应用数学和力学，第10卷第10期（1989年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

任意变系数微分方程的精确解析法

纪振义　　叶开沅

（安徽建筑工业学院一系）　（兰州大学力学系）

（1988年7月18日收到）

摘　要

工程中的许多问题归结为求解任意变系数微分方程的解．本文首次提出精确解析法，用以求解任意变系数微分方程在任意边界条件下的解．文中还给出精确解析法的一般计算格式，得到了一致收敛于精确解及其任意阶导数的解析表达式，并给出收敛性证明．文末给出四个算例，均得到较好的结果，证明了本文理论的正确性．

一、引　言

工程力学及其他学科许多问题可归结为求解变系数微分方程，如计算在任意边界条件下的非均匀变截面梁及非均匀轴对称圆柱壳的位移和内力等，快速有效地求解变系数微分方程具有重大的实际意义．

众所周知，用解析法求解变系数微分方程，只有在特定的情况下，才能得到精确解，在一般的情况下是无能为力的．用差分法求解这一问题，是用一组差分方程代替微分方程．它是从整体上考虑的，对工程中复杂的结构形式，边界条件和载荷情况难以处理．在各种不同边界条件中须采取特殊处理，这对编制一个标准程序，计算工程中遇到的各种复杂的边界条件是不利的．有限元法是以单元为基础来求解微分方程的，因此克服了差分法的缺点，但它需要微分方程正定．

文献[1]首次提出阶梯折算法，用以求解非均匀弹性力学．这一方法是把非均匀弹性体分成若干单元，在每个单元上弹性体可以看作是均匀的，然后利用物理上的连续条件得到一个初参数形式表达的解析表达式．由于该方法求解变系数微分方程是从物理概念推出，因而适用范围有一定的限制．

本文在[1]的基础上，提出求解任意变系数微分方程在任意边界条件下的精确解析法．它有以下若干特点：①该方法是以单元为基础考虑的，因此不受复杂载荷和任意边界的限制．并且它能求解非正定微分方程，还可给出初参数形式表达的解析解．②在工程力学中，得到的位移和应力具有相同的收敛速度，并能求出位移的任意阶高阶导数．③收敛速度快，计算量小．算例的误差表明，所得到的解及其任意阶导数均有二阶收敛速度．对 k 阶微分方程，

至多只需求解k阶线性代数方程组。

文中给出精确解析法求解变系数微分方程的计算公式及任意边界条件的处理方法。得到了一致收敛于精确解及其任意阶导数的解析表达式，给出收敛性证明。文末给出四个算例，在前三个算例中计算了带有复杂边界条件非正定微分方程，第四个算例给出本方法在非均匀弹性力学中的应用，均得到了满意的结果，表明了本文理论的正确性。

二、精确解析法的理论基础

对一般任意变系数k阶线性微分方程可以写为

$$Aw(x)=\sum_{\substack{m=0\\0\leq v_m+u_m\leq k}}^{k}(P_m(x)w(x)^{(v_m)})^{(u_m)}=f(x)\qquad x\in[x_0,x_N]\tag{2.1}$$

式中u_m和v_m均为正整数。我们把区间$[x_0,x_N]$分成N个单元，设第i个单元的区间为$[x_{i-1},x_i)$。并假定(2.1)中系数$P_m(x)\in C^{\max(u_m,v_m)}[x_{i-1},x_i)$ $(i=1,\cdots,N)$和右端项$f(x)\in L_2[x_0,x_N]$，以及微分算子A在给定的边界条件下对任意的$f\in L_2[x_0,x_N]$有逆算子A^{-1}存在。

利用精确解析法，求解方程(2.1)在第i个单元上可转化为求解常系数微分方程

$$\tilde{A}_i\tilde{w}(x)=\sum_{\substack{m=0\\0\leq v_m+u_m\leq k}}^{k}(P_m(\bar{x}_i)\tilde{w}(x)^{(v_m)})^{(u_m)}=f(x)\qquad x\in[x_{i-1},x_i)\tag{2.2}$$

式中$\bar{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2$。我们令

$$u=\max(u_m),\quad v=\max(v_m)\qquad(m=0,1,\cdots,k)\tag{2.3}$$

及

$$\left.\begin{aligned}F_j(x)&=\sum_{m=0}^{k}\{u_m-j\}^\circ(P_m(x)w(x)^{(v_m)})^{(u_m-j)}\qquad(j=u,u-1,\cdots,1)\\\tilde{F}_j(x)&=\sum_{m=0}^{k}\{u_m-j\}^\circ P_m(\bar{x}_i)\tilde{w}(x)^{(v_m+u_m-j)}\qquad x\in[x_{i-1},x_i)\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

式中记号

$$\{u_m-j\}^\circ=\begin{cases}1 & u_m\geq j\\0 & u_m<j\end{cases}\tag{2.5}$$

为Heaviside函数。注意(2.1)和(2.2)均为线性方程，因此内积

$$\left(\varphi,\ Aw-\sum_{i=1}^{N}\tilde{A}_i\tilde{w}(x)\right)=0\tag{2.6}$$

这里$\varphi\in W_2^{(u)}[x_0,x_N]$，$W_2^{(u)}$为索伯列夫空间[2]。为方便起见，这里认为$P_m(x)$ $(m=1,2,\cdots,k)$和解w均为实数，对(2.6)进行分部积分得

$$\left(\varphi,\ Aw-\sum_{i=1}^{N}\bar{A}_i\bar{w}(x)\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=0}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(P_m(x)w(x)^{(v_m)}-P_m(\bar{x}_i)\bar{w}(x)^{(v_m)})^{(u_m)}dx$$

$$=(A^*\varphi,w(x)-\bar{w}(x))$$

$$+\sum_{m=0}^{k}(-1)^{u_m}\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{dP_m}{dx}(\bar{x}_i)\varphi^{(u_m)}\bar{w}(x)^{(v_m)}\Delta x+O(\Delta x^2)\right)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{v}(-1)^{u_m+j-1}(w(x)-\bar{w}(x))^{(j-1)}F_j^*(x)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{u}(-1)^{j-1}\varphi(x)^{(j-1)}(F_j(x)-\bar{F}_j(x))\right|_{x_{i-1}}^{x_i-0}\quad(2.7)$$

式中 $$A^*\varphi=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{(u_m+v_m)}(P_m(x)\cdot\varphi(x)^{(u_m)})^{(v_m)}$$

$$F_j^*(x)=\sum_{m=0}^{k}\{v_m-j\}^{\circ}(P'_m(x)\varphi(x)^{(u_m)})^{(v_m-j)}\qquad(j=1,\cdots,v)\quad(2.8)$$

A^*是A的共轭微分算子，$w^{(j-1)}(x)$和$F_j^*(x)$及$\varphi(x)^{(j-1)}$和$F_j(x)$互为共轭边界条件[3]。当$N\to\infty$时，(2.7)中右端第二项为零。不失一般性，假定方程(2.1)中的 $w^{(j-1)}(x)$ $(j=1,2,\cdots,v)$ 和F_i $(i=1,2,\cdots,u)$在单元交接处连续。如果方程(2.2)在单元交接处的连续性条件

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{w}^{(j-1)}(x_{i-1}-\varepsilon)=\bar{w}^{(j-1)}(x_{i-1})\qquad(j=1,\cdots,v)\quad(2.9)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{F}_j(x_{i-1}-\varepsilon)=\bar{F}_j(x_{i-1})\qquad(j=1,\cdots,u)\quad(2.10)$$

满足，从(2.7)则可得

$$\lim_{N\to\infty}(A^*\varphi,w-\bar{w})+\sum_{j=1}^{v}(-1)^{u_m+j-1}(w(x)-\bar{w}(x))^{(j-1)}F_j^*(x)\Big|_{x_0}^{x_N}$$

$$+\sum_{j=1}^{u}(-1)^{j-1}\varphi(x)^{(j-1)}(F_j(x)-\bar{F}_j(x))\Big|_{x_0}^{x_N}=0\quad(2.11)$$

这里已假定$F_j^*(x)$ $(j=1,\cdots,v)$在$[x_0,x_N]$上连续。对k阶微分方程来说，有 k 个边界条件已知。在已知边界条件上，我们令

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{w}(x)^{(i_m-1)}=w(x)^{(i_m-1)} & (m=1,2,\cdots,M)\\ \bar{F}_{j_l}(x)=F_{j_l}(x) & (l=1,2,\cdots,L)\end{array}\right\}\quad(x=x_0\text{或}x_N)\quad(2.12)$$

在k个未知边界条件上，令其对应的共轭边界条件为零，即

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi(x)^{(j_l-1)}=0 & (m=M+1,M+2,\cdots,v)\\ F_{i_m}^*(x)=0 & (l=L+1,L+2,\cdots,u)\end{array}\right\}\quad(x=x_0\text{或}x_N)\quad(2.13)$$

把(2.12)和(2.13)代入(2.11)式，便可得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(A^*\varphi, w-\bar{w})=0 \tag{2.14}$$

由[3]可以得到，方程

$$A^*\varphi=f(x) \qquad x\in[x_0,x_N], \quad f\in L_2[x_0,x_N]$$

在已知边界条件为(2.13)的情况下，如果A有逆A^{-1}，则A^*也有逆$(A^*)^{-1}$。特别地，当

$$A^*\varphi=w-\bar{w}$$

时，有唯一解 $\varphi\in W_2^{(u)}$使F_i^* $(i=1,\cdots,v)$在区间$[x_0,x_N]$上连续，因此可得

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_{x_0}^{x_N}(w-\bar{w})^2dx\right)=\lim_{N\to\infty}\|w-\bar{w}\|^2_{L_2[x_0,x_N]}=0 \tag{2.15}$$

由于$(w(x)-\bar{w}(x))^{(i-1)}$ $(i=1,\cdots,v)$和$F_j-\bar{F}_j$ $(j=1,\cdots,u)$在闭区间$[x_0,x_N]$上连续，利用(2.15)式不难证明

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\bar{w}^{(i-1)}(x)\xlongequal{\text{一致收敛}}w^{(i-1)}(x) \qquad (i=1,\cdots,v)\\&\lim_{N\to\infty}\bar{F}_j(x)\xlongequal{\text{一致收敛}}F_j(x) \qquad (j=1,\cdots,u)\end{aligned}\right\} x\in[x_0,x_N] \tag{2.16}$$

在工程力学中(2.16)式具有明显的物理意义$w^{(i-1)}$代表广义位移，$F_j(x)$代表广义内力。

至此，我们得出结论：用精确解析法求解微分方程(2.1)，转化为求解常系数微分方程(2.2)。在满足单元交接处连续条件(2.9)～(2.10)和边界条件(2.12)的情况下，所得到的解在(2.16)式的意义下一致收敛于精确解。

由(2.16)式便可以推出精确解及其任意阶导数的一致收敛的递推表达式

$$\left.\begin{aligned}
&w(x)^{(i)}=\lim_{N\to\infty}\bar{w}(x)^{(i)} \qquad (i=0,1,\cdots,v-1)\\
&w(x)^{(k-j)}=\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{k}\delta(k-u_m-v_m)P_m(x)}\sum_{m=0}^{k}\{u_m-j\}^\circ\Big(\lim_{N\to\infty}P_m(\bar{x}_i)\bar{w}(x)^{(u_m+v_m-j)}\\
&\qquad -\{k-(u_m+v_m+1)\}^\circ(P_m(x)w(x)^{(v_m)})^{(u_m-j)}\\
&\qquad -\delta(k-u_m-v_m)\{u-j-1\}^\circ\sum_{z=1}^{u-j}C_{u-j}^z(P_m(x))^{(z)}w(x)^{(k-j-z)}\Big)\\
&\qquad\qquad (j=1,2,\cdots,u)\\
&w(x)^{(k+n)}=\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{k}\delta(k-u_m-v_m)P_m(x)}\lim_{N\to\infty}\Big(f^{(n)}(x)-\sum_{m=0}^{k}\{k-(u_m+v_m+1)\}^\circ\\
&\qquad\cdot(P_m(x)w(x)^{(v_m)})^{(u_m+n)}-\sum_{m=0}^{k}\delta(k-u_m-v_m)\{u+n-1\}^\circ\\
&\qquad\cdot\sum_{z=1}^{u+n}C_{u+n}^z(P_m(x))^{(z)}w(x)^{(k+n-z)}\Big) \qquad (n=0,1,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

式中C_i^s为二项式系数。记号

$$\delta(i)=\begin{cases}1 & i=0\\ 0 & i\neq 0\end{cases}$$

利用(2.17)式便可求出精确解的任意阶导数。

三、精确解析法的一般格式

求解方程(2.1)，首先把区间$[x_0,x_N]$分成N个单元，在第i个单元上转化为求解常系数微分方程(2.2)。不难用代数的方法得到方程(2.2)的通解

$$\tilde{w}(x)=\sum_{m=1}^{k}C_{im}f_{im}(x-x_{i-1})+Q_i(x) \qquad x\in[x_{i-1},x_i) \tag{3.1}$$

式中$f_{im}(x)$是(2.2)的齐次解，$Q_i(x)$是(2.2)的特解，C_{im}是待定常数，我们定义

$$\{\delta(x)\}=\{\tilde{w}\ \ \tilde{w}^{(1)}\ \cdots\ \tilde{w}^{(v-1)}\ \ \tilde{F}_1\ \cdots\ \tilde{F}_u\}^T \tag{3.2}$$

$\tilde{F}_m$由(2.4)式决定。把(3.1)代入(3.2)即可得到

$$\{\delta(x)\}=[G_i(x-x_{i-1})]\{C_i\}+\{P_i(x)\} \qquad x\in[x_{i-1},x_i) \tag{3.3}$$

式中

$$[G_i(x)]=\begin{bmatrix} f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{im}(x)\\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{im}(x)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ f_{i1}^{(v-1)}(x) & f_{i2}^{(v-1)}(x) & \cdots & f_{im}^{(v-1)}(x)\\ B_1f_{i1}(x) & B_1f_{i2}(x) & \cdots & B_1f_{im}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_uf_{i1}(x) & B_uf_{i2}(x) & \cdots & B_uf_{im}(x)\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$[G_i]$是$k\times k$阶函数矩阵。B_j是微分算子，定义为

$$B_j=\sum_{m=0}^{k}\{u_m-j\}^{\circ}P_m(\bar{x}_i)\frac{d^{v_m+u_m-j}}{dx^{v_m+u_m-j}} \tag{3.5}$$

矢量

$$\left.\begin{aligned}&\{P_i(x)\}=\{Q_i(x)\ \ Q'_i(x)\ \cdots\ Q_i^{(v-1)}\ \ B_1Q_i(x)\ \cdots\ B_uQ_i(x)\}^T\\ &\{C_i\}=\{C_{i1}\ \ C_{i2}\ \cdots\ C_{ik}\}^T\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

由(3.3)不难得到方程(2.2)的初参数解

$$\begin{aligned}\{\delta(x)\}=&[G_i(x-x_{i-1})][G_i(0)]^{-1}(\{\delta(x_0)\}-\{P_i(x_{i-1})\})+\{P_i(x)\}\\ &+\sum_{m=1}^{i-1}\{x-x_m\}^{\circ}[G_i(x-x_{i-1})][G_i(0)]^{-1}\{A_m\} \qquad x\in[x_{i-1},x_i)\end{aligned} \tag{3.7}$$

式中$\{A_m\}$是常数矢量，由单元之间连续条件而定。由连续条件(2.9)～(2.10)，即可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\delta(x_{i-1}-\varepsilon)\}=\{\delta(x_{i-1})\} \tag{3.8}$$

从上式我们可推出

$$\{A_{i-1}\}=([G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1}-[I])\{\delta(x_0)\}$$
$$-[G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1}\{P_{i-1}(x_{i-2})\}+\{P_{i-1}(x_{i-1})\}$$
$$+\sum_{m=1}^{i-2}\{x-x_m\}^{\circ}([G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1}-[I])\{A_m\} \tag{3.9}$$

(3.7)和(3.9)式即是求解任意变系数微分方程(2.1)的一般格式。

四、任意边界条件下微分方程的解

(3.7) 和 (3.9) 是一个以初参数$\{\delta(x_0)\}$表示的解析解，如果$\{\delta(x_0)\}$已知，便可得到$\{\delta(x)\}$，再由(2.17)式即可得到精确解的任意阶导数。现把端点坐标x_N代入(3.7)和(3.9)式，整理得

$$\{\delta(x_N)\}=[K]\{\delta(x_0)\}+\{K_f\} \tag{4.1}$$

$[K]$和$\{K_f\}$均为已知的矩阵和向量。在力学和工程问题中$\bar{w}^{(i)}$和$\bar{F}_j$一般可具有明显的物理意义，如在非均匀轴对称圆柱壳中，$\bar{w}^{(i)}$表示位移，$\bar{F}_j$表示内力。由(2.12)式，可直接代入边界条件求出$\{\delta(x_0)\}$。如果在$\{\delta(x_N)\}$中有l个元素已知，根据解的唯一性，则$\{\delta(x_0)\}$中有l个元素未知，仅需求解l阶线性代数方程组即可求出$\{\delta(x_0)\}$。

如果给定边界条件比较复杂，是$w(x)$及其导数的线性组合，设为$\{\delta_1(x_0)\}$和$\{\delta_2(x_N)\}$。由(2.17)式总可推出

$$\{\delta_1(x_0)\}=[L_1]\{\delta(x_0)\},\quad \{\delta_2(x_N)\}=[L_2]\{\delta(x_N)\} \tag{4.2}$$

代入(4.1)式，则可得

$$\{\delta_2(x_N)\}=[L_2]^{-1}[K][L_1]\{\delta_1(x_0)\}+[L_2]^{-1}\{K_f\} \tag{4.3}$$

代入已知边界条件，由(4.2)～(4.3)即可求出$\{\delta(x_0)\}$。

应当指出，以上对边界条件的处理在计算机上实现相当容易，易于编成一个标准程序计算各种边界条件。我们令

$$[U]=[L_2]^{-1}[K][L_1],\quad \{U_f\}=[L_2]^{-1}\{K_f\}$$

把$\{\delta_1(x_0)\}$和$\{\delta_2(x_N)\}$中元素按次序编上号。如果x_0处的未知边界条件编号为$(m_1,m_2,\cdots,m_l)$，已知边界条件编号为$(j_1,j_2,\cdots,j_{k-l})$；x_N处的已知边界条件编号为$(n_1,n_2,\cdots,n_l)$，则我们只需求解l阶代数方程

$$\begin{bmatrix} U_{n_1,m_1} & U_{n_1,m_2} & \cdots & U_{n_1,m_l} \\ U_{n_2,m_1} & U_{n_2,m_2} & \cdots & U_{n_2,m_l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n_l,m_1} & U_{n_l,m_2} & \cdots & U_{n_l,m_l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{1,m_1}(x_0)\\ \delta_{1,m_2}(x_0)\\ \vdots \\ \delta_{1,m_l}(x_0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{m_l}\end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

即可求出$\{\delta_1(x_0)\}$。式中

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{m_l}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta_{2,n_1}(x_n)\\ \delta_{2,n_2}(x_n)\\ \vdots \\ \delta_{2,n_l}(x_n)\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}U_{f,n_1}\\ U_{f,n_2}\\ \vdots \\ U_{f,n_l}\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} U_{n_1,j_1} & U_{n_1,j_2} & \cdots & U_{n_1,j_{n-1}} \\ U_{n_2,j_1} & U_{n_2,j_2} & \cdots & U_{n_2,j_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n,j_1} & U_{n_l,j_2} & \cdots & U_{n,j_{n-l}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1,j_1}(x_0) \\ \delta_{1,j_2}(x_0) \\ \vdots \\ \delta_{1,j_{n-l}}(x_0) \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

再由

$$\{\delta(x_0)\}=[L_1]^{-1}\{\delta_1(x_0)\} \tag{4.6}$$

即可求出$\{\delta(x_0)\}$。

五、算　　例

算例1　求解非正定变系数微分方程

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{x^2}w=0$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=1}=0.866026,\quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=2}=0.705029 \tag{5.1}$$

方程(5.1)有精确解

$$w=x^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$\frac{dw}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \tag{5.2}$$

由(2.2)，(5.1)可转化为常系数微分方程

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}+\frac{1}{\bar{x}_i^2}\bar{w}=0 \qquad x\in[x_{i-1},x_i) \tag{5.3}$$

式中$\bar{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2$。我们利用(3.7)和(3.9)求解这一问题，不难得到式中的

$$[G_i(x)]=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{x}{\bar{x}_i} & \bar{x}_i\sin\dfrac{x}{\bar{x}_i} \\ -\dfrac{1}{\bar{x}_i}\sin\dfrac{x}{\bar{x}_i} & \cos\dfrac{x}{\bar{x}_i} \end{bmatrix},\quad \{\delta(x)\}=\begin{Bmatrix} \bar{w}(x) \\ \dfrac{d\bar{w}}{dx}(x) \end{Bmatrix}$$

由(2.17)可得到

$$\left.\begin{aligned} & w=\lim_{N\to\infty}\bar{w},\qquad \frac{dw}{dx}=\lim_{N\to\infty}\frac{d\bar{w}}{dx} \\ & \frac{d^2w}{dx^2}=-\lim_{N\to\infty}\frac{\bar{w}}{x^2},\qquad \frac{d^3w}{dx^3}=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\frac{d\bar{w}}{dx}+\frac{1}{x^2}\bar{w}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

把区间[1,2]分成5，10和20个单元，由(5.4)式求得的w和高阶导数列于表1。

算例2　求解非正定变系数方程

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2w)-2w=0,\quad w|_{x=1}=1,\quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=2}=-0.1875 \tag{5.5}$$

方程(5.5)有精确解

$$w=x^{-3} \tag{5.6}$$

由(2.2)，方程(5.5)可转化为求解常系数微分方程

表1 方程(5.1)的计算结果

x		1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
w	$N=5$	$-2.85E-3$	0.1694	0.3372(0.795%)	0.4981	0.6514	0.7965(0.292%)
	$N=10$	$-7.18E-4$	0.1715	0.3392(0.201%)	0.5001	0.6532	0.7983(0.0741%)
	$N=20$	$-1.80E-4$	0.1721	0.3398(0.0503%)	0.5006	0.6537	0.7987(0.0187%)
	精确解	0	0.1722	0.3399	0.5008	0.6538	0.7989
$\frac{dw}{dx}$	$N=5$	0.8660	0.8522	0.8222(0.0355%)	0.7860	0.7452	0.7050
	$N=10$	0.8660	0.8524	0.8224(0.00911%)	0.7862	0.7453	0.7050
	$N=20$	0.8660	0.8525	0.8225(0.00231%)	0.7862	0.7453	0.7050
	精确解	0.8660	0.8525	0.8225	0.7862	0.7453	0.7050
$\frac{d^2w}{dx^2}$	$N=5$	$2.85E-3$	-0.1176	-0.1720	-0.1946	-0.2010	-0.1991
	$N=10$	$7.18E-4$	-0.1191	-0.1731	-0.1954	-0.2016	-0.1996
	$N=20$	$1.80E-4$	-0.1195	-0.1734	-0.1955	-0.2018	-0.1997
	精确解	0	-0.1196	-0.1734	-0.1956	-0.2018	-0.1997
$\frac{d^3w}{dx^3}$	$N=5$	-0.8774	-0.3937	-0.1737	-0.06343	$-6.615E-3$	0.02287
	$N=10$	-0.8674	-0.3934	-0.1724	-0.06253	$-6.007E-3$	0.02333
	$N=20$	-0.8664	-0.3928	-0.1720	-0.06229	$-5.855E-3$	0.02342
	精确解	-0.8660	-0.3927	-0.1719	-0.06218	$-5.820E-3$	0.02348

$$\bar{x}_i^2 \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} - 2\bar{w} = 0 \qquad x\in[x_{i-1}, x_i) \tag{5.7}$$

不难求出(3.7)和(3.9)中的 $[G_i(x)]$和$\{\delta(x)\}$，即

$$[G_i(x)] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{x}_i}x\right) & \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x}_i \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{x}_i}x\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{\bar{x}_i}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{x}_i}x\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{x}_i}x\right) \end{bmatrix}, \quad \{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_i^2 \bar{w} \\ \bar{x}_i^2 \frac{d\bar{w}}{dx} \end{Bmatrix}$$

我们令(4.2)中的

$$\{\delta_1(x)\} = \{\delta_2(x)\} = \left\{w(x) \quad \frac{dw(x)}{dx}\right\}^T \tag{5.8}$$

由(2.17)可得(4.3)中的$[L_1]$和$[L_2]^{-1}$,

$$[L_1] = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^2 \end{bmatrix}_{x=1}, \quad [L_2]^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-2} & 0 \\ -2x^{-3} & x^{-2} \end{bmatrix}_{x=2} \tag{5.9}$$

把(5.8)，(5.9)和边界上已知量代入(4.3)，再通过(4.2)，(3.7)和(3.9)即可求得区间[1, 2]任一点的$\{\delta(x)\}$。此外，通过(2.17)式还可得高阶导数d^4w/dx^4:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{240}{x^6}\bar{x}_i^2\bar{w}(x) - \frac{120}{x^5}\bar{x}_i^2\frac{d\bar{w}(x)}{dx}\right] \qquad x\in[x_{i-1}, x_i)$$

把区间[1,2]分成N等分，用精确解析法计算求得的w，dw/dx和d^4w/dx^4 值列于表2，并与精确解作了比较。

算例3 求解带有复杂边界条件的变系数微分方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{d^2w}{dx^2}\right) + w = 0, \ w|_{x=0.5} = 2.50484 \\ &w|_{x=1.5} = 0.5844, \ 2\frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=0.5} = 17.5858 \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

表 2 方程(5.5)计算结果

x		1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
w	$N=5$	1.0000	0.57747	0.36272(0.468%)	0.24223	0.16945	0.12293(1.66%)
	$N=10$	1.0000	0.57838	0.36399(0.122%)	0.24364	0.17094	0.12446(0.43%)
	$N=20$	1.0000	0.57862	0.36432(0.0306%)	0.24402	0.17134	0.12478(0.107%)
	精确解	1.0000	0.57870	0.36443	0.24414	0.17147	0.125
$\frac{dw}{dx}$	$N=5$	−2.9974	−1.4460	−0.78069(0.0304%)	−0.45769	−0.28576	−0.1875
	$N=10$	−2.9994	−1.4466	−0.78087(0.00732%)	−0.45774	−0.28578	−0.1875
	$N=20$	−2.9998	−1.4467	−0.78091(0.00188%)	−0.45776	−0.28578	−0.1875
	精确解	−3.0000	−1.4468	−0.78093	−0.45776	−0.28578	−0.1875
$\frac{d^4w}{dx^4}$	$N=5$	359.69	100.42	34.141(0.0304%)	13.409	5.8798	2.8125
	$N=10$	359.92	100.46	34.149(0.00732%)	13.410	5.8801	2.8125
	$N=20$	359.98	100.47	34.151(0.00187%)	13.411	5.8802	2.8125
	精确解	360.00	100.47	34.151	13.411	5.8802	2.8125

方程(5.10)有精确解

$$w=x^{-1.324718}$$

利用精确解析法，方程(5.10)可转化为求解常系数微分方程

$$\bar{x}_i^3\frac{d^3\bar{w}}{dx^3}+\bar{w}=0 \qquad x\in[x_{i-1},x_i) \tag{5.11}$$

不难求出(3.7)中的$[G_i(x)]$和$\{\delta(x)\}$:

$$[G_i(x)]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}F_1+\frac{2}{3}F_2 & -\frac{\bar{x}_i}{3}(F_1-F_2-\sqrt{3}F_3) & \frac{1}{3\bar{x}_i}(F_1-F_2+\sqrt{3}F_3) \\ -\frac{1}{3\bar{x}_i}F_1+\frac{1}{3\bar{x}_i}(F_2-\sqrt{3}F_3) & \frac{1}{3}F_1+\frac{2}{3}F_2 & -\frac{1}{3\bar{x}_i}(F_1-F_2-\sqrt{3}F_3) \\ \frac{\bar{x}_i}{3}(F_1-F_2-\sqrt{3}F_3) & -\frac{\bar{x}_i^2}{3}(F_1-F_2+\sqrt{3}F_3) & \frac{1}{3}F_1+\frac{2}{3}F_2 \end{bmatrix}$$

和

$$\{\delta(x)\}=\left\{\bar{w}\quad \frac{d\bar{w}}{dx}\quad \bar{x}_i^3\frac{d^3\bar{w}}{dx^3}\right\}^T$$

式中

$$F_1=\exp\left[-\frac{1}{\bar{x}_i}x\right],\quad F_2=\exp\left[\frac{x}{2\bar{x}_i}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\bar{x}_i}x\right),\quad F_3=\exp\left[\frac{x}{2\bar{x}_i}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\bar{x}_i}x\right)$$

令(4.2)中的

$$\left.\begin{aligned} \{\delta_1(x_0)\}&=\left\{w\quad \frac{dw}{dx}\quad 2\frac{dw}{dx}+\frac{d^2w}{dx^2}\right\}^T\Big|_{x=0.5} \\ \{\delta_2(x_N)\}&=\left\{w\quad \frac{dw}{dx}\quad x^3\frac{d^2w}{dx^2}\right\}^T\Big|_{x=1.5} \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

由(2.17)式即可得到(4.3)中的$[L_1]$和$[L_2]^{-1}$:

$$[L_1]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2x^3 & x^3\end{bmatrix}_{x=0.5},\quad [L_2]^{-1}=[I] \tag{5.13}$$

由(4.3),(4.2),(3.7)和(3.9)即可求出方程(5.10)的解。把区间[0.5, 1.5]分别分成4,8和16个单元,计算结果列于表3。

表3　　方程(5.10)的计算结果

x		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
w	$N=4$	2.5048	1.4730	1.0122(1.21%)	0.75249	0.58443
	$N=8$	2.5048	1.4652	1.0025(0.25%)	0.74598	0.58443
	$N=16$	2.5048	1.4641	1.0006(0.058%)	0.74454	0.58443
	精确解	2.5048	1.4639	1.0000	0.74408	0.58443
$\frac{dw}{dx}$	$N=4$	−5.9172	−2.4190	−1.2860(2.92%)	−0.79805	−0.54908(6.38%)
	$N=8$	−6.4293	−2.5374	−1.3123(0.94%)	−0.78951	−0.52361(1.45%)
	$N=16$	−6.5825	−2.5731	−1.3214(0.252%)	−0.78867	−0.51792(0.347%)
	精确解	−6.6364	−2.5857	−1.3247	−0.78856	−0.51613
$\frac{d^2w}{dx^2}$	$N=4$	29.417	7.5807	2.8934(6.05%)	1.3698	0.74356(7.04%)
	$N=8$	30.441	7.8912	3.0270(1.7%)	1.4393	0.78407(1.98%)
	$N=16$	30.748	7.9826	3.0660(0.44%)	1.4595	0.79582(0.511%)
	精确解	30.856	8.0146	3.0796	1.4665	0.79991

算例4　求解非均匀变厚度圆柱壳在任意载荷和任意边界条件下轴对称弯曲问题,它的平衡方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)-N_x\frac{d^2w(x)}{dx^2}+\frac{E(x)h(x)}{r^2(x)}w(x)=q(x)-\frac{1}{r(x)}\nu(x)N_x\qquad x\in[0,l] \tag{5.14}$$

式中记号:

w为径向挠度;$D(x)$为抗弯刚度;N_x为轴向力;$E(x)$为弹性模量;$h(x)$为壳体厚度;$r(x)$为壳的半径;$q(x)$为径向载荷;$\nu(x)$为泊松比。

把柱壳分成N个单元,由(2.2)在第i个单元上(5.14)转化为常系数微分方程

$$D(\bar{x}_i)\frac{d^4\bar{w}}{dx^4}-N_x\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}+\frac{E(\bar{x}_i)h(\bar{x}_i)}{r(\bar{x}_i)}\bar{w}=q(x)-\frac{1}{r(x)}\nu(x)N_x\qquad x\in[x_{i-1},x_i) \tag{5.15}$$

由于N_x是常量,由(2.4),(2.9),(2.10),(2.16)和(3.2)不难得到

$$\{\delta(x)\}=\left\{\bar{w}\quad\frac{d\bar{w}}{dx}\quad D(\bar{x}_i)\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\quad D(\bar{x}_i)\frac{d^3\bar{w}}{dx^3}\right\}^T\qquad x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,\cdots,N \tag{5.16}$$

$\{\delta(x)\}$需在单元交接处连续,并一致收敛于精确解

$$\begin{Bmatrix}w\\ \theta\\ M_x\\ Q_x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}w\\ \dfrac{dw}{dx}\\ D(x)\dfrac{d^2w}{dx^2}\\ \dfrac{d}{dx}\left(D(x)\dfrac{d^2w}{dx^2}\right)\end{Bmatrix}$$

式中θ，M_x和Q_x是柱壳的转角，弯矩和横向剪力，具有明显的物理意义。我们计算一个注满水的水池，如图1所示，$r=914.4\text{cm}$，$\delta_t=8.89\text{cm}$，$\delta_b=35.56\text{cm}$，$l=792.4\text{cm}$，$E=2.1\times10^6\text{kg/cm}^2$，$\nu=0.25$，水的容重为$\gamma=0.001\text{kg/cm}^3$。将水池分成$N$个单元，载荷$q(x)$取单元载荷的平均值。表4给出了$N=5,10,25$和45时挠度$w$和弯矩$M_x$的计算结果，并与精确解作了比较。它的边界条件，在$x=0$处，$M_x=Q_x=0$；在$x=l$处，$w=dw/dx=0$。

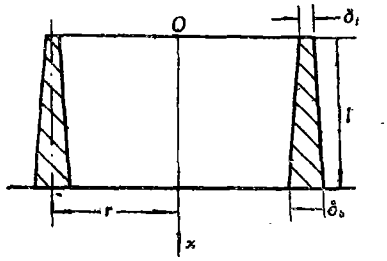

图1 注满水的水池

表 4 水池的径向位移w和纵向弯矩M_x计算结果

x	径向位移$w\times10^{-2}$(cm)					纵向弯矩M_x(kg·cm/cm)				
	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解
0	0.2194	0.1057	0.06638	0.0610	0.06014	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
482.6	0.7879	0.7843	0.7832	0.7803	0.7865	525.8	537.8	542.2	542.7	569.4
670.6	0.3590	0.3442	0.3392	0.3384	0.3390	335.1	219.4	192.7	188.8	193.3
731.5	0.1248	0.1178	0.1136	0.1130	0.1128	−1772	−1955	−2020	−2029	−2034
762.0	0.037	0.0344	0.0327	0.0323	0.0322	−3632	−3879	−3960	−3971	−3981
792.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	−6122	−6470	−6577	−6592	−6605

从以上四个算例可以看出，本文的方法有较高的收敛速度。仅用较少的单元即可达到较高的精度，并适用于非正定微分方程和复杂边界条件。分析计算误差可以得知，所求得的解及其高阶导数均具有二阶收敛速度。

参 考 文 献

[1] 叶开沅，非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解，Ⅳ．非均匀变厚度梁的弯曲、稳定性和自由振动，兰州大学学报力学专号，1 (1979)，133—157.

[2] Rektorys, Karel, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering* (sec. ed.), D. Reidel Publishing Company, Holland (1980), 328—336.

[3] 纳依玛克，M. A.，《线性微分算子》，科学出版社，北京 (1964)，13—28.

Exact Analytic Method for Solving Variable Coefficient Differential Equation

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry Institute, Hefei*)

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

Many engineering problems can be reduced to the solution of a variable coefficient differential equation. In this paper, the exact analytic method is suggested to solve variable coefficient differential equations under arbitrary boundary condition. By this method, the general computation format is obtained. Its convergence is proved. We can get analytic expressions which converge to exact solution and its higher order derivatives uniformly. Four numerical examples are given, which indicate that satisfactory results can be obtained by this method.