t)dt \qquad (j=0,1) \tag{4.1}$$

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,u,-d)=\int_{-\infty-di}^{u-di}G^{(j)}(t-di,\beta_j;u-di,u+di)\Phi(\lambda,t-di)dt \qquad (j=1,2) \tag{4.2}$$

不失一般性，假定(2.3)中$x_0=0$且(2.3)中的(y_0,z_0)被映为α平面的原点。因为V平面上D_0与D_1的分界线被映为α平面的u轴，则广义δ函数被写为$\delta(u)$。根据δ函数的定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\delta(u)du=F(0)$$

我们可以把δ函数写为：

$$\delta(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)\exp[itu]du\right)\exp[-itu]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-itu]dt \tag{4.3}$$

于是条件(2.3)成为：

$$\int_{-\infty}^{u}(G^{(0)}(t,\beta_0;u,u)\Phi^-(\lambda,t)-G^{(1)}(t,\beta_1;u,u)\Phi^+(\lambda,t))dt$$
$$=\frac{I_0}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-itu]dt$$

令$u\to\infty$，从上式可得：

$$G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)\Phi^-(\lambda,t)-G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)\Phi^+(\lambda,t)$$
$$=\frac{I_0}{4\pi^2}\exp[-itu]_{u\to\infty}$$

根据广义函数论中的Schwartz分布理论，我们可以得到（见Papoulis, p.278）：当$t\neq0$时，$\exp[-itu]_{u\to\infty}=0$又；显然当$t=0$时，$\exp[-itu]_{u\to\infty}=1$。于是如我们定义：

$$D(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq0\end{cases}$$

则可有下式：

$$G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)\Phi^-(\lambda,t)-G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)\Phi^+(\lambda,t)$$
$$=\frac{I_0}{4\pi^2}D(t) \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{4.4}$$

式中Φ^+和Φ^-分别是Φ在u轴的下沿和上沿之值。在D_1与D_2的分界线上，我们有：

$$G^{(1)}(t-di,\beta_1;\infty-di,\infty+di)\Phi^+(\lambda,t-di)$$
$$=G^{(2)}(t-di,\beta_1;\infty-di,\infty+di)\Phi^-(\lambda,t-di) \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (4.5)$$

式中Φ^-和Φ^+分别表示分界线下沿与上沿的Φ值。

定理3 假设 $G^{(j)}(t,\beta_0;\alpha,\beta)$（这里$\beta_0$是域$D^*$内的常点）（$j=0,1,2$）是由定义2给出的Riemann函数，则$G^{(j)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$对任何$t\in(-\infty,\infty)$均不等零。

证明 由(3.5)，$G(t,\beta_0;\infty,\infty)$满足的积分是：

$$G(t,\beta_0;\infty,\infty)+\int_{\infty}^{t}d\xi\int_{\infty}^{\beta_0}\frac{1}{4}C(\lambda,\xi,\eta)G(\xi,\eta;\infty,\infty)d\eta=1$$

如果存在t_0（$|t_0|<\infty$）使$G(t_0,\beta_0;\infty,\infty)=0$，则上面的式子为：

$$\int_{\infty}^{t_0}d\xi\int_{\beta_0}^{\infty}C(\lambda,\xi,\eta)G(\xi,\eta;\infty,\infty)d\eta=-4$$

令
$$\int_{\infty}^{t_0}C(\lambda,\xi,\eta)G(\xi,\eta;\infty,\infty)d\xi=U(\eta)$$

依上式可得：

$$\int_{\beta_0}^{\infty}U(\eta)d\eta=-4$$

此式表明$U(\eta)$在无穷域$\eta\in(\beta_0,\infty)$上的积分是收敛的，所以当$\eta\to\infty$时，$U(\eta)\to 0$亦即下式成立：

$$\int_{\infty}^{t_0}C(\lambda,\xi,\infty)G(\xi,\infty;\infty,\infty)d\xi=0 \qquad (※)$$

但是依(3.4)知：$G(\xi,\infty;\infty,\infty)=1$，又依(2.6)知

$$C(\lambda,\xi,\eta)=\frac{K-\lambda^2}{|(d\alpha/dV)(f^{-1}(\xi))|^2}=\frac{K-\lambda^2}{|g(\xi)|^2}$$

（这里$g(\xi)=(d\alpha/dV)(f^{-1}(\xi))$），则式(※)给出：

$$\int_{\infty}^{t_0}\frac{1}{|g(\xi)|^2}d\xi=0$$

根据定理1，$g(\xi)\neq 0$，故$|g(\xi)|^2>0$。因此除非t_0为∞，否则积分

$$\int_{\infty}^{t_0}\frac{d\xi}{|g(\xi)|^2}$$

不为零，这与证明开始的假设矛盾，于是定理成立。 证毕

推论 如果 $G(\alpha,\beta;t,\tau)$ 是由定义2给出的Riemann函数且d是任一有限的正数，$G(t-di,\beta_0;\infty-di,\infty+di)$对任意的$t\in(-\infty,\infty)$均不为零。

证明 类似于定理3的证明。 证毕

定义3 如果L是一条规定了正向的简单闭光滑曲线，$G(t)$是L上的连续函数并且在L上处处不为零，我们称

$$K=\frac{1}{2\pi}(\arg G(t))_L$$

为$G(t)$在L上的指数，这里$(\arg G(t))_L$是t绕L一周后$G(t)$的幅角的变化量。

定理4 设L是α平面的实轴且和实轴同向；$G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$和$G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$是满足(3.6)的函数（这里$t\in(-\infty,\infty)$），那么$f(t)=G^{(1)}(t;\beta_0;\infty,\infty)/G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$关于$L$的指数$K=(\arg f(t))_L/2\pi=0$。

证明 依定理1和定理3，$f(t)$在实轴上任意有限点处均不为零，所以我们可定义$f(\infty)=f(-\infty)\neq 0$。

显然

$$K=\frac{1}{2\pi}(\arg f(t))_L=\frac{1}{2\pi}(\arg G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty))_L-\frac{1}{2\pi}(\arg G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty))_L$$

根据复分析中的幅角原理，上式右侧第一项等于$G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$在$\alpha$平面上半平面中零点的个数，而第二项则等于$G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)$在$\alpha$平面上半平面中零点的个数（因为半径无限的圆可以视作扩充复平面上的一个点[6]）。

根据(2.6)，(3.6)和(3.7)，$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)$是由无限个复变函数的和构成，和式中各项的系数是$(K_j-\lambda^2)^n$ $(n=0,1,\cdots)$（这里下标j依赖于区域）。所以只要$G^{(0)}(\alpha,\beta;t,\tau)$中的$\beta$，$t,\tau$等于$G^{(1)}(\alpha,\beta;t,\tau)$中的$\beta,t,\tau$，则它们对应的“和式”仅是系数不同，各项的复变函数相同（显然$G^{(1)}(\alpha,\beta;t,\tau)$也可就$\alpha$延拓到上半平面）。于是我们推知：$G^{(0)}(\alpha,\beta;t,\tau)$和$G^{(1)}(\alpha,\beta;t,\tau)$在上半平面有相同的零点个数，尽管零点的位置可能不同。从而我们得到：$K=0$。

证毕

推论 如果d是正实数且

$$f(t)=\frac{G^{(j+1)}(t-di,\beta;\infty-di,\infty+di)}{G^{(j)}(t-di,\beta;\infty-di,\infty+di)}\qquad(j=1,2,\cdots,N-1)$$

那么$f(t)$的指数K（关于直线$\mathrm{Im}\alpha=-d$）等于零。

证明 与定理4的证明类似。 证毕

(4.4)和(4.5)可以写为(4.6)和(4.7)：

$$\Phi^+(\lambda,t)=\frac{G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}{G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}\Phi^-(\lambda,t)-\frac{I_0}{4\pi^2}\frac{D(t)}{G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}\qquad(-\infty<t<\infty)\tag{4.6}$$

$$\Phi^+(\lambda,t-di)=\frac{G^{(2)}(t-di,\beta_1;\infty-di,\infty+di)}{G^{(1)}(t-di,\beta_1;\infty-di,\infty+di)}\Phi^-(\lambda,t-di)\qquad(-\infty<t<\infty)\tag{4.7}$$

方程(4.6)和(4.7)构成了解析函数边值问题中的Riemann问题。定理3与定理4告诉我们指数$K=0$且Riemann问题要求的所有条件均满足。

显然对任意的有限值函数$f(t)$均有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)D(t)dt=0$$

这样，考虑(2.4)，当$|t|\to\infty$时取有限值的全纯函数是[3]：

$$\Phi(\lambda,t)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\ln f_0(x)}{(x-t)}dx+\int_{-\infty-di}^{\infty-di}\frac{\ln f_1(x)}{(x-t)}dx\right)\right]\tag{4.8}$$

式中：$f_0(x)=\dfrac{G^{(0)}(x,\beta_0;\infty,\infty)}{G^{(1)}(x,\beta_0;\infty,\infty)}$；$f_1(x)=\dfrac{G^{(2)}(t-di;\beta_1;\infty-di,\infty+di)}{G^{(1)}(t-di,\beta_1;\infty-di,\infty+di)}$

式中围道的取向使得D_1位于此围道的左侧。将(4.8)代入(3.12)，我们有：

$$\tilde{H}^{(j)}(\lambda,u,v)=\int_{\alpha_j}^{u+vi}G^{(j)}(\alpha,\beta_j;u+vi,u-vi)\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\ln f_0(x)}{(x-\alpha)}dx\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{-\infty-di}^{\infty-di}\frac{\ln f_1(x)}{(x-\alpha)}dx\right)\right]d\alpha$$

$(j=0,1,2;\ \alpha_0=\alpha_1=-\infty;\ \alpha_2=-\infty-di;$
$\beta_0=\beta_1$是D_0与D_1的分界线上的常点，
β_2是D_1与D_2分界线上的常点) (4.9)

取(4.9)的反付里叶变换，我们有：

$$H^{*(j)}(x,u,v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}^{(j)}(\lambda,u,v)\exp[-i\lambda x]d\lambda \tag{4.10}$$

注意到$\alpha=f(y+zi)$的双向单值性（定理1），可以从（4.10）得到Helmholtz边值问题(1.1)，(1.2)，(1.3)和(1.4)的解：

$$H^{(j)}(x,y,z)=H^{*(j)}(x,u(y,z),v(y,z)) \tag{4.11}$$

式中$(x,y,z)\in V$平面的D_j; $j=0,1,2$。

根据定理2和解析函数边值问题中的Riemann-Hilbert问题的理论，(4.11) 给出了区域D_0,D_1,D_2中Helmholtz边值问题(1.1)，(1.2)，(1.3)和(1.4)的解析解。

五、例

由于篇幅的局限，这里，仅举一例以说明具体解法。图6和图7给出了非水平分层区域，它们在y-z平面分界线分别形若山脊和山谷。我们知道：

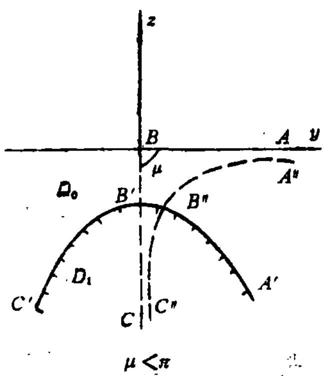

图 6

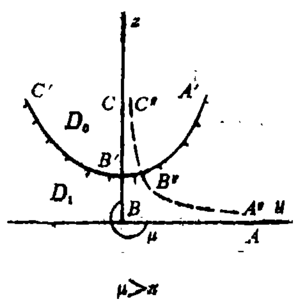

图 7

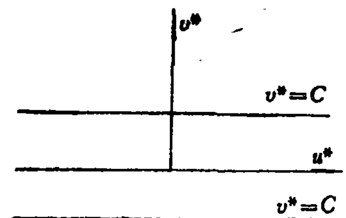

图 8

由变换：$W^*=u^*+v^*i=(y+zi)^{\pi/\mu}$可以将$y$-$z$平面上顶角为$\mu$的角形域映为$W^*$平面上的下半平面。从上面的变换式易得：

$$u^*=r^{\pi/\mu}\cos\frac{\pi}{\mu}\theta,\quad v^*=r^{\pi/\mu}\sin\frac{\pi}{\mu}\theta \tag{5.1}$$

式中 $r=\sqrt{y^2+z^2}$，$\theta=\mathrm{arctg}(z/y)$。于是在$y$-$z$平面上方程$r^{\pi/\mu}\sin(\pi\theta/\mu)=C$所决定的曲线$A''B''C''$被映为$W^*$平面上的水平线$v^*=C$($C$为常数且当$\mu<\pi$时$C<0$而$\mu>\pi$时 $C>0$)。将$A''B''C''$旋转一个角度就得到曲线$A'B'C'$，其结果，(5.2)并不改变。如果我们规定 $W=u+vi=W^*-Ci$，则曲线$r^{\pi/\mu}\sin(\pi\theta/\mu)=C$对应于$W$平面的实轴，于是我们有：

$$\left|\frac{dW}{dv}\right|^2=\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2(y^2+z^2)^{(\pi/\mu-1)}=\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2(u^2+(v+C)^2)^{(1-\pi/\mu)} \tag{5.2}$$

令 $$u=\frac{1}{2}(\alpha+\beta);\quad v=\frac{1}{2i}(\alpha-\beta)$$

(3.3)可以被写为：

$$\frac{\partial^2 \bar{H}^{(j)}}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2\frac{(K_j-\lambda^2)}{(\alpha\beta-(\alpha-\beta)Ci+C^2)}\bar{H}^{(j)}=0 \qquad (j=0,1) \tag{5.3}$$

再令$\alpha'=(\alpha+Ci)^{\mu/\pi}$和$\beta'=(\beta-Ci)^{\mu/\pi}$，我们可推知(5.3)为：

$$\frac{\partial^2 \bar{H}^{(j)}(\alpha',\beta')}{\partial\alpha'\partial\beta'}+\frac{1}{4}(K_j-\lambda^2)\bar{H}^{(j)}(\alpha',\beta')=0 \qquad (j=0,1) \tag{5.4}$$

据参考文献[2]中22页的结果，(5.4)的Riemann函数是：

$$G^{*(j)}(\alpha',\beta';t',\tau')=J_0(\sqrt{(K_j-\lambda^2)(\alpha'-t')(\beta'-\tau')}) \qquad (j=0,1) \tag{5.5}$$

式中$J_0(\ )$是零阶的贝塞尔函数。这样，我们可以得到(5.3)的解为：

$$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)=J_0(\sqrt{(K_j-\lambda^2)((\alpha+Ci)^{\mu/\pi}-(t+Ci)^{\mu/\pi})((\beta-Ci)^{\mu/\pi}-(\tau-Ci)^{\mu/\pi})}) \qquad (j=0,1) \tag{5.6}$$

根据贝塞尔函数的理论，我们可得：

$$G^{(j)}(t,\beta;t,\tau)=G^{(j)}(\alpha,\tau;t,\tau)=1,\ G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)=G^{(j)}(t,\tau;\alpha,\beta) \qquad (j=0,1) \tag{5.7}$$

显然$G^{(j)}(\alpha,\beta;t,\tau)$满足定义2。

我们不妨用S^+和S^-表示D_0和D_1，则分区全纯函数$\Phi(\lambda,t)$在实轴上的跳跃关系是：

$$\Phi^+(\lambda,t)=\frac{G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}{G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}\Phi^-(\lambda,t)+\frac{I_0}{4\pi^2}\frac{D(t)}{G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)} \qquad t\in(-\infty,\infty) \tag{5.8}$$

根据贝塞尔函数的渐近表达式：

$$J_0(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\pi/4) \quad (|z|\to\infty)$$

和$J_0(0)=1$可得：

$$G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)=G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)=\begin{cases}1 & t\to\infty\\ \infty & |t|<\infty\end{cases}$$

进而可有$\Phi^-(\lambda,t)$的系数：

$$f_0(x)=\frac{G^{(1)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}{G^{(0)}(t,\beta_0;\infty,\infty)}=1$$

于是，我们有： $$\Phi(\lambda,t)=1 \tag{5.9}$$

且：

$$\bar{H}^{(j)}(\lambda,u,v)=\int_{-\infty}^{u+vi}J_0(\sqrt{(K_j-\lambda^2)((\alpha+Ci)^{\mu/\pi}-(u+(v+C)i)^{\mu/\pi})((\beta_0-Ci)^{\mu/\pi}-(u-(v+C)i)^{\mu/\pi})})d\alpha \qquad (j=0,1) \tag{5.10}$$

总之，本问题的解是：

$$H^{(j)}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\bar{H}^{(j)}(\lambda,u,v)e^{-i\lambda x}d\lambda\right]_{\substack{u=(\sqrt{y^2+z^2})^{\pi/\mu}\cos(\pi/\mu\,\mathrm{arctg}(z/y))\\ v=(\sqrt{y^2+z^2})^{\pi/\mu}\sin(\pi/\mu\,\mathrm{arctg}(z/y))}} \qquad (j=0,1) \tag{5.11}$$

本文是在秦元勋教授指导下完成的，作者在此向他诚挚致谢！

参 考 文 献

[1] Голузин Г. М., *Геометрическая Теория Функций Комплексного Переменного*, Гостехиздат (1952).

[2] Векуа И. Н., *Новые Методы Решения Элиптических Уравнений*, Гостехиздат (1948).

[3] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные Интегральные Уравнения*, Физматгиз (1962).

[4] Gilbert, R. P., *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equation*, The Academic Press (1969).

[5] 路见可，《解析函数边值问题》，上海科学技术出版社 (1987).

[6] Conway, John B., *Function of One Complex Variable*, 2nd Edition, Springer-Verlag Press, New York (1978).

[7] Wait, J. R., Fields of a line current source over a stratified conductor, *Appl. Sci. Res.*, Sec. B., **3** (1953), 1—15.

[8] Gordon, A. N., The field induced by an oscillating magnetic dipole outside a semi-infinite conductor, *Mech. and App. Math.*, **4** (1951), 106—115.

The Analytical Solution for Helmholtz Boundary Problem in Non-Horizontally Stratified Domains

Zhang Peng

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

There are N domains D_j $(j=0,1,\cdots,N-1)$ of different physical parameters in the whole space and their interfaces $S_{j,j+1}$ are non-horizontally smooth curved surfaces. The following boundary problem is called Helmholtz boundary problem:

$$\nabla^2 H^{(j)}+K_j H^{(j)}=0 \qquad (j=0,1,\cdots,N-1)$$

$$(H^{(0)}-H^{(1)})_{S_{0,1}}=\delta(S) \qquad (\delta(S), \text{ generalied function})$$

$$(H^{(j)}-H^{(j+1)})_{S_{j,j+1}}=0 \qquad (j=1,\cdots,N-2)$$

The analytical solution of the above problem is given in this paper.