应用数学和力学，第10卷第9期（1989年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Clifford代数及其函数理论在力学上应用*

黄 思 训

（南京，空军气象学院，1988年10月4日收到）

摘 要

众所周知，无论是弹性力学或流体力学，处理平面问题比处理空间问题要方便得多，其原因之一单复变函数尤其是解析函数有一整套完整的理论，而对空间问题来说就困难得多．本文首先介绍 Clifford 代数的一般理论，然后着重讨论三维空间上的 Clifford 代数，建立起三维空间中类似于解析函数的所谓正则函数，把平面问题的一些重要结果推广到三维或高维空间中去，这无疑是对弹性力学或流体力学有重要的意义．但由于 Clifford 代数是不可交换的代数，故把二维空间向三维推广时，许多地方仍存在着本质上的困难，故不能简单地平推一些结果，对存在的问题有待于以后深入研究．

一、引 言

设V_n是n维向量空间，$1,e_2,\cdots,e_n$是它的一组基。$\mathscr{A}$是由$1,e_2,\cdots,e_n$所生成的Clifford代数，而

$$e_i^2=-1\ \ (i=2,\ \cdots,\ n);\ \ e_ie_j+e_je_i=0\qquad (i\neq j,\ \ i,j=2,\ \cdots,\ n)$$

在$\mathscr{A}$中引进换位运算：$x,y\in\mathscr{A}$定义$[x,\ y]=xy-yx$，则$\mathscr{A}$成一李代数[1]．近几十年来，不少人通过使用 Clifford 代数将古典单复变函数许多结果推广到 Clifford 代数$\mathscr{A}$的函数类$F_D^{(r)}$中去，逐渐发展成 Clifford 分析这一新的函数分支[2]~[5]，R. P. Gilbert[6]对 Clifford 代数上的正则函数和广义正则函数的性质进行讨论和研究，它们是平面上 Cauchy-Riemann 方程组和一阶椭圆组在高维空间中推广。

众所周知，处理力学或其它问题时，空间问题比平面问题复杂得多，其原因之一单复变函数尤其是解析函数有一整套完整的理论，而对三维空间来说，这就困难得多．黄烈德[7]过去对此作了不少有益的工作，把解析函数理论推广到三维空间中去，引进了全纯向量的概念，讨论了全纯向量的函数性质及其应用，自A．B．Бицадзе[8][9]以后做了不少工作，但由于表示方法上的繁琐、使问题复杂化，如果在三维空间中引进 Clifford 代数，那末使问题既清晰又明了。

---

* 郭仲衡推荐．
此文在第二届全国近代数学与力学讨论会上作综述报告；国家自然科学基金资助项目．

Clifford 代数是不可交换的代数，故把二维空间向三维空间推广时，许多地方有着本质上的困难。例如平面上解析函数的零点是孤立的，但对空间上正则函数（下面给出定义）零点一般不孤立；平面上圆内的解析函数可以反演到圆外去，但对空间来说，这是十分困难的；平面上的边值问题的指标（index）如何推广到空间中去等一系列问题尚待我们进一步研究。

本文首先介绍一下 Clifford 代数的函数理论，然后给出三维空间上 Clifford代数的力学背景，特别讨论了三维空间上正则函数的性质，对半空间与球上给出 Hilbert-Riemann问题解的公式（即 Schwarz 公式），引进 Clifford 代数上的奇异积分方程，最后我们给出了在力学和电学上的应用，我们可以看到，利用 Clifford 代数表示既方便又简洁，这是这种方法的优越性。

本文仅涉及正则函数的性质，我们亦可以把正则函数作进一步推广为广义正则函数(generalized regular functions)，对于广义正则函数的研究已有不少文献记载[6],[19]~[22]，这里不再作进一步介绍。

二、Clifford代数函数理论介绍

本文简单介绍一下 Clifford 代数的函数理论。给出一些基本定义与定理，这些内容可在有关文献中能查阅。

设V_n是带有标准正交基$e_1=1$，e_2，…，e_n的n维实向量空间，$\mathscr{A}_n$是V_n上 Clifford 代数，则$\mathscr{A}_n$的基底为

$$1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ e_2e_3,\ \cdots,\ e_{n-1}e_n,\ \cdots,\ e_2e_3\cdots e_n.$$

于是$\mathscr{A}_n$有2^{n-1}个基，它们满足如下关系

$$e_i^2=-1,\ e_ie_j+e_je_i=0\qquad(i\neq j,\ i,j=2,\ \cdots,\ n)$$

可见$\mathscr{A}_n$是一个不可交换的代数。

$\mathscr{A}_n$中每一个元素可以表示成 $a=\sum\limits_A a_Ae_A$，这里 $e_A=e_{\alpha_1}\cdots e_{\alpha_h}$，其中 $A=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_h\}\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$且$1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_h\leqslant n$，而$a_A$是实数。

对任何$a\in\mathscr{A}_n$，可以定义 $|a|^2=\sum\limits_A|a_A|^2$（称为$a$的绝对值），$\bar{a}$（$a$的共轭）定义为：存在$b\in\mathscr{A}_n$，使$ab=ba=|a|^2=|b|^2$；$a^{-1}$（$a$的逆）定义为：存在$b\in\mathscr{A}_n$，使$ab=ba=1$。

若$z\in V_n$，$z=x_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$称为超复数，$x_1$为超复数的实部，$\bar{z}=x_1-x_2e_2-\cdots-x_ne_n$，于是$z\bar{z}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$

记D是R^n中连通开集，引进函数类F_D^r：

$$F_D^r=\{f\,|\,f:D\to\mathscr{A}_n,\ f(z)=\sum_A f_A(z)e_A,\ f_A(z)\in C^r(D)\}$$

如果$U=\sum_{p=0}^{n}\oplus\wedge^{p}w$是带有基$\{dx^1,\ \cdots,\ dx^n\}$的外代数，我们考虑微分形式，$\psi(x)=\sum_{A,H}\psi_{A,H}e_A dx^H$，其中$x\in D\subset R^n$，我们假定函数$\psi_{A,H}(x)\in C^r(D)$ $(r\geqslant 1)$，则在p-链$\Gamma\subset D$上积分可以由如下形式定义

$$\int_\Gamma \psi(x)=\sum_{A,H}e_A\int_\Gamma \psi_{A,H}(x)dx^H$$

定义如下算子

$$\bar\partial=\frac{\partial}{\partial x_1}+\sum_{i=2}^{n}e_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \partial=\frac{\partial}{\partial x_1}-\sum_{i=2}^{n}e_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

显然$\Delta=\partial\bar\partial=\bar\partial\partial=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$．由于$\mathscr{A}_n$是不可交换的，于是如果$u\in E_D^1$，则

$$\bar\partial u=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sum_{i=2}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad u\bar\partial=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}e_i.$$

对于上述∂及$\bar\partial$算子，通常函数求导法则已经不能成立，例$\bar\partial(uv)=(\bar\partial u)v+\sum_{i=1}^{n}e_i u\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\neq(\bar\partial u)v+u(\bar\partial v)$．一般来说$\bar\partial u\neq u\bar\partial$，关于这一点必须引起注意．

定义2.1 若$u\in F_D^1$，如果在D中$\bar\partial u=0$（或$u\bar\partial=0$）则称u在D中为左正则函数（或右正则函数）．

特别当$n=2$时，正则等价于解析．如果$\Delta u=0$则$\bar\partial(\partial u)=0$，$(u\partial)\bar\partial=0$，故$\partial u$与$u\partial$为$D$中左正则与右正则函数．引进记号

$$d\sigma=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}e_\alpha d\hat x_\alpha,\quad d\bar\sigma=e_1 d\hat x_1-\sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^{\alpha-1}e_\alpha d\hat x_\alpha.$$

其中 $d\hat x_\alpha=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha-1}\wedge dx^{\alpha+1}\wedge\cdots\wedge dx^n$.

定理2.1(Stokes定理)[10] 若$M\subset D$，M是n维可微的定向流形，$f,\ g\in F_D^r(r\geqslant 1)$，$\Gamma$是$M$上的$n$-链，则

$$\int_\Gamma f d\sigma g=\int_\Gamma[(f\bar\partial)g+f(\bar\partial g)]dx \tag{2.1}$$

其中$dx=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$.

特别情形

〈1〉 若$f\bar\partial=0$，则$\int_\Gamma f d\sigma=0$；$\bar\partial f=0$，则$\int_\Gamma d\sigma\cdot f=0$·

〈2〉 若$f\bar{\partial}=0$，$\bar{\partial}g=0$，则$\int_{\dot{\Gamma}} fd\sigma g=0$。

〈3〉 若$\Delta f=0$，则$\int_{\dot{\Gamma}} d\sigma(\partial f)=0$，$\int_{\dot{\Gamma}}(f\partial)d\sigma=0$。

Stokes 定理的另一种形式

$$\int_{\dot{\Gamma}} d\bar{\sigma}f=\int_{\Gamma}\partial f dx,\ \int_{\dot{\Gamma}} fd\bar{\sigma}=\int_{\Gamma}(f\partial)dx.$$

定理2.2 (Cauchy-Pompieu 公式)[10] 如果$\Omega\subset D$是一个紧n维可微定向流形，其边界为$\partial\Omega$，$f\in F_D^r(r\geqslant 1)$ 则有

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta\cdot f(\zeta)-\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}(\bar{\partial}f)(\zeta)d\zeta \tag{2.2}$$

或

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}f(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}-\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega}(f\bar{\partial})(\zeta)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\zeta \tag{2.2*}$$

其中$\omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$是$n$维单位球面的面积。

由定理2.2立即可得

定理2.3 (Cauchy公式) 在定理2.1假定下，若$\bar{\partial}f=0$则

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta\cdot f(\zeta) \tag{2.3}$$

若$f\bar{\partial}=0$，则

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}f(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n} \tag{2.3*}$$

由于变量$z(n\geqslant 3)$时不正则，且z^m亦不正则于是 Delanghe[10]给出了完全正则超复变量(tofally regular hypercomplex) 的概念

定义2.2 形如$z=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha e'_\alpha(e'_\alpha\in\mathscr{A}_n)$ 且满足$\bar{\partial}(z^p)=0$ ($\forall p\in N$)的超复变量称为完全正则超复变量。

引进变量 $z_k=x_k-x_1e_k$，显然 $\bar{\partial}(z_k)=0(\forall p\in N)$，$\bar{\partial}(z_k^2)\neq 0$故 $z_k=x_k-x_1e_k$ 是完全正则超复变量。

利用z_k可以建立p次齐次多项式

$$V_{k_1\cdots k_p}^{(0)}(z)=\frac{1}{p!}\sum_{\pi(k_1,\cdots,k_p)}z_{k_1}\cdots z_{k_p}\ \ (z_{k_i}=x_{k_i}-x_1e_{k_i})$$

利用$V_{k_1\cdots k_p}^{(0)}(z)$可以象平面上解析函数一样建立起第二 Taylor 展开式及 Laurent 展开式。其中$\pi(k_1,\cdots,k_p)$ 为$k_1,\cdots,k_p$个排列。所谓第一Taylor 展开式为$f(z)$直接展开成$x_1,\cdots,$

x_n的幂级数。有关这方面工作可参阅专著[6]。

利用 Laurent 展开可以定义留数概念。

定义2.3 Laurent 展开式中 $\frac{\bar{z}}{|z|^n}$ 的系数b_0为$f(z)$在原点的留数；$-b_0$为 $f(z)$ 在∞点的留数。

$$b_0=\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B}d\sigma_\zeta f(\zeta) \tag{2.4}$$

其中$B=B(0,r)$是适当选取的球。

特别若原点是$f(z)$的一阶极点，则

$\operatorname{Res}f(0)=b_0=\lim_{|z|\to 0}(|z|^{n-2}\cdot z\cdot f(z))$

定理2.4（留数定理）[11] 设Ω是n维可微的紧定向流形，边界为$\partial\Omega$，在$\partial\Omega$内有k个奇点a_1，…，a_k，则

$$\int_{\partial\Omega}d\sigma_\zeta f(\zeta)=\omega_n\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}f(a_j) \tag{2.5}$$

若$f(z)$有有限个奇点（极点或本性极点）外正则

$$\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}f(a_j)+\operatorname{Res}f(\infty)=0 \tag{2.6}$$

Delanghe在文献[12]中证明了Liouville定理

定理2.5　如果$f(z)$在$R^n\cup\{\infty\}$正则，则$f(z)$是常数。

三、三维空间上Clifford代数的力学景背

本节我们给出三维空间上 Clifford 代数的力学背景，利用 Clifford 代数把三维空间上力学方程组表示形式大大简化，而且给出类似于平面弹性问题中的 Goursat 公式

设V_3是带有标准正交基$e_1=1$，e_2，e_3的三维实向量空间，$\mathscr{A}_3$是V_3上 Clifford 代数，则$\mathscr{A}_3$的基底为$e_1=1$，e_2，e_3，e_2e_3，$\mathscr{A}_3$上的函数可以表示成

$$\phi(z)=\phi_1(z)-\phi_2(z)e_2-\phi_3(z)e_3+\phi_0(z)e_2e_3 \tag{3.1}$$

于是若在D内$\phi\bar{\partial}=0$，即ϕ为右正则函数则通过计算知：

$$\begin{array}{ll}
e_1: & \left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\phi_3}{\partial x_3}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\phi_0}{\partial x_1}\qquad\quad-\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\phi_3}{\partial x_2}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\phi_0}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_3}\qquad\quad-\dfrac{\partial\phi_3}{\partial x_1}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\phi_0}{\partial x_3}-\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\qquad\quad=0,\quad \text{或}-\dfrac{\partial\phi_0}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1}=0
\end{array}\right.\\
e_2e_3: & \\
e_3: & \\
e_2: &
\end{array} \tag{3.2}$$

或者写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

下面举例说明

例1：三维空间中流场方程组

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\Omega_0,\ \nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{\Omega}=(\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3) \tag{3.4}$$

如果我们令 $\phi(z)=V_1(z)-V_2(z)e_2-V_3(z)e_3$，则(3.4) 转化为 $\phi\bar{\partial}=f$ 形式，其中 $f=\Omega_0-\Omega_3e_2+\Omega_2e_3+\Omega_1e_2e_3$。

类似地对静态的电磁过程且媒介是均匀和各向同性的 Maxwell 方程组 $\nabla\cdot\mathbf{U}=A_0$，$\nabla\times\mathbf{U}=\mathbf{A}=(A_1, A_2,\ A_3)$ 令 $\phi=U_1-U_2e_2-U_3e_3, g=A_0-A_3e_2+A_2e_3+A_1e_2e_3$，Maxwell方程组转化为 $\phi\bar{\partial}=g$ 的形式。

例2 三维空间中Laplace方程 $\Delta u\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}=0$，则 $(u\partial)\bar{\partial}=0$，于是令 $\phi=\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}e_2-\frac{\partial u}{\partial x_3}e_3$，则 $\Delta u=0$ 转化为 $\phi\bar{\partial}=0$ 的形式。由此可见，三维空间上Laplace方程的边值问题在一定情况下可化为正则函数的边值问题来处理。

例3 空间问题的弹性力学方程组，在钱伟长教授弹性力学[18]一书中，对空间问题根据已知膨胀和转动决定位移即所谓的 Stokes 分解式。Stokes 在1849年指出位移 $(u,\ v,\ w)$ 可以分成二部分，一部分代表没有体积膨胀的纯转动位移即 $\mathbf{u}_1(u_1,\ v_1,\ w_1)$；另一部分代表没有转动的纯体积膨胀位移 $\mathbf{u}_2(u_2,\ v_2,\ w_2)$，于是 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 分别满足如下关系式

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_1=0,\ \nabla\times\mathbf{u}_2=0 \tag{3.5}$$

由 $\nabla\cdot\mathbf{u}_1=0$，因此 $u_1,\ v_1,\ w_1$ 可用 $F,\ G,\ H$ 三个函数表示

$$\mathbf{u}_1=\nabla\times\mathbf{F}\quad(\mathbf{F}=(F,\ G,\ H)) \tag{3.6}$$

让它们同时适合条件

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=0 \tag{3.7}$$

而 $\mathbf{u}_2$ 可以用一应变函数 ϕ 来表示

$$\mathbf{u}_2=\nabla\phi \tag{3.8}$$

从而任意位移可以写成

$$\mathbf{u}=\nabla\times\mathbf{F}+\nabla\phi,\quad \nabla\cdot\mathbf{F}=0 \tag{3.9}$$

引进 $\mathscr{A}_3$ 上函数 $\psi=F-Ge_2-He_3+\phi e_2e_3$，$f=-we_2+ve_3+ue_2e_3$，则(3.9)可以表示成如下简单形式 $\phi\bar{\partial}=f$。

如果我们把位移假定为形式

$$\mathbf{u}=\nabla\times\mathbf{F}+\nabla A\phi,\quad \nabla\cdot\mathbf{F}=0 \tag{3.10}$$

其中A是待定常数，我们问什么时候F，G，H，ϕ才适合静力弹性平衡方程即 Lamé 方程（我们这里将限于研究体积力等于零的情形）

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\theta+\mu\Delta(u,\ v,\ w)=0,\quad \theta=\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{3.11}$$

把(3.10)代入(3.11)，取$A=\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}=\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$，可得

$$\Delta(\nabla\times\mathbf{F}+\nabla\phi)=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{F}=0 \tag{3.12}$$

在(3.12)中$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$引进三个函数$\phi_i(i=1,\ 2,\ 3)$，$\mathbf{F}=\nabla\times(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$，把此式代入(3.12)式中第一式令$\Phi=\nabla\cdot(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$则可得到

$$\Delta^2\phi_1=0,\quad \Delta^2\phi_2=0,\quad \Delta^2\phi_3=0 \tag{3.13}$$

把$\mathbf{F}=\nabla\times(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$，$\Phi=\nabla\cdot(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$代入(3.10)我们得到弹性平衡方程的解为

$$\left.\begin{aligned} &u=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\Delta\phi_1, && v=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\Delta\phi_2\\ &w=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Delta\phi_3, && \Phi=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

其中$B=1-A=[2(1-\nu)]^{-1}$。设$P_i=\Delta\phi_i(i=1,\ 2,\ 3)$则$\Delta P_i=0$，显然有

$$\Delta\Phi=\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_3}{\partial x_3} \tag{3.15}$$

于是(3.15)的解可以表示成

$$\Phi=\phi_0+(x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3)/2 \tag{3.16}$$

这里ϕ_0满足$\Delta\phi_0=0$，故 Galerkin 方程组的解可以写成

$$u=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+P_1,\quad v=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+P_2,\quad w=-B\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+P_3 \tag{3.17}$$

这里Φ由(3.16)表示，$\Delta\phi_0=\Delta P_i=0\ (i=1,\ 2,\ 3)$。

下面我们给出类似于平面问题中Goursat 公式。由文[14]可知，$\phi\bar{\partial}=0$，$\phi=\phi_1+\phi_2e_2+\phi_3e_3+\phi_0e_2e_3$，则$\Delta\phi_i=0$。这四个调和函数只要确定其中二个就可以决定其它二个，即可以引进共轭调和的概念。引进记号$\mathrm{RE}\phi=\phi_1+\phi_2e_2$，$\mathrm{IM}\phi=\phi_3-\phi_0e_2$，则$\phi=\mathrm{RE}\phi+e_2\mathrm{IM}\phi$，$\mathrm{IM}\phi$称为$\mathrm{RE}\phi$的共轭调和函数，另外我们引进记号$\mathrm{Re}\phi=\phi_1$，则由$\phi_0+P_3e_2$及$P_1+P_2e_2$构成了某二个正则函数的RE部，即

$$\mathrm{RE}\chi(z)=\phi_0+P_3e_2,\quad \mathrm{RE}\chi_1(z)=P_1+P_2e_2$$

其中$\chi(z)\bar{\partial}=\chi_1(z)\bar{\partial}=0$，于是我们得到三维空间中 Goursat 公式如下

$$\Phi(z)=\mathrm{Re}\left\{\left(1-\frac{1}{2}x_3e_2\right)\chi(z)+(x_1-x_2e_2)\chi_1(z)\right\} \tag{3.18}$$

对于平面问题来说，Goursat 公式退化为

$$\Phi(z)=\mathrm{Re}\{\chi(z)+\bar{z}\chi_1(z)\} \tag{3.19}$$

有了 Goursat 公式如何推出位移与应力的 Колосов 公式，有待于以后深入研究。

四、三维空间上正则函数的性质及广义Schwarz公式

本节首先简单介绍一下三维空间上正则函数的一些基本性质，然后给出半空间和球上的广义 Schwarz 公式。

设$\partial\Omega$是R^3中有界单连通区域Ω^+的边界，是二维可微定向流形，$\phi(\zeta)$是$\partial\Omega$上定义的Hölder 连续的超复函数，则$\phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\phi(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}$在 Cauchy 主值意义积分存在，且在$\partial\Omega$上也 Hölder 连续，类似于平面上解析函数成立如下 Plemel'j 公式

$$\phi^\pm(z)=\pm\frac{1}{2}\phi(z)+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\phi(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}\qquad(z\in\partial\Omega)\tag{4.1}$$

而算子$(K\phi)(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\phi(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}$ $(z\in\partial\Omega)$，是$\partial\Omega$上具有$\mathscr{A}_3$值的 Hölder 连续空间$H(\alpha,\partial\Omega)$到自身的线性有界算子。

定理4.1[1] (平均值公式)[16] 如果$\phi(z)$在D内正则，球$B_R(z)\subset D$，则有

$$\phi(z)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B_R(z)}\phi(\zeta)ds\tag{4.2}$$

定理4.2 (Poisson 公式推广)[16] 如果$\phi(z)$在球$B_R(0)$正则，则对任何$z\in B_\rho(0)$ $(0<\rho<R)$，成立

$$\phi(z)=\frac{\rho^2-\delta^2}{4\pi\rho}\int_{\partial B_\rho(0)}\frac{\phi(\zeta)}{r^3}ds\ .\tag{4.3}$$

其中$r=|\zeta-z|$，$\delta=|z|$。

定理4.1，4.2类似于平面上解析函数来证明。由定理4.2可知$\phi\bar{\partial}=0$，则ϕ的每一个分量都是调和函数，即$\phi\bar{\partial}=0$决定了四个调和函数。

利用上面性质可以类似地推出象解析函数中最大模原理，Morera 定理，Harnack 定理，Weierstrass定理，也可以引进广义 Green 函数，利用广义Green 函数讨论一些边值问题，这里不再赘述。

下面我们建立半空间和球上 Schwartz 公式，即讨论三维空间上正则函数的边值问题。

引进记号[14] $x=x_1+x_2e_2+x_3e_3$，$Z_x=x_1+e_2x_2$，$Z_x^*=x_1-x_2e_2$，

$$\frac{\partial}{\partial Z_x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-e_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad\frac{\partial}{\partial Z_x^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

引理4.1[14] $\phi\bar{\partial}=0$ $(z\in D)$ 充要条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3}(\mathrm{RE}\phi)+2\frac{\partial}{\partial Z_x}(\mathrm{IM}\phi)=0\\&2\frac{\partial}{\partial Z_x^*}(\mathrm{RE}\phi)-\frac{\partial}{\partial x_3}(\mathrm{IM}\phi)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

首先我们考虑半空间上 Schwarz 公式。

如果$\phi\bar{\partial}=0$ $(\mathrm{in}\,x_3>0)$，记$x_3>0$的区域为Ω^+，$x_3<0$区域为Ω^-，同时设$\phi(\infty)=0$，那末在$x_3=0$的边界上如何提边界条件呢？四个未知函数ϕ_i，应该给出几个量才能确定ϕ呢？

记 $z=(x_1,x_2,x_3)$，$z^*=(x_1,x_2,-x_3)$

$$\phi(z)=\phi_1(z)+\phi_2(z)e_2+\phi_3(z)e_3+\phi_0(z)e_2e_3,$$
$$\phi^*(z^*)=-\phi_1(z^*)-\phi_2(z^*)e_2+\phi_3(z^*)e_3+\phi_0(z^*)e_2e_3$$

若$\phi\bar{\partial}=0$，$z\in\Omega^+$，则易验证$\phi^*(z^*)\bar{\partial}=0$，$z\in\Omega^-$，于是

$$\phi^+(z)-\phi^{*-}(z)=2(\phi_1+\phi_2e_2),\quad x_3=0 \tag{4.5}$$

我们假设$\phi(z)$在$x_3=0$上已知二个分量$\phi_1=g_1/2$，$\phi_2=g_2/2$，且记$g(z)=g_1+g_2e_2$，则

$$\mathrm{RE}(\phi)|_{x_3=0}=(g_1+g_2e_2)/2 \tag{4.6}$$

由(4.5)可知$\phi^+(z)-\phi^{*-}(z)=g(z)$，由正则函数 Plemel'j公式

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}g(\zeta)d\sigma\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3} \tag{4.7}$$

下面讨论问题(4.6)解的一般形式，由平面问题知解析函数的 Schwarz 公式相差一个虚常数即iC，这里也存在同样的问题，

$$\phi\bar{\partial}=0,\quad \mathrm{RE}\phi|_{x_3=0}=g/2$$

于是我们力图求如下问题的解

$$\phi\bar{\partial}=0,\ x_3>0;\quad \mathrm{RE}\phi|_{x_3=0}=0 \tag{4.8}$$

由于$\Delta(\mathrm{RE}\phi)=0$，$\mathrm{RE}\phi|_{x_3=0}=0$，我们有$\mathrm{RE}\phi=0$，现在转向$\mathrm{IM}\phi$，由引理4.1可知

$$\partial(\mathrm{IM}\phi)/\partial Z_z=0,\quad \partial(\mathrm{IM}\phi)/\partial x_3=0$$

于是我们得到$\mathrm{IM}\phi=C(x_1,x_2)$，且$\partial C(x_1,x_2)/\partial Z_z=0$，即$\bar{C}(x_1,x_2)$是作为变量$x_1$，$x_2$的全纯函数，故有下面定理

定理4.3 (半空间上 Schwarz 公式)

$$\phi\bar{\partial}=0,\ x_3>0;\ \phi_1+\phi_2e_2|_{x_3=0}=\mathrm{RE}\phi|_{x_3=0}=g/2, \tag{4.9}$$

的解可以表示成如下形式

$$\phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}g(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}+e_3C(x_1,x_2) \tag{4.10}$$

其中$\bar{C}(x_1,x_2)$是关于变量x_1，x_2的任意全纯函数。

定理4.3指出$\phi\bar{\partial}=0$中四个未知函数，只要知$\mathrm{RE}\phi$中二个量在$x_3=0$上的值，另外还需知另外二个量$\mathrm{IM}\phi$在$x_3=0$上低一维上的值，则ϕ在$x_3>0$上就完全确定。类似地可以建立如下定理

定理4.4 $\phi\bar{\partial}=0$，$x_3>0$；$\mathrm{IM}\phi|_{x_3=0}=\phi_3-\phi_0e_2=g/2=(g_3-g_0e_2)/2$的解可以表示成

$$\phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}g(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}+D(x_1,x_2) \tag{4.11}$$

其中$D(x_1,x_2)=D_1(x_1,x_2)+e_2D_2(x_1,x_2)$是$x_1$，$x_2$的全纯函数。

下面给出球上 Schwartz 公式

定理4.5[14]设$f=f_1+f_2e_2$是$|x|=R$上连续函数，

$$\bar{\partial}\phi=0,\ |x|<R;\ \mathrm{RE}\phi=f(x),\ |x|=R \tag{4.12}$$

解能表示成如下形式

$$\begin{aligned}\phi(x)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\partial D}\Big\{&\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}+e_3\Big[-\frac{2(Z_x(x_3-y_3)+x_3(Z_x-Z_y))}{|Z_x-Z_y|^2|x-y|}\\&+\frac{4(Z_x-Z_y)(x_3-y_3)(|Z_x|^2-(x_1y_1+x_2y_2))}{|Z_x-Z_y|^4|x-y|}\\&+\frac{(Z_x-Z_y)(x_3-y_3)(|x|^2-R^2)}{|Z_x-Z_y|^2|x-y|^3}\Big]\Big\}f(y)ds_y+e_2h(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中$\bar{h}(x_1, x_2)$是x_1，x_2的全纯函数，$h(x_1, x_2)=h_1(x_1, x_2)+e_2h(x_1, x_2)$。

五、Clifford代数上奇异积分方程

众所周知，关于平面上奇异积分方程[15]已经给出充分的研究，但对 Clifford 代数上奇异积分方程尚未有人深入研究。本节我们首先给出 Poincaré-Bertrand 置换公式及第一类 Clifford 代数意义下奇异积分方程的反演公式，然后讨论第二类奇异积分方程，在六节中我们将给出在力学与电学上应用。

定理5.1[16] 设Γ是R^3中有界单连区域D^+的边界，是二维可微定向流形，$\varphi(\zeta)$是定义在Γ上 Hölder 连续的超复函数，则成立

$$\int_\Gamma\left(\int_\Gamma \varphi(\zeta)d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_1}{|\zeta-\zeta_1|^3}\right)d\sigma_{\zeta_1}\frac{\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_0}{|\zeta_1-\zeta_0|^3}=4\pi^2\varphi(\zeta_0) \tag{5.1}$$

利用定理5.1我们来讨论第一类奇异积分方程的反演。

考虑第一类奇异积分方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}{|\zeta-\zeta_0|^3}=f(\zeta_0) \qquad (\zeta_0\in\Gamma) \tag{5.2}$$

其中Γ是 Ляпунов 曲面，$f\in H(\Gamma)$，$\varphi(\zeta)\in H(\Gamma)$，则(5.2)的解为

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\zeta)d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}_0}{|\zeta-z_0|^3} \qquad (z_0\in\Gamma) \tag{5.3}$$

现在讨论第二类奇异积分方程

$$A(z)\varphi(z)+\frac{B(z)}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}=f(z) \qquad (z\in\Gamma) \tag{5.4}$$

其中A，B，$f\in\mathscr{A}_3$，$f\in H(\Gamma)$，记正则函数

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3} \tag{5.5}$$

利用 Сохоцкий-Plemel'j公式把(5.4)转化为

$$(A+B)\Phi^+-(A-B)\Phi^-=f \tag{5.6}$$

设$|A+B|\neq 0$，$|A-B|\neq 0$，记$G=(A+B)^{-1}(A-B)$，$F=(A+B)^{-1}f$，则(5.4)转化为 Hilbert 问题

$$\Phi^+(z)=G(z)\Phi^-(z)+F(z) \tag{5.7}$$

对于这个问题目前尚未有人研究，主要困难问题的指标（index）很难定义，这个问题有待于以后深入研究。下面考虑特殊情形G是$\mathscr{A}_3$上 Clifford 常数，则此时 Hilbert 问题可以解决，令$X(z)=\begin{cases} G & (z\in D^+) \\ 1 & (z\in D^-)\end{cases}$ 显然$X\bar{\partial}=0$，且满足$X^+=GX^-$，于是令

$$\psi(z)=\begin{cases}[X^+(z)]^{-1}\Phi^+(z) & (z\in D^+)\\ \Phi^-(z) & (z\in D^-)\end{cases}$$

则$\psi(z)$是分片正则函数，满足$\psi^+-\psi^-=[X^+(z)]^{-1}F$，由 Plemel'j 公式知

$$\psi=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}[X^{+}(\zeta)]^{-1}Fd\sigma_{\xi}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}},$$

于是

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{4\pi}\int_{\Gamma}G^{-1}Fd\sigma_{\xi}\cdot\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma}Fd\sigma_{\xi}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}} & (z\in D^{+})\\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma}G^{-1}Fd\sigma_{\xi}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}} & (z\in D^{-})\end{cases}$$

对于 Hilbert 问题在特定条件下我们可用拓扑方法来解决[17]。

六、Clifford代数在力学上应用

下面我们利用 Clifford 代数的理论给出在力学上某些应用

例1 寻找D^{+}内正则函数ϕ，$\psi(\infty)=0$，在$x_3=0$上满足条件

$$(\phi g)^{+}-(\phi g)^{-}=2\gamma,\ (\gamma=\gamma_3e_3+\gamma_0e_2e_3,\ g\neq 0) \tag{6.1}$$

其中g是 Clifford 常数。

解 显然$g\neq 0$时，$g^{-1}=|g|^{-2}\bar{g}$，且$(\phi g)\bar{\partial}=0$，由 Plemel'j 公式

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi|g|^{2}}\int_{\zeta_3=0}\gamma(\zeta)d\sigma_{\xi}\frac{\bar{\xi}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}}\cdot\bar{g} \tag{6.2}$$

例2 有关弹性半空间上刚坚的冲体压力问题，这类问题有大量文献[18]记载，问题归结为第一类积分方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta_1,\ \zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2}{\sqrt{(x_1-\zeta_1)^2+(x_2-\zeta_2)^2}}=g(x_1,\ x_2) \tag{6.3}$$

此问题是研究半空间$\zeta_3>0$，一绝对刚坚的物体（冲体）压在半空间上，假定半空间与冲体间的摩擦力不存在，余下来部分Γ^{*}没有外力作用。

解 我们设法把(6.3)转化为 Clifford 代数意义下第一类奇异积分方程借助于反演来求解。(6.3)对x_1，x_2进行微商

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta_1,\ \zeta_2)(\zeta_i-x_i)d\zeta_1d\zeta_2}{[(x_1-\zeta_1)^2+(x_2-\zeta_2)^2]^{3/2}}=\frac{\partial g(x_1,\ x_2)}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2) \tag{6.4}$$

令 $\phi=ue_3$，$f=\dfrac{\partial g}{\partial x_1}-\dfrac{\partial g}{\partial x_2}e_2$，则(6.4)可转化为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\phi(\zeta)d\sigma_{\xi}\left.\frac{\bar{\xi}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}}\right|_{x_3=0}=f(x_1,\ x_2) \tag{6.5}$$

利用反演及通过计算可得

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}f(\zeta_1,\zeta_2)d\sigma_{\xi}\left.\frac{\bar{\xi}-\bar{z}}{|\zeta-z|^{3}}\right|_{x_3=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{-\left[\dfrac{\partial g}{\partial\zeta_1}(\zeta_1-x_1)+\dfrac{\partial g}{\partial\zeta_2}(\zeta_2-x_2)\right]}{[(x_1-\zeta_1)^2+(x_2-\zeta_2)^2]^{3/2}}d\zeta_1d\zeta_2e_3$$

利用分部积分及物理背景知

$$u(x_1,x_2)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\Delta g(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2}{\sqrt{(x_1-\zeta_1)^2+(x_2-\zeta_2)^2}} \tag{6.6}$$

例3 考虑三维空间上流场

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\Omega_0,\ \nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{\Omega}=(\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3),\ \mathbf{V}(\infty)=0 \tag{6.7}$$

解 令$\phi=V_1-V_2e_2-V_3e_3$，$f=\Omega_0-\Omega_3e_2+\Omega_2e_2+\Omega_1e_2e_3$，则(6.7)转化为$\phi\bar{\partial}=f$，利用 Pompieu 公式(2.2)*知

$$\phi(z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}f(\zeta)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}d\zeta=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}f(\zeta)\partial_\zeta\left(\frac{1}{|\zeta-z|}\right)d\zeta$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}f(\zeta)\partial_z\left(\frac{1}{|\zeta-z|}\right)d\zeta$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\partial\left(\int_{R^3}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|}d\zeta\right)=-\frac{1}{4\pi}\partial\left(\int_{R^3}\frac{\Omega_0}{r}d\zeta-\int_{R^3}\frac{\Omega_3}{r}d\zeta e_2\right.$$

$$\left.+\int_{R^3}\frac{\Omega_2}{r}d\zeta e_3+\int_{R^3}\frac{\Omega_1}{r}d\zeta e_2e_3\right)$$

于是$\mathbf{V}=(V_1,\ V_2,\ V_3)$可以表示成

$$\mathbf{V}=-\frac{1}{4\pi}\nabla\left(\int_{R^3}\frac{\Omega_0}{r}d\zeta\right)+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_{R^3}\frac{\mathbf{\Omega}}{r}d\zeta \tag{6.8}$$

例4 我们考虑 Maxwell 方程组。设电磁过程是静态，媒质是均匀且各向同性，则问题为

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=A_0,\quad \nabla\times\mathbf{U}=\mathbf{A}=(A_1,\ A_2,\ A_3) \tag{6.9}$$

在边界$\Gamma=\partial\Omega$上满足边界条件

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}=\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3=g\in H_\alpha(\Gamma)\qquad(\mathbf{n}\text{是}\Gamma\text{外法线方向}) \tag{6.10}$$

解 令$\phi=U_1-U_2e_2-U_3e_3$，$f=A_0-A_3e_2+A_2e_3+A_1e_2e_3$则(6.9)化为$\phi\bar{\partial}=f$，利用 Pompieu 公式(2.2)*可知$\phi$能表示成

$$\phi(z)=\psi(z)-\frac{1}{4\pi}\int_\Omega f(\zeta)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}d\zeta \tag{6.11}$$

其中$\psi\bar{\partial}=0$即$\psi(z)$是Ω内正则函数，令$\psi=\psi_1-\psi_2e_2-\psi_3e_3$，$\Theta$是如下函数$\Theta\bar{\partial}=\psi$，则$\Theta$满足$\Theta\partial\bar{\partial}=\Delta\Theta=0$，即$\Theta$满足 Laplace方程，(6.10)写成向量形式

$$\mathbf{U}=\boldsymbol{\psi}-\frac{1}{4\pi}\nabla\left(\int_\Omega\frac{A_0}{r}d\zeta\right)+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\int_\Omega\frac{\mathbf{A}}{r}d\zeta\right)$$

则$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}=\boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{n}-\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\left(\int_\Omega\frac{A_0}{r}d\zeta\right)\right]_n+\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\int_\Omega\frac{\mathbf{A}}{r}d\zeta\right)\right]_n$，而$\boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{n}=\sum_{i=1}^{3}\psi_i\alpha_i=\frac{\partial\Theta}{\partial n}$，

可得Θ应满足

$$\Delta\Theta=0,\ \left.\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right|_\Gamma=g-\left\{-\frac{1}{4\pi}\nabla\int_\Omega\frac{A_0}{r}d\zeta+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\mathbf{A}}{r}d\zeta\right\}_n \tag{6.12}$$

于是 Laplace 方程的 Neumann问题可解充要条件为

$$0=\int_\Gamma\frac{\partial\Theta}{\partial n}ds=\int_\Gamma gds-\int_\Omega A_0d\zeta \tag{6.13}$$

从而我们得到(6.12)可解即(6.9)(6.10)可解充要条件为(6.13)。在此可解条件(6.13)下，我们可求得Θ，利用$\Theta\bar{\partial}=\psi$，我们可得正则函数$\psi$，由$\psi$知(6.9)(6.10)问题解表示成(6.11)。

例5 设$u(z)$是R^3中调和函数，$u(\infty)=0$，在$x_3=0$上满足

$$u^+-u^-=0,\ \frac{\partial u^+}{\partial x_3}-\frac{\partial u^-}{\partial x_3}=f(x_1,x_2);\quad x_3=0,\tag{6.14}$$

解 令 $\phi=\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}e_2-\frac{\partial u}{\partial x_3}e_3$，则$\phi\bar{\partial}=0$，由(6.14)知

$$\phi^+-\phi^-=g=-f(x_1,\ x_2)e_3;\ x_3=0\tag{6.15}$$

利用 Plemel'j 公式$\phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}g(\zeta)d\sigma_\zeta\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^3}$，由于

$$g(\zeta)d\sigma_\zeta(\bar{\zeta}-\bar{z})=f(\zeta_1,\ \zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2[(\zeta_1-x_1)-(\zeta_2-x_2)e_2+x_3e_3]$$

于是 $\phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}\frac{f(\zeta_1,\ \zeta_2)[(\zeta_1-x_1)-(\zeta_2-x_2)e_2+x_3e_3]d\zeta_1d\zeta_2}{[(\zeta_1-x_1)^2+(\zeta_2-x_2)^2+x_3^2]^{3/2}}$，即

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3)=\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta_3=0}\frac{f(\zeta_1,\ \zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2}{\sqrt{(\zeta_1-x_1)^2+(\zeta_1-x_2^2)+x_3^2}}\tag{6.16}$$

七、结 束 语

本文把 Clifford 代数引进到力学中去，我们可以看到正则函数许多性质类似于平面上解析函数，且利用 Clifford 代数的表示法把三维空间中弹性力学方程组可以用非常简单形式表示出来且给出了Goursat 公式，在第六节中我们给出了在力学和电学上某些应用，虽然这些例子并不复杂，但从求解中可见，利用 Clifford 代数表示法既方便又简洁，这是这种方法很大优越性。同时亦指出，把二维向三维推广时还有不少本质上的困难，这些困难有待于以后更深入的研究。

参 考 文 献

[1] 万哲先，《李代数》，科学出版社（1978）。

[2] Brackx, F., R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford Analysis, Research Notes in Math.*, Pitman Advanced Publishing Program (1982).

[3] McCarthy, P. J., Ultrageneralized complex analysis, *Letters in Mathematical Physics*, 1 (1980), 509—514.

[4] Sommen, F., Some Connection between Clifford analysis and complex analysis, *Complex Variables*, 1,1 (1982), 97—118.

[5] Ryan, J., Sepecial functions and relations within complex Clifford analysis, *Complex Variables*, 2, 1 (1983), 177—198.

[6] Gilbert, R. P. and J. L. Buchanan, *First Order Elliptic Systems, A Function Theoretic Approach.*, N. Y., Academic Pr. (1983).

[7] 黄烈德，全国奇异积分方程学术讨论报告(一)（1981）.

[8] Бицадзе A. B., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Масква (1966).

[9] Bitsadze, A. V., *Boundary Value Problems for Second Order EllipticrEquations*, North-Hollond (1968).

[10] Delanghe, R., On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra,

Math. Ann., 185 (1970).
[11] Delanghe, R., On the singularities of function with value in a Clifford algebra, *Math. Ann.*, **196** (1972).
[12] Delanghe, R., On regular points and Liouvilles theorem for function with values in a Clifford algebra, Simon Stevin, **44** (1970c).
[13] 钱伟长，《弹性力学》，科学出版社，(1980).
[14] 徐振远、程晋，Clifford 代数上正则函数的 Hilbert-Riemann 边值问题，科学通报，**23** (1987).
[15] Мусхелишвили Н. И.，《奇异积分方程》，上海科学出版社 (1966).
[16] 黄思训，Clifford 代数上奇异积分方程及其在力学上应用（待发表）.
[17] 黄烈德，空间一阶椭圆型偏微分方程组及其边值问题，上海同济大学 (1983).
[18] Галин Л. А.，《弹性理论的接触问题》，科学出版社 (1958).
[19] Goldschmidt, B., *Mathematik*, **34**, Martin-Luther-Universität, Halle-Wiffenberg (1980).
[20] Hile, G. N., Hypercomplex function theory applied to PDEs, Ph. D. Dissertation, Indiana Univ., Bloomington (1972).
[21] Hile, G.N., Elliptic systems in the plane with first order terms and constant coefficients, *Comm. PDEs*, **3**, 10 (1978), 949—977.
[22] Hile, G. N. and M. H. Protter, Properties of overdetermined first order elliptic systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **66**, 3 (1977b), 267—293.

Clifford Algebra, Theory of Its Function and Their Application to Mechanics

Huang Si-xun

(*Meteorological Institute of Air Force, Nanjing*)

Abstract

As is well known, in both elastic mechanics and fluid mechanics, the plane problems are more convenient than space problems. One of the causes is that there has been a complete theory about the complex function and the analytic function, but in space problems, the case is quite different. We have no effective method to deal with these problems. In this paper, we first introduce general theories of Clifford algebra. Then we emphatically explain Clifford algebra in three dimensions and establish theories of regular function in three dimensions analogically to analytic function in plane. Thus we extend some results of plane problem to three dimensions or high dimensions. Obviously, it is very important for elastic and fluid mechanics. But because Clifford algebra is not a commutative algebra, we can't simply extend the results of two dimensions to higher imensions. The left problems are yet to be found out.