应用数学和力学，第10卷第10期（1989年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

大涡旋的分类和模式理论的封闭*

林多敏　　蔡树棠

（上海市应用数学和力学研究所，上海工业大学）　（上海市应用数学和力学研究所，中国科学技术大学）

（1988年8月8日收到）

摘　要

本文依据前文[1]大小涡旋分开考虑的湍流模式，对局部产生的湍流大涡旋引进了新的几率分布，由此引入了一种新的平均过程和平均值．通过这种平均，我们就可以把局部产生的湍流大涡旋和外来的湍流大涡旋进行严格的区分．然后，再引进适当的辅助条件和根据外来干扰的实际情况确定了外来大涡旋的耗散尺度l_N，使得湍流脉动二阶矩的方程组封闭，同时对前文[1]中的一些扩散系数进行了适当的修改．最后，得到了一个封闭的、能够数值求解的方程组．

一、引　言

本世纪40年代，周培源[3,4]提出了具有剪应力的普通湍流理论——十七方程湍流模式，着重寻找了Reynolds应力及关联函数所满足的方程，希望能在解Reynolds应力方程时，把边界等因素的影响作为积分常数（即初始条件和边界条件）自然地加以考虑．这些早期的想法因缺乏大容量的高速计算机而难以顺利地得到实现．40年代以后，Rotta[5]，Launder，Reece和Rodi[6]，Launder和Spalding[7]，以及蔡树棠和麻柏坤[1]根据湍流流动不同的物理机制，分别提出了各自的简化湍流模式．

在湍流问题里，涡旋的衰减时间特别长，整个流动要经过很长的时间才能适应边界的形状．在考虑的时间内，流动历史上留下来的影响依然存在，上游下来的涡旋性质无法用局部的速度梯度表示出来．因此，混合长度理论和k-ε理论在应用中将受到较大的限制，特别是湍流流动带有强旋转推进的平均流动时，这种限制尤为明显．只有在流线比较平直（象平槽、边界层等流动），上游速度梯度和下游速度梯度相等或相差不大时，梯度模式才较为适用．

蔡树棠和麻柏坤[1]根据湍流的实际情况，把湍流脉动分成大涡旋和小涡旋两个组成部分．考虑大涡旋与边界形状和平均流动的密切关系以及湍流的历史过程，把大涡旋部分再分

* 国家自然科学基金资助项目．
本文曾在第四届全国流体力学学术会议上宣读，北京，1989．3．27—31．

成局部产生的和上游流来或扩散过来的两个组成部分。在引入了一些补充条件后，得出了一个大小涡旋分开考虑的封闭的九方程湍流模式。然而，在九方程湍流模式中，对两类大涡旋的分类没有给出明确而有效的方法，只是仅仅对外来的涡旋主观地写出了一个方程式，从而把两种大涡旋进行区分开来。在加上一些辅助假定之后，给出了一个封闭的方程组。本文从对局部产生的湍流大涡旋引进行新的几率分布出发，进一步引入一种新的平均过程和平均值。通过这种平均，就可以把局部产生的湍流大涡旋和外来的湍流大涡旋严格地区分开来。然后，引进局部产生的大涡旋和外来的大涡旋各自的速度二阶矩的方程式，再给出适当的辅助条件使各种湍流涡旋的速度二阶矩方程组封闭，从而得到了一个封闭的能够数值求解的方程组。

二、大小涡旋脉动速度和脉动压力所满足的方程式

根据九方程湍流模式，可把某一物理量A分成四个组成部分，即是平均值$\bar{A}$、局部产生的大涡旋脉动量a^p、外来大涡旋的脉动量a^N和小涡旋的脉动量a^s等四个部分，其中a^p和a^N加起来可形成大涡旋的脉动量a^l。此时，我们仍用U_i代表流体的瞬时速度，$\bar{U}_i$表示雷诺平均速度，u_i^p为局部产生的大涡旋脉动速度，u_i^N为外来大涡旋的脉动速度，u_i^l代表对应于大涡旋的脉动速度，u_i^s为对应于小涡旋的脉动速度，P代表瞬时压力，$\bar{P}$代表雷诺平均压力，p^p代表局部产生的大涡旋脉动压力，p^N为外来大涡旋的脉动压力，p^l代表对应于大涡旋的脉动压力，p^s代表对应于小涡旋的脉动压力。在九方程湍流模式中，在引进小涡旋的平均"$\sim$"之后，可给出三组相应于平均流动和大小涡旋速度脉动的运动方程和连续方程。

（1）　平均流动的运动方程和连续方程为

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\bar{U}_i-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i^l u_j^l})-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i^s u_j^s}),\quad \partial \bar{U}_j/\partial x_j=0 \tag{2.1}$$

（2）　小涡旋的运动方程和连续方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_i^s}{\partial t}+(\bar{U}_j+u_j^l)\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j}+u_j^s\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{U}_i+u_i^l)+u_j^s\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j}\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^s}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i^s+\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u_i^s u_j^s})\\&\partial u_j^s/\partial x_j=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

（3）　大涡旋的运动方程和连续方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_i^l}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j}+u_j^l\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+u_j^l\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j}\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^l}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i^l+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^l u_j^l}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^s u_j^s}-\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u_i^s u_j^s})\\&\partial u_j^l/\partial x_j=0\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

三、小涡旋的脉动速度和脉动涡量的方程式

九方程湍流模式已经给出了小涡旋的脉动速度和脉动涡量简化以后的平方平均值的方程式。现再稍加修正，可以得到

$$\frac{\partial q^2}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial q^2}{\partial x_j}-2\nu_T\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}-2\nu_T\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{U}_j\bar{U}_k)$$

$$-2\nu_T\overline{\frac{\partial u_k^l}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k^l}{\partial x_j}}-2\nu_T\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\overline{u_j^l u_k^l}$$

$$=-10\nu\frac{q^2}{\lambda^2}+\nu\nabla^2 q^2+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_s\nu_T+c_i^N q_N l_N+c_i^p q_p l_p)\frac{\partial q^2}{\partial x_j}\right] \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{U}_j\cdot\bar{U}_k)$$

$$+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\overline{\frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}}-\frac{14F}{3\sqrt{3}}\frac{q^3}{\lambda^3}+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\overline{u_j^l u_k^l})$$

$$=-\frac{2}{15}\nu E\frac{q^2}{\lambda^4}+\nu\nabla^2\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_e\nu_T+c_i^N q_N l_N+c_i^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)\right] \tag{3.2}$$

(3.2)可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{U}_j\bar{U}_k)$$

$$+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\overline{\frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}}+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\overline{u_j^l u_k^l})$$

$$=-\nu E'\frac{q^2}{\lambda^4}+\nu\nabla^2\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_e\nu_T+c_i^N q_N l_N+c_i^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)\right] \tag{3.2$'$}$$

上式中，$q^2=\widetilde{u_i^s u_i^s}=\overline{u_i^s u_i^s}$，$q_N^2=\overline{u_i^N u_i^N}$，$q_p^2=\overline{u_i^p u_i^p}$，$\nu_T=q\lambda f(R_\lambda)$，$R_\lambda=q\lambda/\nu$，$E'=2E/15-14FR_\lambda/3\sqrt{3}$，其中$c_s$，$c_i^N$，$c_i^p$，$c_e$，$c_i^N$，$c_i^p$，$E$，$E'$都是无量纲量，$f(R_\lambda)$为一个已知函数，$l_p$为局部产生的大涡旋耗散长度，$l_N$为外来大涡旋的耗散长度。

四、大涡旋的分类和它们各自所满足的方程式

在大小涡旋分开考虑之后，依据大涡旋的两种不同来源，可以把大涡旋分成两个组成部分。第一部分是由外界影响而产生的或者由上游以及考虑点周围附近产生后扩散过来的大涡旋；第二部分是由当地局部平均流动产生的大涡旋，这一部分大涡旋经过远距离的扩散之后要归并入所在地的外来涡旋之中。以下用上指标p表示局部产生大涡旋的相应物理量，用上指标N表示外界影响所产生的或周围扩散过来的大涡旋的相应物理量。大涡旋的物理量则是由以上两个部分的相应物理量迭加而组成，即

$$u_i^l=u_i^p+u_i^N,\quad p^l=p^p+p^N \tag{4.1}$$

如果假定局部产生的大涡旋的物理量具有某种几率分布，那么，通过这种几率分布引入的相应平均值，就可以清楚地把两种大涡旋的速度和压力分开来。这种平均方法可用符号< >表示。设脉动物理量为 a 和 b，则有

$$\langle a^p\rangle=0,\ \langle b^N\rangle=b^N,\ \langle a^p b^N\rangle=0 \tag{4.2}$$

对雷诺平均值 $\bar{A}$，有

$$\langle\bar{A}\rangle=\bar{A}=\overline{\langle A\rangle} \tag{4.3}$$

将(4.1)代入大涡旋脉动量所满足的方程式(2.3)，再取平均< >，可得外来大涡旋的方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_i^N}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}+u_j^N\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+u_j^N\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^N}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i^N+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i' u_j'}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u_i^s u_j^s}-\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle)\\&\partial u_j^N/\partial x_j=0\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

将(2.3)减去(4.4)，可得局部产生大涡旋的方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_i^p}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}+u_j^p\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+u_j^p\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}+u_j^N\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}+u_j^p\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i^p+\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_i^s u_j^s})\\&\partial u_i^p/\partial x_j=0\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

五、两种大涡旋的二阶矩所满足的方程式

用 u_k^N 乘以方程(4.4)中的第一式，再去加上 u_i^N 乘上 u_k^N 的相应方程式，然后对整个式子取雷诺平均，可得外来大涡旋的二阶矩所满足的方程式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i^N u_k^N}+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_k^N}+\overline{u_j^N u_k^N}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_i^N}\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}\\&\quad+\overline{u_k^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle}+\overline{u_i^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_k^p u_j^p\rangle}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_j^N u_k^N}\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_k^N\frac{\partial p^N}{\partial x_i}}+\overline{u_i^N\frac{\partial p^N}{\partial x_k}}\right)+\nu\nabla^2\overline{u_i^N u_k^N}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k^N}{\partial x_j}}\\&\quad-\overline{u_k^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle}-\overline{u_i^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_k^s u_j^s\rangle}\end{aligned} \tag{5.1}$$

运用同样的方法，由方程(4.5)可得局部产生大涡旋的二阶矩所满足的方程式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i^p u_k^p}+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_k^p}+\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\overline{u_j^p u_i^p}\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_j^p u_k^p}-\overline{u_k^p\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle}-\overline{u_i^p\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_k^p u_j^p\rangle}\\&\quad=-\frac{1}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial p^p}{\partial x_i}u_k^p}+\overline{\frac{\partial p^p}{\partial x_k}u_i^p}\right)+\nu\nabla^2\overline{u_i^p u_k^p}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}\frac{\partial u_k^p}{\partial x_j}}\\&\quad+\overline{u_k^p\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_i^s u_k^s})}+\overline{u_i^p\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_k^s u_j^s})}\end{aligned} \tag{5.2}$$

为简化(5.1)和(5.2)，首先注意

$$\overline{u_k^p \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle}=\left\langle u_k^p \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle\right\rangle=\langle u_k^p\rangle \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle=0$$

同理

$$\overline{u_i^p \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_k^p u_j^p\rangle}=0$$

其次考虑前文[1]提出的$\widetilde{u_i^s u_j^s}$的表达式，即

$$\widetilde{u_i^s u_j^s}=\frac{1}{3}q^2\delta_{ij}-\nu_T\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^l}{\partial x_i}\right)$$

$$\widetilde{u_k^s u_j^s}=\frac{1}{3}q^2\delta_{kj}-\nu_T\left(\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k^l}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}\right)$$

则有

$$\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle=\frac{1}{3}q^2\delta_{ij}-\nu_T\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}\right)$$

$$\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle=\frac{1}{3}q^2\delta_{kj}-\nu_T\left(\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k^N}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}\right)$$

从而

$$\overline{u_k^N \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle}=-\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{u_k^N\left(\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}\right)}-\nu_T\overline{u_k^N\nabla^2 u_i^N}$$

$$\overline{u_i^N \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle}=-\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{u_i^N\left(\frac{\partial u_k^N}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}\right)}-\nu_T\overline{u_i^N\nabla^2 u_k^N}$$

两式合并，有

$$\overline{u_k^N \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle+u_i^N \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle}$$

$$=-\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_k^N}-\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{\left(u_k^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}+u_i^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}\right)}-\nu_T\nabla^2\overline{u_i^N u_k^N}+2\nu_T\overline{\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}\frac{\partial u_k^N}{\partial x_j}} \tag{5.3a}$$

另外，由$\widetilde{u_i^s u_j^s}$的表达式还有

$$\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_i^s u_j^s}=\nu_T\left(\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}\right)$$

$$\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_k^s u_j^s}=\nu_T\left(\frac{\partial u_k^p}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^p}{\partial x_k}\right)$$

从而

$$\overline{u_k^p \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_i^s u_j^s})}=\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{u_k^p\left(\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}\right)}+\nu_T\overline{u_k^p\nabla^2 u_i^p}$$

$$\overline{u_i^p \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_k^s u_j^s})}=\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{u_i^p\left(\frac{\partial u_k^p}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^p}{\partial x_k}\right)}+\nu_T\overline{u_i^p\nabla^2 u_k^p}$$

两式相加，有

$$\overline{u_k^p \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_i^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_i^s u_j^s})+u_i^p \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_k^s u_j^s}\rangle-\widetilde{u_k^s u_j^s})}$$

$$=\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_k^p}+\frac{\partial \nu_T}{\partial x_j}\overline{\left(u_k^p\frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}+u_i^p\frac{\partial u_j^p}{\partial x_k}\right)}$$

$$+\nu_T\nabla^2\overline{u_i^p u_k^p}-2\nu_T\overline{\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k^p}{\partial x_j}} \tag{5.3b}$$

再令

$$\overline{u_k^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i^p u_j^p\rangle+u_i^N\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_k^p u_j^p\rangle}\approx 0 \tag{5.4}$$

以及

$$\overline{\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k^p}{\partial x_j}}=\frac{\gamma^p\overline{u_i^p u_k^p}+(1-\gamma^p)q_p^2\delta_{ik}/3}{l_p^2} \tag{5.5a}$$

$$\overline{\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k^N}{\partial x_j}}=\frac{\gamma^N\overline{u_i^N u_k^N}+(1-\gamma^N)q_N^2\delta_{ik}/3}{l_N^2} \tag{5.5b}$$

其中 γ^p 和 γ^N 为小于 1 的正数，l_p 为局部产生大涡旋的平均耗散线尺度，l_N 为外来大涡旋的平均耗散线尺度．方程(5.1)和(5.2)中的三阶矩项和脉动压力梯度项可分别写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_j^p u_k^p}+\frac{1}{\rho}\overline{\left(u_k^p\frac{\partial p^p}{\partial x_i}+u_i^p\frac{\partial p^p}{\partial x_k}\right)}\\&\qquad\equiv\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i^p u_j^p u_k^p}+\frac{1}{\rho}(\overline{p^p u_k^p}\delta_{ij}+\overline{p^p u_i^p}\delta_{jk})\right]-\phi_{ik}^p\\&\phi_{ik}^p\equiv\frac{1}{\rho}\overline{p^p\left(\frac{\partial u_k^p}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^p}{\partial x_k}\right)}\end{aligned}\right\} \tag{5.6a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_j^N u_k^N}+\frac{1}{\rho}\overline{\left(u_k^N\frac{\partial p^N}{\partial x_i}+u_i^N\frac{\partial p^N}{\partial x_k}\right)}\\&\qquad\equiv\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i^N u_j^N u_k^N}+\frac{1}{\rho}(\overline{p^N u_k^N}\delta_{ij}+\overline{p^N u_i^N}\delta_{jk})\right]-\phi_{ik}^N\\&\phi_{ik}^N\equiv\frac{1}{\rho}\overline{p^N\left(\frac{\partial u_k^N}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^N}{\partial x_k}\right)}\end{aligned}\right\} \tag{5.6b}$$

式中的 $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i u_j u_k}+\dfrac{1}{\rho}(\overline{pu_k}\,\delta_{ij}+\overline{pu_i}\,\delta_{jk})\right]$

通常被称为扩散项，用 d_{ik} 表示；式中的

$$\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}$$

通常被称为脉动压力作功项，用 ϕ_{ik} 表示．在不可压缩流体中，有

$$\phi_{jj}=0 \tag{5.7}$$

这说明脉动压力做功项仅能调节各脉动速度分量的相对大小，而不影响总的脉动速度的绝对值．

经过以上各种简化，两种大涡旋脉动速度的二阶矩所满足的方程式 (5.1) 和 (5.2) 分别为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i^N u_k^N}+U_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_k^N}+\overline{u_j^N u_k^N}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_i^N}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\\&\quad=d_{ik}^N+\phi_{ik}^N-2(\nu+\nu_T)\frac{\gamma^N\overline{u_i^N u_k^N}+(1-\gamma^N)q_N^2\delta_{ik}/3}{l_N^2}\\&\qquad+(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_i^N u_k^N}+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_k^N}+\overline{\left(u_k^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}+u_i^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}\right)}\right]\end{aligned} \tag{5 8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i^p u_k^p}+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_k^p}+\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{U}_i+\overline{u_j^p u_i^p}\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}$$

$$=d_{ik}^p+\phi_{ik}^p-2(\nu+\nu_T)\frac{\gamma^p\overline{u_i^p u_k^p}+(1-\gamma^p)q_p^2\delta_{ik}/3}{l_p^2}$$

$$+(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_i^p u_k^p}+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^p u_k^p}+\left(\overline{u_k^p\frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}}+\overline{u_i^p\frac{\partial u_j^p}{\partial x_k}}\right)\right] \tag{5.9}$$

方程(5.9)中 i 和 k 收缩，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_k^p u_k^p}+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_k^p u_k^p}+2\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}$$

$$=d_{kk}^p+(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_k^p u_k^p}-2(\nu+\nu_T)\frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2}$$

$$+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_k^p u_k^p}+2\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_j^p u_k^p}\right) \tag{5.10}$$

六、局部产生大涡旋的方程式的封闭

所谓局部产生的大涡旋，实际上就是由于定常流动的流场不稳定性所引起的非定常流动减去雷诺平均流动以后的剩余部份。所以，就涡旋线本身来说，局部产生大涡旋实际上是和平均流动分不开的。于是，局部产生大涡旋的涡量，除了方向有所不同以外，是和平均流动的涡量基本上是没有多少区别的，至少也是成正比例的。根据以上这一性质，局部产生大涡旋的涡量为

$$\omega_{ik}^p=CA_{i\alpha}A_{k\beta}\bar{\Omega}_{\alpha\beta} \tag{6.1}$$

其中 C 为比例系数，$A_{i\alpha}$ 为某一正交变换的变换矩阵，平均流动的涡量为

$$\bar{\Omega}_{\alpha\beta}=\partial\bar{U}_\alpha/\partial x_\beta-\partial\bar{U}_\beta/\partial x_\alpha$$

设局部产生大涡旋的脉动速度为 u_i^p，则

$$u_i^p=l\gamma_k'\omega_{ik}^p=Cl\gamma_k'A_{i\alpha}A_{k\beta}\bar{\Omega}_{\alpha\beta} \tag{6.2}$$

其中 l 为混合长度，γ_k' 为某一无量纲的随机向量。于是，

$$\overline{u_i^p u_k^p}=l^2\,\overline{C^2\gamma_j'A_{i\alpha}A_{j\beta}\gamma_m'A_{k\delta}A_{m\varepsilon}}\,\bar{\Omega}_{\alpha\beta}\bar{\Omega}_{\delta\varepsilon}=l^2B_{ik\alpha\beta\delta\varepsilon}\bar{\Omega}_{\alpha\beta}\bar{\Omega}_{\delta\varepsilon} \tag{6.3}$$

其中

$$B_{ik\alpha\beta\delta\varepsilon}\equiv\overline{C^2\gamma_j'A_{i\alpha}A_{j\beta}\gamma_m'A_{k\delta}A_{m\varepsilon}}$$

收缩指标 i 和 k，可得

$$\overline{u_k^p u_k^p}=l^2\,\overline{C^2\gamma_j'A_{j\beta}\gamma_m'A_{m\varepsilon}}\,\bar{\Omega}_{\alpha\beta}\bar{\Omega}_{\alpha\varepsilon}=l^2B_{\beta\varepsilon}\bar{\Omega}_{\alpha\beta}\bar{\Omega}_{\alpha\varepsilon} \tag{6.4}$$

其中

$$B_{\beta\varepsilon}\equiv\overline{C^2\gamma_j'A_{j\beta}\gamma_m'A_{m\varepsilon}}$$

$B_{ik\alpha\beta\delta\varepsilon}$ 和 $B_{\beta\varepsilon}$ 都是无量纲量，随着空间位置的不同，边界形状和条件等的不同而有所不同。在相似理论成立的区域里，这些无量纲量则是无量纲常数。在常见的平面附近的单方向定常流动中，只有两个涡量分量不等于零，即

$$\bar{\Omega}_{12}=dU/dy,\quad \bar{\Omega}_{21}=-dU/dy$$

这时有

$$\overline{u_1^p u_2^p}=(B_{121212}+B_{122121}-B_{121221}-B_{122112})l^2(dU/dy)^2$$

以上结果是和通常应用的混合长度理论和相似理论一致的。

现在，我们可以假定方程（5.5a）中引入的局部产生大涡旋的平均耗散尺度 l_p 正比于通常的混合长度 l，即

$$l_p^2=l^2/C_1 \tag{6.5}$$

其中 C_1 为正常数。

最后，为使局部产生大涡旋的方程式(5.10)能够封闭，需要对扩散项d_{kk}^p加以处理。处理扩散问题，通常是采用经验的斐克定律。但是，根据不可逆过程热力学理论，只有在准平衡、准定常和偏离平衡不远的时候，才能应用梯度形式的广义力和广义流之间的关系式。在湍流运动中，大涡旋的衰减时间很长，远远没有达到不可逆热力学理论所要求的状态，因此，斐克定律不能完全适用。实际中，与大涡旋有关的扩散过程是以运流形式进行的，这种运流形式有时是沿这个方向运流的，有时是沿相反方向运流的，从而需要给出这种运流形式的平均值。假定它的平均值为

$$\begin{aligned}\overline{u_k^p u_k^p u_j^p}+\frac{2}{\rho}\overline{p^p u_j^p}=&-q_p^3\alpha_j-(c_p^N q_N l_N+c_p^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}q_N^2\\&-c_1^p l_p^2 q_p^2\nabla^2 U_j-c_1^N l_N^2 q_N^2\nabla^2 U_j\end{aligned} \tag{6.6}$$

其中 c_p^N，c_p^p，c_1^N 和 c_1^p 为无量纲量，$\alpha_i=\alpha(\nabla q_p^2/|\nabla q_p^2|)_i$，$\alpha$为无量纲量。等式左边代表了局部产生大涡旋的扩散流；在等式右边，第一项是鉴于局部大涡旋在产生早期不能满足不可逆热力学所要求的条件，不能采用梯度形式的表达式情形下而采取的一种表达形式；第二项是外来大涡旋的扩散项，因为外来大涡旋在经过长时间的扩散之后，此时接近于不可逆热力学所要求的条件，所以，这个扩散项采用了梯度形式；第三项和第四项各自代表在平均流动的影响下，局部产生大涡旋和外来大涡旋的运流项。式(6.6)中的负号表示了扩散方向与梯度方向相反。式(6.6)表示了虽然两种大涡旋的驰豫时间都很长，不能满足不可逆热力学所要求的准平衡、准定常和小偏离等条件，但是在一定意义下，运流起着重要的作用。将(6.6)式代入方程式(5.10)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial t}+U_j\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial x_j}+2\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[q_p^3\alpha_j\\&\quad+(c_p^N q_N l_N+c_p^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}q_N^2+c_1^p l_p^2 q_p^2\nabla^2 U_j+c_1^N l_N^2 q_N^2\nabla^2 U_j\Big]\\&=(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_k^p u_k^p}-2(\nu+\nu_T)\frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2}+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial x_j}+2\frac{\partial\overline{u_j^p u_k^p}}{\partial x_k}\right)\end{aligned} \tag{6.7}$$

如果把(6.3)、(6.4)和(6.5)等式子再代入(6.7)，则式(6.7)就成为一个确定混合长度l的方程式。

七、外来大涡旋方程式的封闭

为使外来大涡旋的方程式(5.8)能够封闭，首先假定在有外来干扰的情况下，外来大涡旋的耗散长度 l_N 正比于外来干扰的特征长度 L，而在没有外来引入的特征尺度 L 的时候，即外来大涡旋只是从邻近局部地区产生然后扩散过来的时候，l_N 正比于混合长度 l。于是，可写

$$\frac{1}{l_N^2}=\begin{cases} C_2/L^2 & \text{对外界引入特征长度的情形} \\ C_2/l^2 & \text{对没有外界特征长度的情形} \end{cases} \tag{7.1}$$

其次我们对 $\overline{u_k^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}}+\overline{u_i^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}}$

引进假定．因为在 i 和 k 收缩时，此项可化为 $2\partial\overline{u_j^N u_k^N}/\partial x_k$，所以，可假定此项由二阶矩的一阶偏导数所组成．由于 i 和 k 的对称性关系，因此可令

$$\overline{u_k^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}}+\overline{u_i^N\frac{\partial u_j^N}{\partial x_k}}=\frac{2}{3}(1-a_0-b_0)\frac{\partial\overline{u_a^N u_j^N}}{\partial x_a}\delta_{ik}+a_0\left(\frac{\partial\overline{u_k^N u_j^N}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i^N u_j^N}}{\partial x_k}\right)$$

$$+b_0\left(\frac{\partial\overline{u_a^N u_k^N}}{\partial x_a}\delta_{ij}+\frac{\partial\overline{u_a^N u_i^N}}{\partial x_a}\delta_{jk}\right) \tag{7.2}$$

其中 a_0 和 b_0 为无量纲常数．

然后我们来讨论扩散项 d_{ik}^N 的表达式．由于外来大涡旋的驰豫时间很长，没有达到不可逆过程热力学所要求的状态，所以，类似于式(6.6)，可令

$$\overline{u_i^N u_j^N u_k^N}+\frac{1}{\rho}(\overline{p^N u_k^N}\delta_{ij}+\overline{p^N u_i^N}\delta_{jk})$$

$$=-(c_N^N q_N l_N+c_N^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i^N u_k^N}$$

$$-\beta_j q_p\overline{u_i^p u_k^p}-c_2^N l_N^2\overline{u_i^N u_k^N}(\nabla^2 U_j)-c_2^p l_p^2\overline{u_i^p u_k^p}(\nabla^2 U_j) \tag{7.3}$$

其中 c_N^N，c_N^p，c_2^N 和 c_2^p 为无量纲量，$\beta_j=\beta(\nabla q_p^2/|\nabla q_p^2|)_j$，$\beta_j$ 为沿着 $\overline{u_a^p u_a^p}$ 梯度方向的无量纲向量；式(7.3)中的负号表示运流方向和梯度方向相反；式(7.3)中出现局部产生大涡旋的有关项是因为局部产生大涡旋经过远距离的扩散之后要被划入外来大涡旋的范畴．

最后，我们讨论 ϕ_{ik}^N 的表达式．参照通常所采用的、Rotta 和 Launder 等人建议过的表达式，可把 ϕ_{ik}^N 写成

$$\phi_{ik}^N=-A_0\frac{\sqrt{\overline{u_a^N u_a^N}}}{l_N}\left(\overline{u_i^N u_k^N}-\frac{1}{3}\overline{u_\beta^N u_\beta^N}\delta_{ik}\right)+B_0\left(\overline{u_j^N u_i^N}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right.$$

$$\left.+\overline{u_j^N u_k^N}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\overline{u_j^N u_\beta^N}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\delta_{ik}\right)-A_0'\frac{\sqrt{\overline{u_a^p u_a^p}}}{l_p}\left(\overline{u_i^p u_k^p}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\overline{u_\beta^p u_\beta^p}\delta_{ik}\right)+B_0'\left(\overline{u_j^p u_i^p}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\overline{u_j^p u_\beta^p}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\delta_{ik}\right) \tag{7.4}$$

其中 A_0，B_0，A_0' 和 B_0' 都是无量纲系数．在 ϕ_{ik}^N 的表达式中出现了与局部大涡旋有关的项是因为局部产生大涡旋经过长时间的扩散之后也要被划入外来大涡旋的范畴．

总之，方程式(5.8)最后可写成

$$\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial t}+U_j\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_k^N}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_i^N}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_N^N q_N l_N+c_N^p q_p l_p)\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial x_j}+\beta_j q_p\overline{u_i^p u_k^p}\right.$$

$$\left.+c_2^N l_N^2\overline{u_i^N u_k^N}(\nabla^2 U_j)+c_2^p l_p^2\overline{u_i^p u_k^p}(\nabla^2 U_j)\right]$$

$$=\phi_{ik}^{N}+(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_i^N u_k^N}-2(\nu+\nu_T)\frac{\gamma^N\overline{u_i^N u_k^N}+(1-\gamma^N)q_N^2\delta_{ik}/3}{l_N^2}$$

$$+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial x_j}+\frac{2}{3}(1-a_0-b_0)\frac{\partial\overline{u_a^N u_j^N}}{\partial x_a}\delta_{ik}+a_0\left(\frac{\partial\overline{u_k^N u_j^N}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_i^N u_j^N}}{\partial x_k}\right)\right.$$

$$\left.+b_0\left(\frac{\partial\overline{u_a^N u_k^N}}{\partial x_a}\delta_{ij}+\frac{\partial\overline{u_a^N u_i^N}}{\partial x_a}\delta_{jk}\right)\right] \quad (7.5)$$

八、结 论 和 讨 论

通过前面的讨论，我们得到了一个封闭的联立方程组，也就是

$$\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\bar{U}_i-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i^N u_j^N}+\overline{u_i^p u_j^p})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{3}q^2\delta_{ij}-\nu_T\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right)\right] \quad (8.1)$$

$$\partial\bar{U}_j/\partial x_j=0 \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial q^2}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial q^2}{\partial x_j}-2\nu_T\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_j}-2\nu_T\frac{\partial^2(\bar{U}_j\bar{U}_k)}{\partial x_j\partial x_k}$$

$$-2\nu_T\left(\frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2}+\frac{\overline{u_k^N u_k^N}}{l_N^2}\right)-2\nu_T\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\overline{u_j^p u_k^p}+\overline{u_j^N u_k^N})$$

$$=-10\nu\frac{q^2}{\lambda^2}+\nu\nabla^2q^2+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_s\nu_T+c_s^N q_N l_N+c_s^p q_p l_p)\frac{\partial q^2}{\partial x_j}\right] \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\bar{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_k}+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2(\bar{U}_j\bar{U}_k)}{\partial x_j\partial x_k}$$

$$+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\left(\frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2}+\frac{\overline{u_k^N u_k^N}}{l_N^2}\right)+\frac{14}{5}G\frac{\nu_T}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\overline{u_j^p u_k^p}+\overline{u_j^N u_k^N})$$

$$=-\nu E'\frac{q^2}{\lambda^4}+\nu\nabla^2\left(\frac{q^2}{\lambda^4}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_e\nu_T+c_e^N q_N l_N+c_e^p q_p l_p)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q^2}{\lambda^2}\right)\right] \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial x_j}+2\overline{u_j^p u_k^p}\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha_j q_p^2\right.$$

$$\left.+(c_p^p q_p l_p+c_p^N q_N l_N)\frac{\partial q_N^2}{\partial x_j}+c_1^p l_p^2 q_p^2\nabla^2\bar{U}_j+c_1^N l_N^2 q_N^2\nabla^2\bar{U}_j\right]$$

$$=(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u_k^p u_k^p}-2(\nu+\nu_T)\frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2}+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\overline{u_k^p u_k^p}}{\partial x_j}+2\frac{\partial\overline{u_j^p u_k^p}}{\partial x_k}\right) \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_k^N}\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}+\overline{u_j^N u_i^N}\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(c_N^N q_N l_N+c_N^p q_p l_p)\frac{\partial\overline{u_i^N u_k^N}}{\partial x_j}\right.$$

$$\left.+\beta_j q_p\overline{u_i^p u_k^p}+c_2^N l_N^2\overline{u_i^N u_k^N}(\nabla^2\bar{U}_j)+c_2^p l_p^2\overline{u_i^p u_k^p}(\nabla^2\bar{U}_j)\right]$$

$$=\phi^N_{ik}+(\nu+\nu_T)\nabla^2\overline{u^N_i u^N_k}-2(\nu+\nu_T)\frac{\gamma^N\overline{u^N_i u^N_k}+(1-\gamma^N)q^2_N\delta_{ik}/3}{l^2_N}$$
$$+\frac{\partial\nu_T}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\overline{u^N_i u^N_k}}{\partial x_j}+\frac{2}{3}(1-a_0-b_0)\frac{\partial\overline{u^N_a u^N_j}}{\partial x_a}\delta_{ik}+a_0\left(\frac{\partial\overline{u^N_k u^N_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u^N_i u^N_j}}{\partial x_k}\right)\right.$$
$$\left.+b_0\left(\frac{\partial\overline{u^N_a u^N_k}}{\partial x_a}\delta_{ij}+\frac{\partial\overline{u^N_a u^N_i}}{\partial x_a}\delta_{jk}\right)\right] \tag{8.6}$$

以及辅助关系式(6.3)，(6.4)，(6.5)和(7.1)。

理论上讲，对于不同的湍流情形，c_s，c^N_s，c^p_s，c_e，c^N_e，c^p_e，E'，a_0，b_0，C_1，C_2，c^N_1，c^N_2，c^p_1，c^p_2，c^N_N，c^p_N，c^N_p，c^p_p，α，β，$B_{\beta s}$和B_{ijklmn}等数都不可能是真正的常数，$f(R_\lambda)$也不可能是一个简单的普遍适用的函数。但是，从应用的角度来看，对非同类的湍流情形，这些数可近似地分别被假定为各种不同的常数，而$f(R_\lambda)$在不是同一类的湍流情形中，也可以被假定为不同的函数。

本文改进了大小涡旋分开考虑的湍流模式方程。在所得到的方程组(8.1)～(8.6)中，除了平均流动的方程式(8.1)和(8.2)之外，仍有9个方程式。这9个方程式实际上可以分成三组：相应于应力模式的方程有6个，相应于二方程模式的有2个，相应于混合长度（或一方程）模式的方程有1个，因此，运用这九方程模式进行数值求解会显得较为方便。本文所考虑的因素，不仅大小涡旋分开，局部大涡旋和外来大涡旋分开，而且充分考虑了外界波动扰动等的影响。

参 考 文 献

[1] 蔡树棠、麻柏坤，大小涡旋分开考虑的模式理论，应用数学和力学，**8**，10（1987），849—858.

[2] 蔡树棠，《湍流理论》，中国科技大学和浙江大学讲义（1985）.

[3] Chou, P. Y.（周培源），On the velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 1 (1945), 38—54.

[4] Chou, P. Y.（周培源），On the velocity correlations and the equations of turbulent vorticity fluctuation, *The Science Reports of National Tsinghua Univ.*, **5**, 1, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Science (1948), 52—70.

[5] Rotta, J. C., Statische Theorie Nichomogener Turbulenz, *Zeitsch. für Physik*, **129** (1951), 547—572.

[6] Launder, B. E., G. J. Reece and W. Rodi, Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, *J. F. M.*, **68** (1975), 537.

[7] Launder, B. E. and D. B. Spalding, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London and New York (1972).

[8] Launder, B. E., W. C. Reynolds, W. Rodi, J. Mathieu and D. Jeandel, *Turbulence Models and Their Applications*, Editions Enrolles (1984).

[9] 蔡树棠、周光坰、魏中磊、谢象春，湍流研究最近半世纪的一些进展，力学进展，**10**，1（1980），16—36.

[10] 蔡树棠，《湍流的模式理论》，水动力学研究与进展研讨会讲义，无锡（1986，8）.

The Separation of Large Vortexes and the Closed Equations of Turbulence Model

Lin Duo-min

(Shanghai Inst. of Appl. Math. and Mech.; Shanghai Univ. of Tech., Shanghai)

Tsai Shu-tang

(Dept. of Modern Mech., Univ. of Sci. and Tech. of China, Hefei; Shanghai Inst. of Appl. Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

This paper presents a new kind of average for the locally-generated large vortexes so that the physical quantities of the locally-generated large vortexes and the external large vortexes can be rigorously separated from the equations for the large vortexes proposed in a previous paper[1]. To the equations for the two kinds of large vortexes, some auxiliary relations are introduced, and the value of the length-scale l_N of energy dissipation of the external large vortexes may be determined according to the actual circumstances of the disturbance of external sources. Thus, the resulting equations of the second moments of turbulent velocity fluctuations for the two kinds of large vortexes can be made closed. Meanwhile, the corresponding coefficients of diffusion in the previous paper[1] are improved. Finally, a closed set of numerically-solvable equations of turbulence model are obtained.