应用数学和力学，第10卷第7期(1989年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Fredholm第一种积分方程Ax=y的表示定理和一次迭代定理*

云天铨

(华南理工大学工程力学系，1988年4月5日收到)

摘要

本文给出两个定理.

表示定理指出：若具有界 L_2 核的 Fredholm 第一种积分方程 $Ax\doteq y$ 有唯一解 $\hat{x}$，则

$$\hat{x}\doteq\sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\lambda_n\psi_n,\ 其中\varphi_n\doteq\lambda_nA\psi_n,\ \psi_n\doteq\lambda_nA^*\cdot\varphi_n.$$

一次迭代定理指出：$\hat{x}$ 可由公式 $\hat{x}\doteq x_0+g_0A^*(y-Ax_0)$ 一次迭代求得的充分和必要条件是满足下列条件之一：

1. $v_0\doteq g_0A^*Av_0$，$v_0\doteq\hat{x}-x_0$;
2. $u_0\doteq g_0AA^*u_0$，$u_0\doteq y-Ax_0$;
3. $g_0=\|A^*u_0\|^2/\|AA^*u_0\|^2=\|u_0\|^2/\|A^*u_0\|^2$，$u_0\doteq y-Ax_0$ 或
   $g_0=\|Av_0\|^2/\|A^*Av_0\|^2=\|v_0\|^2/\|Av_0\|^2$，$v_0\doteq\hat{x}-x_0$

一、概　　述

科学和工程中许多问题可归结为 Fredholm 第一种积分方程 $Ax=y$. 例如在光学[1]，x射线[2]，气象学[3]，聚合物化学[4]，力学[5~7]，工程[8]等问题便是. 虽然 Fredholm 第一种积分方程解的存在定理 E. Picard(1910) 早已建立[9]，但这一定理既未将解用显式表示也没和求解的方法相联系. 在1951年，L. Landweber[10] 给出求解的迭代公式 $x_{n+1}\doteq x_n+cA^*(y-Ax_n)$，其中 $0<c$(常数)$<2/\|A^*A\|$. 其后，在1970年，Diaz 和 Metcalf[11] 讨论了 Picard 准则和上述序列$\{x_n\}$收敛之间的关系. 在1978年，作者[12]用 Banach 收缩映射定理证明上述序列 $\{x_n\}$ 强收敛并建议一个具有最快收敛的迭代公式 $x_{n+1}\doteq x_n+g_nA^*(y-Ax_n)$，式中把上面的在整个迭代过程中都保持不变的常数$c$用一在每次迭代都改变的常数$g_n=\|u_n\|^2/\|A^*u_n\|^2$，$u_n=y-Ax_n$ 来代替. 其后不久，这一公式被中国船舶科学研究中心的袁家乐用于迴转体-螺旋桨组合体的推力减额的计算[7]中，和实验很一致的计算结果表明：对各种情形应用本公式一次迭代即可收敛而应用 Landweber 公式需迭代3至5次才达同样的精

* 国家自然科学基金资助课题.

度。如果 Fredholm 第一种积分方程 $Ax=y$ 的解能用显式表示或者它可以由一次迭代便求得，那将是有意义的。本文，我将给出解 $\hat{x}$ 的显式表示并研究用最快迭代公式一次迭代得到 $\hat{x}$ 的条件。

二、表示定理

我们考虑在实 Hilbert 空间中一线性算子 $A(\neq 0)$ 由

$$Ax=\int_{\Omega}K(s,t)x(t)dt \tag{2.1}$$

来定义。其中$K(s,t)$是在$\Omega\times\Omega$ ($\Omega=[a,b]$)的非零有界L_2核。令R_A，R_{A^*}和 N_A，N_{A^*}分别表示A和A^*(A的共轭)的值域和零空间。我们有：

引理

$$A^*u\in L_2(\Omega)\cap\bar{R}_{A^*} \qquad (\text{对}u\in L_2(\Omega)\cap\bar{R}_A) \tag{2.2}$$

$$Av\in L_2(\Omega)\cap\bar{R}_A \qquad (\text{对}v\in L_2(\Omega)\cap\bar{R}_{A^*}) \tag{2.3}$$

证明 由 Schwarz 不等式。我们有

$$\|A^*u\|^2=|(A^*u,A^*u)|=|(u,AA^*u)|\leqslant\|u\|\cdot\|AA^*u\| \tag{2.4}$$

因为$u\in L_2(\Omega)\cap\bar{R}_A$，故$\|u\|<\infty$，且$u\in\bar{R}_A=N_{A^*}^{\perp}$，即

$$u\notin N_{A^*}=\{w\,|\,A^*w\doteq 0\}，\text{或}A^*u\neq 0^{1)} \tag{2.5}$$

因此(2.4)式表明

$$\|AA^*u\|\geqslant\|A^*u\|^2/\|u\|>0,$$

即 $AA^*u\neq 0$，或

$$A^*u\notin N_A=\bar{R}_{A^*}^{\perp}，\text{即}A^*u\in\bar{R}_{A^*} \tag{2.6}$$

令 $|K(s,t)|\leqslant M<\infty$，则$\|A^*u\|\leqslant M\|u\|<\infty$，故我们得(2.2)式。

同样地，我们得(2.3)式。 Q.E.D

综合(2.2)式和(2.3)式，我们有：

$$\left.\begin{array}{l}A^*:\ L_2(\Omega)\cap\bar{R}_A\to L_2(\Omega)\cap\bar{R}_{A^*}\\ A:\ L_2(\Omega)\cap\bar{R}_{A^*}\to L_2(\Omega)\cap\bar{R}_A\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

表示定理：

设具有定义在$\Omega\times\Omega$ ($\Omega=[a,b]$)上的有界L_2核$K(s,t)$ 的 Fredholm 第一种积分方程

$$\int_{\Omega}K(s,t)x(t)dt\doteq y(s),\ \ y(s)(\neq 0)\in L_2(\Omega) \tag{2.8}$$

有唯一解$\hat{x}\in L_2(\Omega)$，则$\hat{x}$可用显式表示为：

$$\hat{x}\doteq\sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\lambda_n\psi_n \tag{2.9}$$

式中$[\varphi_n,\ \psi_n]$是一对K的奇异函数属于奇异值 λ_n，即 $\varphi_n=\lambda_nA\psi_n=\lambda_n^2AA^*\varphi_n$，$\psi_n=\lambda_nA^*\varphi_n=\lambda_n^2A^*A\psi_n$。

证明 因$y\in L_2(\Omega)$且$K(s,t)$是一有界的L_2核，即

---

1) “$\doteq$”表示几乎处处相等。

$$\int_\Omega |K(s,t)|^2 dt,\ \int_\Omega |K(s,t)|^2 ds,\ \int_\Omega\int_\Omega |K(s,t)|^2 dsdt$$

有界。因此，据 Schmidt 定理[9,p160]，我们有：

$$y \doteq \sum_{n=1}^{\infty} y_n\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\varphi_n \tag{2.10}$$

式中 $\varphi_n \doteq \lambda_n^2 AA^*\varphi_n (n\geqslant 1)$。$\lambda^2$——$AA^*$的特征值。

据引理，我们有：

$$\exists\, \psi_n \doteq \lambda_n A^*\varphi_n \in L_2(\Omega)\cap \bar{R}_{A^*},\ 对于\varphi_n\in L_2(\Omega)\cap \bar{R}_A \tag{2.11}$$

式中$[\varphi_n,\ \psi_n]$是K的一对奇异函数，属于奇异值λ_n([13，p143]的定理8.2.2)，即

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n &\doteq \lambda_n A\psi_n \doteq \lambda_n^2 AA^*\varphi_n\\ \psi_n &\doteq \lambda_n A^*\varphi_n \doteq \lambda_n^2 A^*A\psi_n\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

将(2.12)式代入(2.10)式，由于A是线性的，且假定$y\doteq A\hat{x}$。故我们有：

$$A\left[\hat{x}-\sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\lambda_n\psi_n\right]\doteq 0 \tag{2.13}$$

据 Picard 定理[9，p161]或由[14，p337，338]，我们有：

$$AA^*u\doteq 0\to u\doteq 0,\ 及A^*Av\doteq 0\to v=0 \tag{2.14}$$

或者，如我们令$A^*u\doteq v$和$Av\doteq u$则得

$$Av\doteq 0和A^*u\doteq 0\to u\doteq 0及v\doteq 0 \tag{2.15}$$

或 $N_A=N_{A^*}=\{0\}$，$H=\bar{R}_A\oplus N_A=\bar{R}_A=\bar{R}_{A^*}\oplus N_{A^*}=\bar{R}_{A^*}$ (2.16)

由(2.15)式和(2.16)式。则(2.13)式变成：

$$\hat{x}\doteq\sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\lambda_n\psi_n\in L_2(\Omega)\cap H\ (或\hat{x}\in L_2(\Omega)) \tag{2.17}$$

因为据 Picard 定理，$\|\hat{x}\|=|(\hat{x},\hat{x})|=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 y_n<\infty$。 Q.E.D

三、一次迭代定理

定理 设上述 Fredholm 第一种积分方程(2.8)有唯一解$\hat{x}\in L_2(\Omega)$，则$\hat{x}$可由迭代公式(3.1)

$$\hat{x}\doteq x_1\doteq x_0+g_0A^*(y-Ax_0) \tag{3.1}$$

对某些$x_0\in L_2(\Omega)$经一次迭代便可求得的条件是当且仅当下列条件之一被满足：

1．$v_0\doteq g_0A^*Av_0$，$v_0\doteq\hat{x}-x_0$ (3.2)

2．$u_0=g_0AA^*u_0$，$u_0=y-Ax_0$ (3.3)

3．$g_0=\|A^*u_0\|^2/\|AA^*u_0\|^2=\|u_0\|^2/\|A^*u_0\|^2$，$u_0\doteq y-Ax_0$

或 $g_0=\|Av_0\|^2/\|A^*Av_0\|^2=\|v_0\|^2/\|Av_0\|^2$，$v_0=\hat{x}-x_0$ (3.4)

证明

我们先证条件(3.2)是必要的。因为A是线性的且$y=A\hat{x}$，如(3.1)式成立，显然，我们必有(3.2)式。

其次，对(3.1)式成立，条件(3.2)显然是充分的。

最后，我们证明(3.2)式，(3.3)式和(3.4)式是等价的。

(3.2)→(3.3)：

$Av_0 \doteq g_0 AA^* Av_0$，令$Av_0 \doteq A(\hat{x}-x_0) \doteq u_0$，故(3.3)式成立。

(3.3)→(3.2)：

$$u_0 = Av_0 = g_0 AA^* Av_0,\ \text{即} A[v_0 - g_0 A^* Av_0] \doteq 0,$$

由(2.15)式，我们得到(3.2)式。

(3.3)→(3.4)：

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2 &= |(u_0,u_0)| = |(g_0 AA^* u_0, u_0)| = g_0 |(A^* u_0, A^* u_0)| \\ &= g_0 \|A^* u_0\|^2\end{aligned}$$

故
$$g_0 = \|u_0\|^2 / \|A^* u_0\|^2 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}g_0 \|AA^* u_0\|^2 &= g_0 |(AA^* u_0, AA^* u_0)| = |(u_0, AA^* u_0)| \\ &= |(A^* u_0, A^* u_0)| = \|A^* u_0\|^2\end{aligned}$$

故
$$g_0 = \|A^* u_0\|^2 / \|AA^* u_0\|^2 \tag{3.6}$$

于是(3.4)式成立。

(3.4)→(3.3)：

(3.4)式表明$\|A^* u_0\|^2 = \|u_0\| \cdot \|AA^* u_0\|$，即

$$g_0 |(A^* u_0, A^* u_0)| = \|g_0 AA^* u_0\| \cdot \|u_0\| \text{或}$$
$$|(g_0 AA^* u_0, u_0)| / (\|g_0 AA^* u_0\| \cdot \|u_0\|) = 1 \tag{3.7}$$

因为在实 Hilbert 空间中任二矢量p和q的夹角θ可写成[14,p265]：

$$\cos\theta = (p,q)/(\|p\| \cdot \|q\|) \tag{3.8}$$

那末，(3.7)式表示矢量u_0和矢量$g_0 AA^* u_0$重合，也就是，$u_0 \doteq g_0 AA^* u_0$。

同样地，(3.2)↔(3.4)。 Q.E.D

四、x_0 的 选 取

计算特征值和特征函数有许多方法[15]，所以，在理论上由(2.9)式便可求得精确解。然而，因为可能有无穷个可列的特征值和相应的特征函数。所以，在实际上我们不可能全部将它们算出来而求得精确解。因此，人们也寄希望于一次迭代求得解答。因为要满足(3.2)式，或(3.3)式，或(3.4)式也不是一件容易的事，同时，对大多数工程问题来说，工程师们关心的不是精确解而是容易计算精度又足够的近似解。因此，我们讨论x_0的选取。

因为我们不能选x_0使得$\hat{x} \doteq x_1$，于是我们这样选x_0使得$\|u_0\|$达其最小值。对于x_0的选取，因为除y和A之外别无其它信息可供选取作参考。所以我们宁愿取 $x_0 = cy$(c为实常数)，这样计算量最小。于是$u_0 \doteq y - cAy$。

令 $\partial\|u_0\|/\partial c = 0$。可得：

$$c = ((y, Ay) + (Ay, y)) / (2\|Ay\|^2) \tag{4.1}$$

由于$\partial^2\|u_0\|^2/\partial c^2=2\|Ay\|^2>0$，故$\|u_0\|$在$\underline{c}$处达其极小值。对于情形$(Ay,y)=(y,Ay)$，可得

$$\underline{c}=(y,Ay)/\|Ay\|^2$$

$\underline{c}$有如下意义。虽然两矢量y和Ay通常是不重合的，我们将Ay乘一数$\underline{c}$，使得y和$\underline{c}Ay$之差最小，也就是$u_0\doteq y-\underline{c}Ay\perp\underline{c}Ay$，即

$$(u_0,\underline{c}Ay)=(y-\underline{c}Ay,\underline{c}Ay)=0 \qquad (4.2)$$

文献[7]中x_0的选取基本上与上述分析一致；如果将y乘上数$\underline{c}$，会更好些。

参 考 文 献

[1] Mueller, P. F. and G. O. Reynolds, Image restoration by removal of random media degradations, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57** (1967), 1338—1344.

[2] Andrews, H. C., A. H. Tescher and R. P. Kruger, Image processing by digital computer, *IEEE Spectrum*, **2** (1972), 20—32.

[3] Liskovec, O. A., Regularization of ill posed problems and a connection with the method of quasi solution, *Differencial'nye Uravmenija*, **5** (1969), 1836—1847.

[4] Liht, M. K., The solution of minimizing a quadratic functional with approximate data, *Z. Uycial. Nat. i Mat. Fiz.*, **9** (1969), 1004—1014.

[5] Yun Tian-quan, Uniqueness theorem of non-singular integral equation method, *Transactions CSME*, **10** (1986), 197—200.

[6] Yun Tian-quan, An integral equation method for solving the torsion problem, of revolution bodies, *J. H. I. T.*, **1** (1979), 82—97. MR 81m:73028.

[7] 袁家乐，回转体-旋旋桨组合体之推力减额的一个数值预测方法，中国造船，**87** (1984)14—21.

[8] Yun Tian-quan, Pile analysis by simple integral equation method, *Appl. Math. and Mech.*, **2** (1981), 331—348. MR# 83i:73014.

[9] Pogorzelski, W., *Integral Equations and Their Applications*, Vol. 1, Pergamon Press, PWN-Polish Scientific Publishers (1966).

[10] Landweber, L., An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 615—624.

[11] Diaz, J. B. and F. T. Metcalf, On iteration procedures for equations of the first kind, Ax=y, and Picard's criterion for the existence of a solution, *Math. Math. Comput.*, **24** (1970), 923—935.

[12] 云天铨，Fredholm第一种积分方程$Ax=y$的最速迭代解法，华中工学院学报，**3** (1978), 94—98.

[13] Smithies, F., *Integral Equations*, Cambridge University Press, (1956).

[14] Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York (1979).

[15] Baker, C. T. H., *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford (1977).

Representation Theorem and One-Iteration Theorem for Fredholm Integral Equation of the First Kind Ax=y

Yun Tian-quan

(Department of Engineering Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

In this paper, two theorems are presented. The representation theorem states: if the Fredholm integral equation of the first kind $Ax \doteq y$, with bounded L_2 kernel, has a unique solution $\hat{x}$, then $\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(y,\varphi_n)\lambda_n\psi_n$, where $\varphi_n \doteq \lambda_n A\psi_n$, $\psi_n \doteq \lambda_n A^*\varphi_n$. The One-iteration theorem states: $\hat{x}$ can be achieved in one-iteration by $\hat{x} \doteq x_0 + g_0 A^*(y-Ax_0)$ if one of the following conditions is satisfied:

1. $v_0 \doteq g_0 A^* A v_0$, $v_0 \doteq \hat{x}-x_0$;
2. $u_0 \doteq g_0 A A^* u_0$, $u_0 \doteq y - Ax_0$;
3. $g_0 = \|A^* u_0\|^2/\|AA^* u_0\|^2 = \|u_0\|^2/\|A^* u_0\|^2$, $u_0 \doteq y - Ax_0$ or
   $g_0 = \|Av_0\|^2/\|A^* A v_0\|^2 = \|v_0\|^2/\|Av_0\|^2$, $v_0 \doteq \hat{x} - x_0$.