应用数学和力学，第10卷第11期（1989年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

周期轨间蕴含关系的判定算法(Ⅰ)*

张景中　杨　路　章　雷

（中国科学院成都分院，1987年11月16日收到）

摘　要

近年来，Sarkovskii 定理及其有关研究引起很大兴趣．按 Sarkovskii 定理，若闭区向上连续自映射 f 有3-周期点，则对任意正整数 n 有 n 周期点．但f不可能有所有类型的n-周期轨．例如：

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & \left(x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right) \\ 2(1-x) & \left(x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]\right) \end{cases}$$

则 f 仅有两种类型的3-周期轨中的一类．这表明 Sarkovskii 定理远远没有给出周期轨之间的关系的全部信息．本文(Ⅰ)中将给出周期轨的型的概念，并证明可从建立机械方法来判断一种周期轨是否蕴含另一类型的周期轨．本文(Ⅱ)中将给出这个判断方法的计算机程序，并列出一些计算结果．

一、引　言

近年来，Sarkovskii 定理以及和它有关的研究引起了广泛的兴趣[1]、[2]、[3]．A．N．Sarkovskii 在[1]中建议把全体自然数排成这样的顺序：

$$\begin{aligned}\lhd:\ & 3\lhd5\lhd7\lhd9\lhd\cdots\cdots\lhd2n-1\lhd2n+1\lhd\cdots\cdots;\\ & \lhd6\lhd10\lhd14\lhd\cdots\lhd2\cdot(2n-1)\lhd2\cdot(2n+1)\lhd\cdots\cdots;\\ & \lhd12\lhd20\lhd28\lhd\cdots\lhd4\cdot(2n-1)\lhd4\cdot(2n+1)\lhd\cdots\cdots;\\ & \cdots\cdots;\ \lhd2^k\cdot3\lhd2^k\cdot5\lhd2^k\cdot7\lhd\cdots\lhd2^k\cdot(2n-1)\lhd2^k\cdot(2n+1)\lhd\\ & \cdots\cdots;\ \lhd\cdots\cdots2^m\lhd2^{m-1}\lhd\cdots\cdots\lhd16\lhd8\lhd4\lhd2\lhd1\end{aligned}$$

然后证明了

Sarkovskii 定理　设 f 是定义于线段上的连续函数．如果f 有 n 周期点，则对于任一正整数 m，只要 $n\lhd m$，则 f 必有 m 周期点．

这里，周期点的概念是熟知的．如果对正整数 n，记 $f^1=f$，$f^0=Id$．(恒同映射)，$f^n=f\circ f^{n-1}$，则当 x_0 满足

* 钱伟长推荐．国家自然科学基金资助课题．

$$\begin{cases} f^n(x_0)=x_0 \\ f^k(x_0)\neq x_0 \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \end{cases} \tag{1.1}$$

时，称 x_0 为 f 的一个n-周期点。而且由 n 个周期点 x_0，$x_1=f(x_0)$，$x_2=f(x_1)$，…，$x_{n-1}=f(x_{n-2})$组成的 n 元素集$\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$，或记作$\{f^k(x_0);\ k=0,1,\cdots,n-1\}$，叫做 f 的一个n-周期轨。

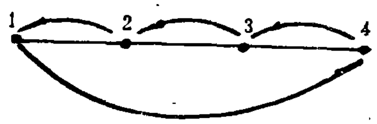
对于固定的一个正整数n，可能有不同类型的n-周期轨。为了说明这一点，可从引入周期轨的“型”的概念：

把n-周期轨$\{f^k(x_0);\ f=0,1,\cdots,n-1\}$中的元素按自小而大的顺序重排为

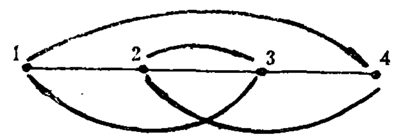
$$z_1<z_2<\cdots<z_n \tag{1.2}$$

如果$f(z_i)=z_j$，则令 $a_i=j$ $(i=1,2,\cdots,n)$。我们把正整数有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为n-周期轨的“型”。显然，诸 a_i 是两两不同的。

例如，下列两种4-周期轨：



(1)



(2)

其(1)的型为 (4, 1, 2, 3)，而(2)的型则为(4, 3, 1, 2)。

易知，$n\leqslant 2$时，都只有一种型：(1)、(2, 1)。$n=3$时，有两种型：(2, 3, 1)和(3,1, 2)。$n=4$时，共有6种型。除了上面列出的两种及之外，还有(3, 1, 4, 2)、(3, 4, 2, 1)、(2, 3, 4, 1)、(2, 4, 1, 3)。

一般说来，n-周期轨的型共有个$(n-1)!$ 个。

按照 Sarkovskii 定理，线段上的连续自映射f，如果有 3-周期轨，则对一切正整数n一定也有n-周期轨，但 f 却不一定有各种类型的n-周期轨。例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} & \left(x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]\right) \\ 2(1-x) & \left(x\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

有3-周期轨{0, 1/2, 1}（它的型是(2, 3, 1)）。但在4-周期轨的 6 种型中，$f(x)$只具有一种，即 (3, 4, 2, 1)。在5-周期轨的24种型中，它也仅仅具有一种，即 (3, 5, 4, 2, 1)。在6-周期轨的120种型当中，它仍然只具有一种，它是 (4, 6, 5, 3, 2, 1)。

是不是对每个 n，f 只具有一种型的n-周期轨呢？不是的．f 的7-周期轨有两种型，8 周期轨有 3 种型，其12-周期轨有 13 种之多．用普通的推理方法获得这些结论是颇为繁难的．以上所列出的是计算机上算出来的结果．

自然会提出这样的问题：知道连续函数 f 具有某一种型 A 的周期轨，它必然还会具有哪些型的周期轨呢？

如果具有 A 型周期轨的连续函数必然具有 B 型周期轨，我们就说 A 型周期轨蕴含了 B 型周期轨．或简单地说 A 型蕴含了 B 型．援用熟知的 Sarkovskii记号，记作$A\triangleleft B$．例如，上面已知：

$$(2,\ 3,\ 1) \lhd (3,\ 4,\ 2,\ 1)$$

等等。

那么，具体给了两种不同型的周期轨，A型与B型，究竟是A蕴含B，B蕴含A，互相蕴含，还是互不蕴含？给了某种型的周期轨，如何确定它所蕴含的周期轨的可能的型？

要回答这些问题，Sarkovskii 定理所提供的信息已远远不够用了。需要更深入更细致的分析。

周期轨的型之间的蕴含关系可以从更一般的角度来讨论，例如章雷在 [4] 中所做的。此外，在[5]、[6]中引入了S-极小周期轨和简单周期轨的概念，并且[6]中证明了：线段上的连续函数，如果有n-周期轨，则必有简单n-周期轨。在[7]和[8]中，明确地提出并讨论了具有不同型周期轨的映射集合之间蕴含关系，这实质上也是对周期轨间蕴含关系的研究。

鉴于这些问题的精细性与复杂性，看来目前难于找到类似于 Sarkovskii 定理那样的一目了然的答案。但是，本文指出，可以给出现实能行的算法，利用计算机来判别两个型之间的蕴含关系。计算机提供的结果可以帮我们找寻更明朗的关系与规律。

本文分（Ⅰ）、（Ⅱ）两部分。在（Ⅰ）中介绍并证明算法的原理。在（Ⅱ）中给出程序设计方法和一些计算结果，并指出一些问题与猜想。

二、算 法 的 原 理

我们把问题放在更广泛的基础上加以讨论。

考虑n元实数组$S_n=\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}\subset R^1$。把$S_n$到自身的全体映射之集记作$C(S_n)$。如果$f\in C(S_n)$，我们记$f$在$[x_1,\ x_n]$上的逐段线性开拓为$\tilde{f}$，亦即$\tilde{f}$满足：

$$\begin{cases} \tilde{f}(x_i)=f(x_i) & (i=1,2,\cdots,n) \\ \tilde{f}\text{在}[x_i,\ x_{i+1}]\text{上是线性的} & (i=1,2,\cdots,n-1) \end{cases}$$

所有这样的$\tilde{f}$之集记作$L(S_n)$。

对于某些$f\in C(S_n)$，S_n可能恰巧是f的n-周期轨，所有这样的f之集记作$C_p(S_n)=\{f\in C(S_n)\,|\,S_n\text{是}f\text{的周期轨}\}$。而$C_p(S_n)$中的函数$f$的逐段线性开拓$\tilde{f}$之集则记作$L_p(S_n)=\{\tilde{f}\in L(S_n)\,|\,f\in C_p(S_n)\}$。

下面首先说明，对任一个$\tilde{f}\in L(S_n)$，$\tilde{f}$的所有的m-周期轨的型是可以用能行的步骤确定出来的。其次指出，如果$f\in C_p(S_n)$，且记f的周期轨S_n的型为A，则对任一个型B，当且仅当$\tilde{f}$具有B型周期轨时$A\lhd B$。

对于任一个$f\in C(S_n)$，如果$f(x_i)=x_j$，则令$a_i=j$，我们称正整数有序组$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$为$S_n$上自映射$f$的型，记之以$A_f$：

$$A_f=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \tag{2.1}$$

而当$f\in C_p(S_n)$时，A_f也就是f的n-周期轨S_n的型。

显然，对于$C(S_n)$中的两个映射f与g，如果$A_f=A_g$，则$\tilde{f}$与$\tilde{g}$是保向拓扑共轭的，它们具有同型的周期轨。因而我们可以用任一个n元有序组代替S_n来进行讨论，不失一般性，设$S=\{1,2,\cdots,n\}$，这时恰有：

$$A_f=(f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n)) \tag{2.2}$$

我们采用符号动力系中惯用手法。把区间$[1,n]$分成若干个部份：

$$\Delta_i=(i,\ i+1) \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

又记：
$$\begin{cases} u_i=\min\{f(i),\ f(i+1)\} \\ v_i=\max\{f(i),\ f(i+1)\} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1) \\ D_i=\operatorname{sgn}(f(i+1)-f(i)) \end{cases}$$
于是当 $v_i>u_i$ 时，$\bar{f}$ 把 $\varDelta_i$ 映成 $(u_i,\ v_i)$，当 $u_i=v_i$ 时，$\bar{f}$ 把 $\varDelta_i$ 映为一点 $f(i)$。此外，当 $D_i=1$ 时，$\bar{f}$ 在 $\varDelta_i$ 上增；$D_i=-1$ 时，$\bar{f}$ 在 $\varDelta_i$ 上减；$D_i=0$ 时 $\bar{f}$ 在 $\varDelta_i$ 上为常数。

考虑由 $n-1$ 个非负整数 $1,2,3,\cdots,n-1$ 所组成的无穷列：
$$I=i_0\,i_1\,i_2\cdots i_k\cdots \qquad (1\leqslant i_k\leqslant n-1)$$
所有这样的无穷列组集合 M。再引入

定义 1 设
$$I=i_0\,i_1\,i_2\cdots i_k\cdots\in M$$
如果满足条件
$$u_{i_k}\leqslant i_{k+1}<v_{i_k} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{2.3}$$
则称为 f-可允许的。所有 f 可允许的序列组成 M 的子集 M_f。

由定义可知，对于序列 $I=\{i_k\}\in M_f$ 恒有
$$D_{i_k}\neq 0 \tag{2.4}$$
由此，可以在 M_f 上引入序关系：

定义 2 对于序列 I，$J\in M_f$ 且 $I\neq J$：
$$I=i_0\,i_1\,i_2\cdots i_k\cdots$$
$$J=j_0\,j_1\,j_2\cdots j_k\cdots$$
约定：

（i） 若 $i_0<j_0$，则 $I<J$；

（ii） 若对 $l=0,1,\cdots,k-1$ 有 $i_l=j_l$，但
$$D_{i_0}D_{i_1}\cdots D_{i_{k-1}}\cdot i_k<D_{i_0}\cdot D_{i_1}\cdots D_{i_{k-1}}\cdot j_n \tag{2.5}$$
则 $I<J$。

易知，在上列定义之下，M_f 成为全序集。

对于 $\bar{f}$ 的定义域中的任一点 $x\in[1,n]$，如果存在正整数 k，使 $\bar{f}^k(x)$ 为整数，则称 x 为 f 的平凡点，否则，称 x 为 f 的非平凡点。显然，要弄清 $\bar{f}$ 的周期轨的型，只需考虑那些非平凡点组成的周期轨，以及由整数点组成的周期轨即可。

下面，我们把 $[1,n]$ 中的每个非平凡点 x，与 M_f 的一个元素对应：

定义 3 设 $x\in[1,n]$ 是非平凡点，令
$$i_k=[\bar{f}^k(x)] \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{2.6}$$
这里 $[\cdot]$ 表整数部分。(因而(2.6)意味着 $\bar{f}^k(x)\in\varDelta_{i_k}$)。记
$$I(x)=i_0\,i_1\,i_2\cdots i_k\cdots$$
称序列 $I(x)$ 为 x（在 $\bar{f}$ 作用下）的踪迹。

易知有：

引理 1 对 f 的任一非平凡点 x，总有 $I(x)\in M_f$。

引理 2 对于 f 的两个非平凡点 x 与 y，当 $x<y$ 时有 $I(x)\leqslant I(y)$。

引理 3 若非整数 x 是 $\bar{f}$ 的 m-周期点，则 $I(x)$ 必为循环序列，其最小循环节的长度 d 是 m 的约数。

定义 4 设 $x\in[1,n]$ 是任一点。如果有 $J\in M_f$，

$$J=j_0j_1j_2\cdots j_k\cdots$$

使得

$$\tilde{f}^k(x)\in\bar{\Delta}_{j_k} \tag{2.7}$$

（这里$\bar{\Delta}$表Δ的闭包），则说 x 与 J 相匹配．记作 $x\wedge J$．

显然，同一个 x 可以与不同的 J 相匹配．反过来，同一个 J 也可以与不的 x 相匹配．但我们仍可以有：

引理 4 若 $x_1\wedge J_1$，$x_2\wedge J_2$，如果 $J_1<J_2$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $x_1<x_2$．

引理 5 对任一个循环序列 $J\in M_f$，至少有一个 $\tilde{f}$ 的周期点 x 使得：

（i） 若 x 是平凡的，则 $x\wedge J$，若 x 是非平凡的，则 $I(x)=J$；

（ii） x 的周期恰为 J 的最小循环节的长度；

（iii） 由 J 可以在有穷步骤内唯一地确定 x 所生成的周期轨的型．

以上诸引理都可用熟知的手法证明，只有引理5(iii)要说明一下：以 J_k 记把 J 的前k个元素删去后得到的序列($k=0,1,2,\cdots$)，显然有 $f^k(x)\wedge J_k$．由于 x 的周期 m 恰等于 J 的最小循环节之长，故对于 $k=0,1,2,\cdots,m-1$，诸 J_k 互不相同．于是根据 J_k 之间的大小次序可以排出 $f^k(x)$之间的大小次序，从而唯一地确定 x 所生成的周期轨的型．

这样，为了确定 $\tilde{f}$ 的所有m-周期轨的型，有必要考查M_f中所有那些最小循环节为 m 的序列．因为每个这样的序列确定的型都是 $\tilde{f}$ 的某个周期轨的型（当然，要删去那些重复的）．反过来，这样做是否已经够了？为了不遗漏m-周期轨的所有的型，是不是还要对m的每个约数d考查那些最小循环节为d的序列？下面的引理告诉我们，这是不必要的．

引理 6 设 $x\in[1,n]$是 f 的非平凡点，且是 $\tilde{f}$ 的m-周期点，但$I(x)$的最小循环节长度 $d<m$，则存在整数 x^*，x^* 也是 f 的 m-周期点，且 x^* 所生成的周期轨与 x 所生成的周期轨有相同的型．

证明 记 $y=\tilde{f}^d(x)$，则 $I(x)=I(y)$．这表明，对任一非负整数 k，$\tilde{f}^k(x)$和 $\tilde{f}^k(y)$落在同一个小区间 Δ_i 内．也就是说，$\tilde{f}$ 在区间 $[\tilde{f}^k(x);\ \tilde{f}^k(y)]$ 上是线性的．这里我们按习惯用$[\alpha;\ \beta]$记区间$[\alpha,\ \beta]$或$[\beta,\ \alpha]$中之一．

记 $F=\tilde{f}^m$，$g=\tilde{f}^d$．又则 $m=d\cdot l$，则有 $F=g^l$．设

$$I(x)=i_0i_1\cdots i_k\cdots$$

由于 x 和 y 都是 F 的不动点，故 F 在 $[x;\ y]$ 上是恒同映射．按 $\tilde{f}$ 之定义及 $I(x)\in M_f$，可知在Δ_{i_0}，Δ_{i_1}，$\cdots$，$\Delta_{i_{d-1}}$上均有$|\tilde{f}'|\geqslant1$．但又由 $F'=(\tilde{f}^m)=1$，可知在每个Δ_{i_k}上均有$|\tilde{f}'|=1$．也就是说，$\tilde{f}$ 恰恰把每个Δ_{i_k}映成$\Delta_{i_{k+1}}$．亦即 $g=\tilde{f}^d$ 恰将Δ_{i_0}映到自身．由于$g(x)=y$，故 x，y 属于 g 的同一个 l-周期轨．显然，只能有 $l=2$，从而 $g(y)=x$．

为确定起见，不妨设 $x<y$．我们指出：若取 Δ_{i_0}的左端 i_0 为 x^*，则 x^* 也是 $\tilde{f}$ 的 m-周期点，并且 x^* 生成的周期轨和 x 生成的周期轨有相同的型．

事实上，由于 g 在 Δ_{i_0}上线性，又知 $g(x)=y$ 和 $g(y)=x$，而且 g 把整数x^*变为整数，可知有 $g(i_0)=i_0+1$，$g(i_0+1)=i_0$．这表明 i_0 和 i_0+1 属于 $\tilde{f}$ 的同一周期轨．其周期 t 是 m 的约数．

其次，由于 $\tilde{f}$ 恰把 Δ_{i_k}映成 $\Delta_{i_{k+1}}$，可见 $\Delta_{i_0},\Delta_{i_1},\Delta_{i_2},\cdots,\Delta_{i_{d-1}}$两两不同．否则，$I(x)$的最小循环节将小于 d 了．但是，在 $\tilde{f}$ 作用下，i_0 和 i_0+1 将跑遍诸 Δ_{i_k}的全部端点，这些端点至少是 $d+1$个．从而$t\geqslant d+1>m/2$，这表明 $t=m$．进而表明 $\bar{\Delta}_{i_0}$，$\bar{\Delta}_{i_1}$，$\cdots$，$\bar{\Delta}_{i_{d-1}}$是两两不相交的．

现在，我们有了两个m-周期轨：

$$\{x,\ \tilde{f}(x),\ \cdots\cdots,\ \tilde{f}^{m-1}(x)\}$$
$$\{x^*,\ \tilde{f}(x^*),\ \cdots\cdots,\ \tilde{f}^{m-1}(x^*)\},$$

剩下的是要证明这两个周期轨有相同的型。为此，只要证明：对任意的正整数$0\leqslant k<l\leqslant m-1$，当$\tilde{f}^k(x)<\tilde{f}^l(x)$时必有$\tilde{f}^k(x^*)<\tilde{f}^l(x^*)$，并且当$f^l(x)<\tilde{f}^k(x)$时必有$\tilde{f}^l(x^*)<\tilde{f}^k(x^*)$即可。

由于x和x^*属于同一个区间$\varDelta_{i_0}$，故$\tilde{f}^k(x^*)$与$\tilde{f}^k(x)$属于同一个$\varDelta_{i_k}$，而$\tilde{f}^l(x^*)$与$\tilde{f}^l(x)$同属于$\varDelta_{i_l}$，当$\varDelta_{i_k}$不同于$\varDelta_{i_l}$时，所要的结论显然成立。如果$\varDelta_{i_k}=\varDelta_{i_l}$，即$l=k+d$时，必有$\tilde{f}^l(x)=\tilde{f}^k(y)$，记$y^*=i_0+1=\tilde{f}^d(x^*)$，有$\tilde{f}^l(x^*)=\tilde{f}^k(y^*)$。由$x^*<x<y<y^*$及$\tilde{f}$在$\varDelta_{i_s}$上的单调性，可知$\tilde{f}^k(x)<\tilde{f}^k(y)$蕴含$\tilde{f}^k(x^*)<\tilde{f}^k(y^*)$，且$\tilde{f}^k(y)<\tilde{f}^k(x)$蕴含$\tilde{f}^k(y^*)<\tilde{f}^k(x^*)$。

这表明两个周期轨有相同的型。 Q.E.D.

于是得到：

定理 1 对于给定的$f\in C(S_n)$和正整数m，有可行的办法以给出$\tilde{f}$的所有m周期轨的型。

事实上，按引理 5 和引理 6，只要列出M_f中所有那些最小循环节长为m的序列并确定它对应的周期轨的型，再添上f的周期轨的型，删去重复的，便可以了。

为了最终解决我们所提出的确定某型周期轨所蕴含的所有周期轨的型的问题，我们还需要一个引理：

引理 7 设$f\in C(S_n)$，$S_n\subset[a,b]$，而连续函数$\varphi(x)$是f在$[a,b]$上的一个开拓。则对于$\tilde{f}\in L(S_n)$的任一周期轨$\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m-1}\}$，均存在$\varphi$的周期轨$\{z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{m-1}\}$，使这两个周期轨有相同的型。

这个引理从直观上看是显然的。但证起来颇费唇舌。作为附录。

现在便可得到

定理 2 设$f\in C(S_n)$，对于给定的有序点组上的自映射的型A，可以用能行的步骤确定出一切满足条件$A\lhd B$的m-周期轨的型B。这里m是给定的正整数。

作为特款，对于具体给定的两种周期轨的型A与B，究竟是$A\lhd B$、$B\lhd A$、或二者同时成立、同时不成立，也就有办法判定了。

附录 引理 7 的证明

此处对第二节中提出的引理 7 给出一个证明。为此，我们先做一些准备工作。

定义0.1 设f：$R\to R$是实数轴到实数轴上的连续映射，$I=[a,b]\subset R$，称f在I上是伪增（减）的，如果对$\forall x\in \mathrm{int}I$，

$$f(a)<f(x)<f(b)$$
$$(f(a)>f(x)>f(b))$$

并称I是f的一个伪增（减）区间。

定义0.2 设I，J是R的两个内部非空的闭子区间。如果$\max I\leqslant\min J$，则称I小于J，记为$I<J$。

引理0.1 设f：$I\to R$是闭区间到实数轴上的连续映射。如果有I的一串闭子区间I_0，I_1，$\cdots$，I_{n-1}满足$I_0\xrightarrow{f}I_1\to\cdots\to I_{n-1}\to I_0$（$I\xrightarrow{f}J$表示$f(I)\supset J$），则存在$x_0\in I_0$，使$f^n(x_0)=x_0$，$f^i(x_0)\in I_i(i=0,\ 1,\ \cdots\ n-1)$。

该引理证明平凡，略去。

引理 0.2 设$f: I\to R$是闭区间到实数轴上的一个连续映射，$J=[a, b]\subset I$，$I_1<I_2<\cdots<I_n$是I的n个两两内部互不相交的闭子区间。如果$f(J)\supset\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$

则当$f(a)<f(b)$ ($f(a)>f(b)$)时，存在f的$n+1$个伪增（减）区间J'，$J_1<J_2<\cdots<J_n$，($J_1>J_2>\cdots>J_n$)

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i\subset J'\subset J$ 满足 $f(J')=[f(a), f(b)]$，

$$f(J_i)=I_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n.)$$

证明 设$J'=[a', b']$，$I_i=[a_i, b_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

(1) $f(a)<f(b)$

取 $a'=\max\{x\in J\mid f(x)=f(a)\}$

$b'=\min\{a<x\leqslant b\mid f(x)=f(b)\}$

显然，$J'=[a', b']\subset J$是f的一个伪增区间，且$f(J')=[f(a), f(b)]$。

令
$$c_1=\min\{x\in J'\mid f(x)=a_1\}$$
$$d_1=\min\{c_1<x\leqslant b'\mid f(x)=b_1\}$$
$$c_i=\min\{d_{i-1}\leqslant x\leqslant b'\mid f(x)=a_i\}$$
$$d_i=\min\{c_i<x\leqslant b'\mid f(x)=b_i\}$$
$$(i=2, 3, \cdots, n)$$

由于对$1\leqslant i\leqslant n$，$a_i<b_i$，故由上述做法知存在f的一个伪增区间$J_i\subset[c_i, d_i]\subset J'$满足$f(J_i)=I_i$。又由于$[c_i, d_i]<[c_{i+1}, d_{i+1}]$，

故
$$J_i<J_{i+1} (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

(2) $f(a)>f(b)$

此时，a'，b'的取法同(1)，且J'是f的一个伪减区间，$f(J')=[f(b), f(a)]$。

令
$$d_1=\max\{x\in J'\mid f(x)=a_1\}$$
$$c_1=\max\{a'\leqslant x<d_1\mid f(x)=b_1\}$$
$$d_i=\max\{a'\leqslant x\leqslant c_{i-1}\mid f(x)=a_i\}$$
$$c_i=\max\{a'\leqslant x<d_i\mid f(x)=b_i\}$$
$$(i=2, 3, \cdots, n)$$

由于$a_i<b_i$，根据上J'取法知$\exists f$的一个伪减区间$J_i\subset[c_i, d_i]\subset J'$ 满足
$$f(J_i)=I_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

且由$[c_{i+1}, d_{i+1}]<[c_i, d_i]$，故$J_{i+1}<J_i$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$。 Q.E.D

定理（第二节的引理7） 设$f\in C(S_n)$，$S_n\subset[a, b]$，而连续函数$\varphi(x)$是f在$[a, b]$上的一个开拓。则对于$f\in L(S_n)$的任一周期轨$\{x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$，均存在$\varphi(x)$的周期轨$\{z_0, z_1, \cdots, z_{m-1}\}$，使这两个周期轨有相同的型。

证明 如果S_n中含有与$\{x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$同型的周期轨，结论显然成立。以下我们考虑$S_n$中不含有与$\{x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$同型周期轨的情形。此时$x_0$是$f$的一个非平凡点。
由引理6，$I(x_0)$的最小循环节长为m。

设
$$I(x_0)=I_0I_1\cdots I_{m-1}I_0I_1\cdots I_{m-1}\cdots\cdots$$

由定义，$I(x_0)$的前m个元构成了如下长为m的素循环节（即它的最小循环节长为m）

$$I_0\xrightarrow{f} I_1\to\cdots\to I_{m-1}\to I_0 \tag{A.1}$$

且
$$f^i(x_0)\in \operatorname{int} I_i \qquad (i=0, 1, 2, \cdots, m-1).$$

由于φ是f的一个连续开拓，根据引理0.2，存在闭区间$J_i\subset I_i$满足：$\bar{f}$在I_i上递增（减），则φ在J_i上伪增（减），且$\varphi(J_i)=\bar{f}(I_i)$，

$$i=0,1,\cdots,m-1$$

显然
$$J_0\xrightarrow{\varphi}J_1\to\cdots\to J_{m-1}\to J_0\tag{A.2}$$
是一个长为m的素循环节。

如果$\{I_i\}_{i=0}^{m-1}$中的元两两不同，则根据J_i的选择和引理0.1知，由(A.2)所导出的φ的一条m-周期轨和$\bar{f}$的周期轨$\{x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}\}$同型。

如果$\{I_i\}_{i=0}^{m-1}$中含有相同元，不失一般性，设I_0在(A.1)中出现至少两次（(A.1)中最后一个I_0不计在内），且跟在I_0之后的所有不同元为

$$I_{S1}<I_{S2}<\cdots<I_{St}\qquad(t\geqslant1)$$

这里$I_0\to I_{Si}$是(A.1)中一个子节（$i=1,2,\cdots,t$）。由此可知J_0在(A.2)中出现至少两次，且跟在J_0之后的所有不同元为

$$J_{S1}<J_{S2}<\cdots<J_{St}\qquad(t\geqslant1)$$

这里$J_0\to J_{Si}$是(A.2)中一个子节($i=1,2,\cdots,t$)。

如果$\bar{f}$在I_0上递增（减），则φ在J_0上伪增（减）。由引理0.2，存在$(I_{S_i}^{(0)})_{i=1}^t$和$(J_{S_i}^{(0)})_{i=1}^t$，使得

$$\begin{gathered}I_{S_1}^{(0)}<I_{S_2}^{(0)}<\cdots<I_{S_t}^{(0)}\\(>)\quad(>)\,(>)\end{gathered}$$

和
$$\begin{gathered}J_{S_1}^{(0)}<J_{S_2}^{(0)}<\cdots<J_{S_t}^{(0)}\\(>)\quad(>)\,(>)\end{gathered}$$

使
$$I_{S_i}^{(0)}\subset I_0,\qquad J_{S_i}^{(0)}\subset J_0$$

满足
$$\bar{f}\text{在}I_{S_i}^{(0)}\text{上递增（减），}$$
$$\varphi\text{在}J_{S_i}^{(0)}\text{上伪增（减），}$$

且
$$\bar{f}(I_{S_i}^{(0)})=I_{Si},\quad\varphi(J_{S_i}^{(0)})=J_{Si}\qquad(i=1,2,\cdots,t)$$

将(A.1)、(A.2)中子节$I_0\to I_{Si}$，$J_0\to J_{Si}$分别换为$I_{S_i}^{(0)}\to I_{Si}$，$J_{S_i}^{(0)}\to J_{Si}(1\leqslant i\leqslant t)$。由此对应于(A.1)，(A.2)，我们分别得到了一个新的长为m的素循环节(A.3)、(A.4)：

$$I_0'\xrightarrow{\bar{f}}I_1'\to\cdots\to I_{m-1}'\to I_0'\tag{A.3}$$

满足$\bar{f}^i(x_0)\in\operatorname{int}I_i'$，$\exists\,k_i$使$\bar{f}^{k_i}(\partial I_i')\subset S_n$（$\partial I_i'$表示区间$I_i'$的端点，$i=0,1,\cdots,m-1$）。

$$J_0'\xrightarrow{\varphi}J_1'\to\cdots\to J_{m-1}'\to J_0'\tag{A.4}$$

满足对$0\leqslant i\leqslant m-1$，$\exists\,l_i$使$\varphi(\partial J_i')\subset S_n$。

且(A.3)和(A.4)存在如下关系：

如果$I_i'<I_j'\Rightarrow J_i'<J_j'\qquad(0\leqslant i,\ j\leqslant m-1)$。

根据我们的作法，(A.3)和(A.1)；(A.4)和(A.2)相比满足

(*)　前者所含不同元的个数比后者所含不同元的个数多（即不同元的个数增加了）。

以下再对(A.3)、(A.4)中的重复元按上述方法继续进行处理。由(*)知，经过有限次的处理后，可得到如下两个长为m的素循环节

$$I_0^*\xrightarrow{\bar{f}}I_1^*\to\cdots\to I_{m-1}^*\to I_0^*$$
$$J_0^*\xrightarrow{\varphi}J_1^*\to\cdots\to J_{m-1}^*\to J_0^*\tag{A.5}$$

满足　i)　对于$0\leqslant i,\ j\leqslant m-1,\ i\neq j$

$$\mathrm{int}I_i^*\cap\mathrm{int}I_j^*=\phi,\quad \mathrm{int}J_i^*\cap\mathrm{int}J_j^*=\phi.$$

ii) 如果$I_i^*<I_j^*$，则 $J_i^*<J_j^*$ $(0\leqslant i,j\leqslant m-1)$.

iii) 对$0\leqslant i\leqslant m-1$，$\exists k_i^*$，$l_i^*$ 满足

$$\mathfrak{f}^{k_i^*}(\partial I_i^*)\subset S_n$$

$$\varphi^{l_i^*}(\partial J_i^*)\subset S_n$$

iv) $\mathfrak{f}^i(x_0)\in\mathrm{int}I_i^*$ $(0\leqslant i\leqslant m-1)$

根据引理0.1知由(A.5)导出的φ的一个 m-周期点z_0满足 $z_i=\varphi^i(z_0)\in\mathrm{int}J_i^*(0\leqslant i\leqslant m-1)$. 由上述i)～iv)可知$\varphi$的周期轨$\{z_0,\ z_1,\ \cdots z_{m-1}\}$和$\mathfrak{f}$的周期轨 $\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m-1}\}$是同型的. Q.E.D.

参 考 文 献

[1] Sarkovskii, A. N., *Ukr. Mat. Z.*, **16** (1964), 6—71.

[2] Stefan, P., *Comm. Math. Phys.*, **54** (1977), 237—248.

[3] 张景中、杨路, 数学进展, **16**, 1 (1987), 33—48.

[4] 章雷, 有限有序集上的自映射, 数学学报.(待发表)

[5] Coppel, W. A., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **93** (1983), 397—408.

[6] Block, L. and D. Hart, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **3** (1983), 533—539.

[7] Block, L. and D. Hart, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 161—164.

[8] Bernhardt, C., *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 155—160.

The Criterion Algorithm of Relation of Implication between Periodic Orbits (Ⅰ)

Zhang Jing-zhong Yang Lu Zhang Lei

(Chengdu Branch, Academia Sinica, Chengdu)

Abstract

In recent years, there is a wide interest in Sarkovskii's theorem and the related study. According to Sarkovskii's theorem, if the continuous self-map f of the closed interval has a 3-periodic orbit, then f must has an n-periodic orbit for any positive integer n. But f can not has all n-periodic orbits for some n. For example, let

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & \left(x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right)\\ 2(1-x) & \left(x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\right)\end{cases}$$

Evidently, f has only one kind of 3-periodic orbit in the two kinds of 3-periodic orbits. This explains that it isn't far enough to uncover the relation between periodic orbits by information which Sarkovskii's theorem has offered. In this paper, we raise the concept of type of periodic orbits, and give a feasible algorithm which decides the relation of implication between two periodic orbits.