

# 环形梁塑性动力响应特性研究

王建军 刘晓坤 陈百屏

(西北工业大学, 1988年1月11日收到)

## 摘 要

本文采用刚塑性假设, 对环形悬臂梁在自由端受一刚性质量径向冲击时的塑性动力响应问题进行了分析与研究, 给出了质点响应速度与移动塑性铰位置间的精确表达式, 并由此发现了环形梁塑性动力响应的一些特殊性质。

## 一、引 言

研究梁式结构的塑性动力响应特性, 对许多工程问题, 如: 管道甩摆(pipe-whip)、抗冲击建筑物设计及能量吸收装置等, 都具有十分重要的意义。

Parkes<sup>[1,2]</sup>基于完全刚塑性假设, 利用移动塑性铰的概念, 研究了悬臂直梁在自由端受一刚性质量冲击时的塑性动力响应问题, 并给出了直梁问题的精确解答。Yu<sup>[3,4]</sup>对四分之一环形悬臂梁的塑性动力响应特性进行了研究, 给出了非常有价值的数值分析结果。

Parkes 和 Yu 的问题有着共同的性质, 即梁的塑性动力响应过程包括两个阶段: 第一阶段, 塑性铰从自由端移动到固定端; 第二阶段, 梁绕固定端进行刚体转动。

本文针对圆心角为 $\psi_0$ 的任意环形悬臂梁(如图1所示)的塑性动力响应问题进行了分析, 给出了响应速度的精确解答, 并研究了其响应特性。

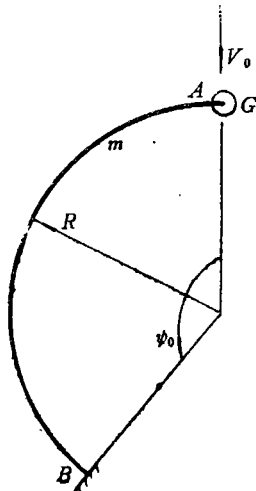


图1 环形梁受刚性质量径向冲击

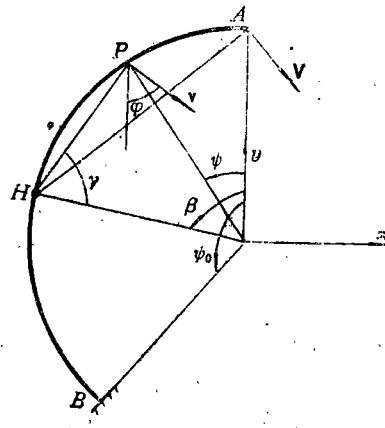


图2 塑性铰在H点时的变形过程

## 二、基本假设与微分方程

考虑一个圆心角为 $\psi_0$ 的环形悬臂梁,在自由端受一刚性质量径向冲击,如图1所示.认为冲击持续时间非常短暂,且冲击后刚性质量附着在梁上,这样,可将冲击载荷理想化为一个脉冲量.

设冲击块质量为 $G$ ,冲击速度为 $v_0$ ,梁的单位长度质量为 $m$ ,梁的半径、厚度和宽度分别为 $R$ , $h$ 和 $b$ .并假定:

1. 梁为完全刚塑性;
2. 材料特性不依时间而变,因此,动力塑性弯矩 $M_0$ 不随应变速率而变化,是一常量;
3. 梁的厚度远小于梁的半径,即 $h \ll R$ ,因而,可略去剪力和轴向力的影响;
4. 梁的变形与 $R$ 相比非常小,所以,动力微分方程的导出和几何关系都以初始结构形状为基准;
5. 具有可移动的塑性铰.

类似于四分之一环形悬臂梁塑性动力响应微分方程的推导过程<sup>[4]</sup>,设时间为 $t$ 时,塑性铰位于 $H$ 处,其角度为 $\beta$ ,如图2所示. $P$ 点,角度为 $\psi$ ( $\psi < \beta$ ),是弧段 $\widehat{HA}$ 上的一点,由几何关系,有:

$$\phi = (\beta + \psi) / 2$$

$\widehat{HA}$ 绕瞬时中心 $H$ 作刚体转动,点 $P$ 的速度为

$$\begin{aligned} v &= v \cdot \sin \phi \mathbf{i} + v \cdot \cos \phi \mathbf{j} \\ &= v \cdot \sin \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \mathbf{i} + v \cdot \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.1)$$

对(2.1)式微分:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{d}{dt} v = \left[ \dot{v} \sin \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) + v \cdot \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \frac{\dot{\beta}}{2} \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[ \dot{v} \cdot \cos \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) - v \cdot \sin \left( \frac{\beta + \psi}{2} \right) \frac{\dot{\beta}}{2} \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

于是,

$$(\dot{v})^2 = \dot{v} \cdot \dot{v} = \dot{v}^2 + v^2 \dot{\beta}^2 / 4 \quad (2.3)$$

同理,对 $A$ 点有:

$$(\dot{V})^2 = \dot{V}^2 + V^2 \dot{\beta}^2 / 4 \quad (2.4)$$

$v$ 与 $V$ 间有如下关系:

$$v = \frac{\sin(\beta - \psi) / 2}{\sin \beta / 2} \cdot V \quad (2.5)$$

和

$$\dot{v} = \dot{V} \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \psi)}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2} V \dot{\beta} \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad (2.6)$$

应用 Tamuzh<sup>[5]</sup>刚塑性动力变分原理,此时泛函为:

$$\begin{aligned} J &= J(\dot{V}, \dot{\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\psi} m(\dot{v})^2 R d\psi + \frac{1}{2} G(\dot{V})^2 + M_0 \dot{\omega} \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中 $\omega = V / (2R \sin \beta / 2)$ 为弧段 $\widehat{HA}$ 绕 $H$ 点转动的瞬时角速度.根据 Tamuzh 原理,真实的

加速度场应使泛函 $J$ 取最小值, 即:

$$\partial J / \partial \dot{V} = 0 \tag{2.8a}$$

和 
$$\partial J / \partial \dot{\beta} = 0 \tag{2.8b}$$

由此导出环形梁塑性动力响应的微分方程:

$$\frac{dV^*}{dt^*} (1 - \cos\beta + \xi \sin\beta) + \frac{1}{2} V^* \frac{d\beta}{dt^*} [2\beta - \sin\beta + \xi(1 - \cos\beta)] = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{dV^*}{dt^*} [\beta - \sin\beta + \xi(1 - \cos\beta)] + \frac{1}{2} V^* \frac{d\beta}{dt^*} [2 - \beta \frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta}] = -\sin\frac{\beta}{2} \tag{2.10}$$

其中  $V^* = V/V_0$ ,  $t^* = t/T_0$ ,  $T_0 = V_0 m R^2 / M_0$ ,  $\xi = G/mR$

### 三、微分方程的分析解

#### (一) 响应速度 $V^*$

利用关系式:

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{d}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt^*} \tag{3.1}$$

微分方程 (2.9) 可变换为:

$$\frac{dV^*}{d\beta} (1 - \cos\beta + \xi \sin\beta) + \frac{1}{2} V^* [2\beta - \sin\beta + \xi(1 - \cos\beta)] = 0 \tag{3.2}$$

将 (3.2) 式分离变量后得:

$$\ln V^* = \frac{1}{2} \int \frac{\sin\beta + \xi(\cos\beta - 1) - 2\beta}{1 - \cos\beta + \xi \sin\beta} d\beta \tag{3.3}$$

令:  $\text{tg } \alpha = \xi$ , 则由 (3.3) 式导出: (3.4)

$$\begin{aligned} \ln V^* = & \ln \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) - \text{ctg } \alpha \cdot \ln \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)} \cdot \beta \\ & + 2 \text{ctg } \alpha \int \ln \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)} d\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

利用积分公式:

$$\int \ln \sin x dx = x \cdot \ln \sin x - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k} \cdot (2n)! C_{\frac{1}{2}n+1}^k}{[2^{2n} \cdot (n!) (2n+1)]^2} \cdot \sin(2n-2k+1)x \tag{3.6}$$

(3.6) 式的推导过程见附录。

这样, (3.5) 式变为:

$$V^* = A \cdot \left[ \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) \right]^{1-2\alpha \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \exp \left\{ 4 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \right. \\ \left. \cdot \frac{(2n)! C_{2n+1}^k}{[2^{2n}(n!)(2n+1)]^2} \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{2} \alpha \cdot \cos \frac{(2n-2k+1)}{2} (\beta + \alpha) \right\} \quad (3.7)$$

这里,  $C_{2n+1}^k = (2n+1)! / [(2n+1-k)! \cdot k!]$ ,  $A$  为积分常数, 可由初始条件确定。根据:

$$V^*|_{t^*=0} = 1 \quad \text{及} \quad \beta|_{t^*=0} = 0 \quad (3.8)$$

代入 (3.7) 式后求得:

$$A = (\sin \alpha)^{2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1} \exp \left\{ -4 \operatorname{ctg} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \right. \\ \left. \cdot \frac{(2n)! C_{2n+1}^k}{[2^{2n}(n!)(2n+1)]^2} \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{2} \alpha \cdot \cos \frac{(2n-2k+1)}{2} \alpha \right\} \quad (3.9)$$

于是, (3.7) 式可写成:

$$V^* = \left[ \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)}{\sin \alpha} \right]^{1-2\alpha \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \exp \left\{ 8 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k+1} \right. \\ \left. \cdot \frac{(2n)! C_{2n+1}^k}{[2^{2n}(n!)(2n+1)]^2} \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{2} \alpha \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{4} \beta \right. \\ \left. \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{4} (\beta + 2\alpha) \right\} \quad (3.10)$$

(3.10) 式给出了响应速度  $V^*$  与移动塑性铰位置  $\beta$  间的解析表达式, 是微分方程 (3.2) 的精确解答。

## (二) 响应时间 $t^*$

将 (3.1) 式代入 (2.10) 式, 导出:

$$\left\{ \frac{dV^*}{d\beta} \cdot [\beta - \sin \beta + \xi(1 - \cos \beta)] + V^* \left( 1 - \frac{1}{2} \beta \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \right) \right\} \frac{d\beta}{dt^*} = -\sin \frac{\beta}{2} \quad (3.11)$$

于是,

$$t^* = \int_0^\beta \left\{ \frac{dV^*}{d\beta} [\sin \beta - \xi(1 - \cos \beta) - \beta] / \sin \frac{\beta}{2} \right. \\ \left. + \frac{V^* \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{1 + \cos \beta}{2 \sin \beta} - \frac{V^*}{\sin \frac{\beta}{2}} \right\} d\beta \quad (3.12)$$

由 (3.2) 式, 导出:

$$\frac{dV^*}{d\beta} = - \frac{\beta V^*}{2\sqrt{1+\xi^2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)} V^* \quad (3.13)$$

和:

$$\frac{\beta V^*}{\sin \frac{\beta}{2}} = \sqrt{1 + \xi^2} V^* \cos \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) - 2\sqrt{1 + \xi^2} \sin \left( \frac{\beta}{2} + \alpha \right) \frac{dV^*}{d\beta} \quad (3.14)$$

将(3.13), (3.14)式代入 (3.12) 式, 经简化得:

$$t^* = 2V^* \sec \alpha \cdot \cos \left( \frac{\beta}{2} + \alpha \right) - \frac{\beta V^*}{\sin \frac{\beta}{2}} + \sec \alpha \cdot \int_0^\beta V^* \sin \left( \frac{\beta}{2} + \alpha \right) d\beta \quad (3.15)$$

由于方程 (3.10) 已给出了  $V^*-\beta$  的显式表达式, 因此, 方程 (3.15) 实际上为  $t^*-\beta$  的积分形式的显式表达式, 给定一个  $\beta$  值, 就可由 (3.15) 式求得塑性铰从自由端移动到圆心角为  $\beta$  处所需要的时间  $t^*$ 。

### 四、分析与讨论

#### (一) 解的收敛性

响应速度  $V^*$  的级数解 (3.10) 式可写成如下形式

$$V^* = \left[ \frac{\sin \left( \frac{\beta}{2} + \alpha \right)}{\sin \alpha} \right]^{1-2\alpha \cdot \cot \alpha} \cdot \exp \left\{ 2 \cdot \cot \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{[2^n (n!) (2n+1)]^2} \cdot \left[ \sin^{2n+1} \left( \frac{\beta}{2} + \alpha \right) - \sin^{2n+1} \frac{\beta}{2} - \sin^{2n+1} \alpha \right] \right\} \quad (4.1)$$

(4.1) 式  $V^*$  解的收敛性问题归结为级数:

$$S(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{[2^n (n!) (2n+1)]^2} \cdot (\sin \theta)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta) \quad (4.2)$$

的收敛性问题。在  $\theta \in (-\infty, +\infty)$  时, 都有:

$$\begin{aligned} |u_n(\theta)| &= \left| \frac{(2n)!}{[2^n (n!) (2n+1)]^2} (\sin \theta)^{2n+1} \right| \leq \frac{(2n)!}{[2^n (n!) (2n+1)]^2} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot (2n+2)^2} \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

而  $P$ -级数:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^P} \quad (4.4)$$

当  $P > 1$  时是收敛的。

所以, 级数  $S(\theta)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是一致收敛的, 因而,  $V^*$  的解在  $\beta \in (-\infty, +\infty)$  时也是一致收敛的。

以  $\beta = \pi/2$  为例, 来讨论  $V^*-\beta$  解的收敛速度。图3示出了  $\xi$  分别为 0.01, 0.1, 1, 10, 100 时取前  $N$  项和进行计算的结果。图中  $V_{10}^*$  表示取  $N=10$  时所计算的响应速度  $V^*$  值。由图可

见,  $V^*$  随  $N$  的增加而迅速收敛。对所选各  $\xi$  值, 当  $N$  取零时,  $V^*$  与  $V_{i0}^*$  的最大误差也只有 14.6%, 最小误差仅为 0.17%。当  $N$  取 4~6 时, 就可得到足够高的计算精度。以下所列各种结果都是取  $N=10$  进行计算所得。

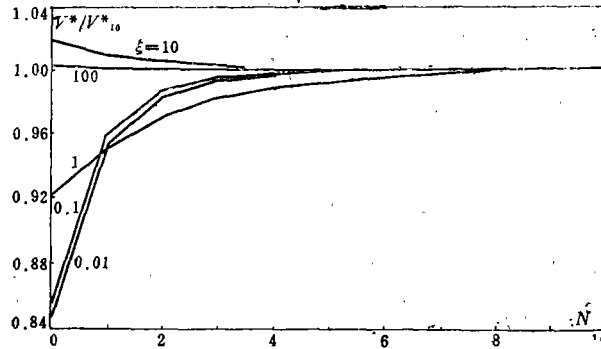


图3  $\beta = \frac{\pi}{2}$  时, 不同  $\xi$  下,  $V^*$  随  $N$  的变化情况

## (二) 塑性动力响应特性

对 Parkes<sup>[1]</sup> 的直梁塑性动力响应问题 (见图4), 速度响应公式为:

$$V = V_0 / \left( 1 + \frac{mx}{2G} \right) \quad (4.5)$$

可见, 只有当  $x \rightarrow \infty$ , 即梁长  $L \rightarrow \infty$  时, 才有速度  $V \rightarrow 0$ 。这表明直梁的塑性动力响应过程总是由两个阶段组成。首先, 塑性铰从自由端移动到固定端; 然后, 梁绕固定端作刚体转动。

对环形悬臂梁, 其速度响应公式 (3.10) 式可写为:

$$V^* = F(\beta) \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)}{\sin\alpha} \right]^{1-2\alpha \operatorname{ctg}\alpha} \quad (4.6)$$

式中,

$$F(\beta) = \exp \left\{ 8 \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k+1} (2n)! C_{\frac{k}{2}, n+1}^k}{[2^{2n} (n!) (2n+1)]^2} \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{2} \alpha \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{4} \beta \cdot \sin \frac{(2n-2k+1)}{4} (\beta+2\alpha) \right\} \quad (4.7)$$

$F(\beta)$  是有界且恒大于零的函数。

因  $\xi$  恒大于零,  $\alpha = \operatorname{arctg}\xi$ , 所以,  $0 < \alpha < \pi/2$ , 由 (4.6) 式可看出, 当  $0 < (\beta/2 + \alpha) < \pi$  时, 即  $0 \leq \beta \leq \pi$  时, 总有  $V^* > 0$ 。由此可见, 若环形梁的圆心角  $\psi_0 \leq \pi$ , 则当塑性铰运动到梁的固定端时, 仍有  $V^* > 0$ , 即系统还具有剩余能量, 这部分能量由梁绕固定端的刚体转动来消耗。这说明, 当  $\psi_0 \leq \pi$  时, 环形梁的塑性动力响应过程, 与 Parkes 的直梁问题相类似, 总是包含了塑性铰移动和梁绕固支端刚体转动这两个阶段。Yu 的四分之一环形梁问题就是  $\psi_0 = \pi/2$  时的特例。

本文也以  $\psi_0 = \pi/2$  为例, 用所得精确解来定量地研究其塑性动力响应过程。

图5示出了不同  $\xi$  时  $V^*$  随  $\beta$  的变化情况。可见, 随着塑性铰向固定端的移动, 响应速度单

调减小, 当塑性铰到达固定端即  $\beta = \pi/2$  时, 速度仍不为零。如:  $\xi = 1$  时,  $V^* \Big|_{\beta = \frac{\pi}{2}} = 0.3882$ 。

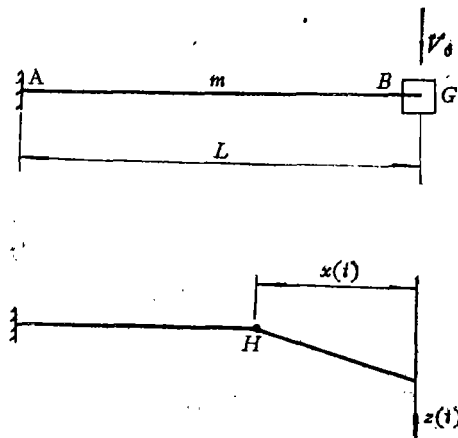


图4 Parkes 直梁冲击问题

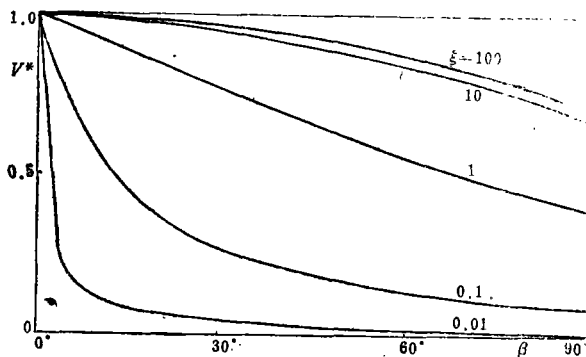


图5 A点速度  $V^*$  随塑性铰位置  $\beta$  的变化情况

系统的初始能量为:

$$E_0 = GV_0^2/2 \quad (4.8)$$

塑性铰位于  $\beta$  时, 系统具有的能量为<sup>[3]</sup>:

$$E_\beta = E_0 V^{*2} \left( 1 + \frac{1}{\xi} \frac{\beta - \sin\beta}{1 - \cos\beta} \right) \quad (4.9)$$

当  $\beta = \psi_0 = \pi/2$  时, 第一阶段内系统所消耗的能量比为:

$$(1 - E_{\pi/2}/E_0) = 1 - V^{*2} (1 + 0.5708/\xi) \quad (4.10)$$

图6示出了能量消耗比随  $\xi$  的变化情况。  $\xi = 0.01$  时,  $(1 - E_{\pi/2}/E_0) = 0.9952$ , 随着  $\xi$  的增大, 第一阶段消耗的能量减小, 当  $\xi = 10$  时,  $(1 - E_{\pi/2}/E_0) = 0.5037$ 。

图7示出了  $\xi = 1$  时, 塑性铰移动到  $\beta = \pi/6, \pi/3, \pi/2$  处梁的变形情况以及第二阶段结束后梁的最终变形状态。

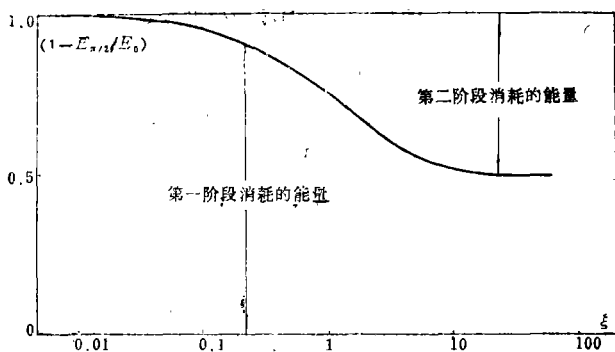


图6  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  时, 能量消耗随  $\xi$  的变化

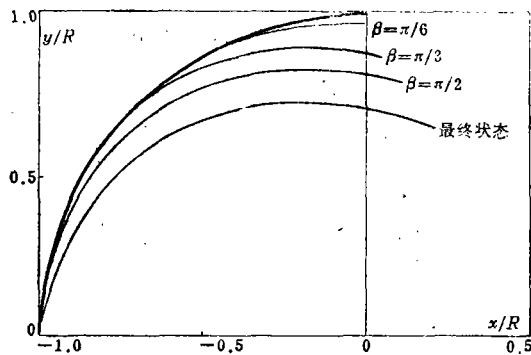


图7  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  时梁的变形情况 ( $\xi = 1, E_0/M_0 = 0.5$ )

从(4.6)式可看出, 当  $(1 - 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha) > 0$  即  $(1 - \operatorname{tg} \xi/\xi) > 0$ , 也就是当  $\xi > 2.3311$  时,  $V^*$  存在着零点, 零点为  $(\beta/2 + \alpha) = \pi$ , 即  $\beta_0 = 2(\pi - \alpha)$ 。所以, 若环形梁的圆心角  $\psi_0 \geq 2(\pi - \alpha)$ , 则该梁的塑性动力响应过程就只有一个阶段, 即塑性铰从自由端移动到  $\beta_0 = 2(\pi - \alpha)$  处, 这

一过程就消耗掉了系统的全部能量。这就显然不同于 Parkes 的直梁问题。

图8示出了 $\xi=3, 5, 7, 10, 100$ 时,  $V^*$ 随 $\beta$ 的变化情况。可见, 随着 $\beta$ 的增加,  $V^*$ 单调减小, 当塑性铰到达某一位置 $\beta=\beta_0$ 时, 响应速度 $V^*$ 下降为零。对图8中诸 $\xi$ 值,  $V^*$ 的零

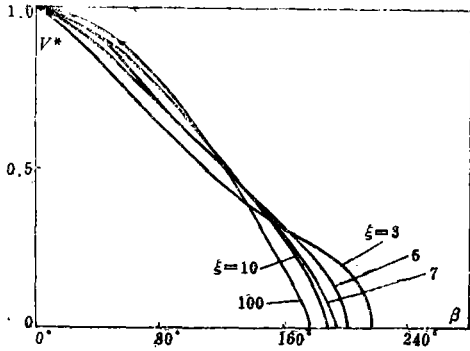


图8 不同 $\xi$ 时 $V^*$ 随 $\beta$ 的变化

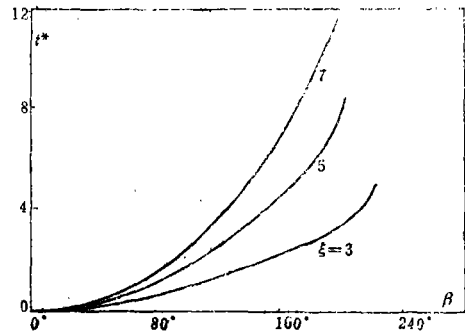


图9 不同 $\xi$ 时 $t^*$ 随 $\beta$ 的变化

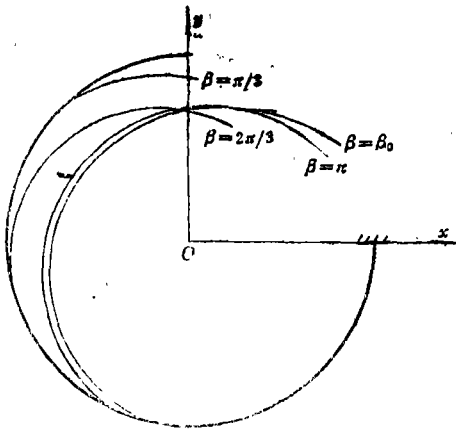


图10  $\xi=5$ 时梁的变形状态

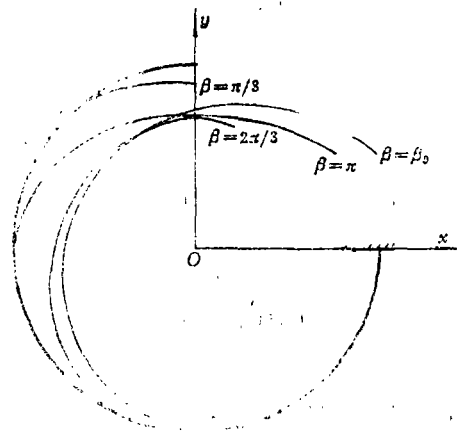


图11  $\xi=7$ 时梁的变形状态

点, 即移动塑性铰的最终位置分别为:  $\beta_0=216.8^\circ, 202.62^\circ, 196.26^\circ, 191.42^\circ$  及  $181.15^\circ$ 。

图9示出了 $\xi$ 为3, 5, 7时  $t^*$  随 $\beta$ 的变化情况。可见, 随着塑性铰的移动, 响应时间单调增加。

图10~图12分别示出了 $\xi=5, 7, 10$ 时, 塑性铰移动到 $\beta=\pi/3, 2\pi/3, \pi$ 及 $\beta_0$ 位置情况下梁的变形状态。

由上述分析可见, 与 Parkes 的直梁问题相比, 环形悬臂梁的塑性动力响应过程具有其独特的性质。

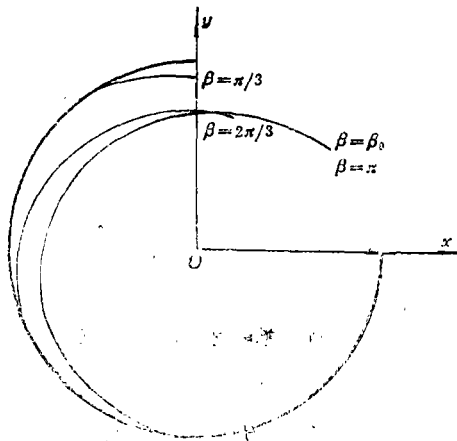


图12  $\xi=10$ 时梁的变形状态



### 五、结 语

文中基于刚塑性假设，经过理论分析与推导，得出了响应速度的精确解答，并证明了该级数形式的解在  $\beta \in (-\infty, +\infty)$  时都是一致收敛的。计算结果还表明，该级数解的收敛速度非常快。

对解进行分析可知，环形悬臂梁的塑性动力响应问题与 Parkes 的直梁问题有着不同的性质。当环形梁的圆心角  $\psi_0 \leq \pi$  时，其动力响应过程类似于 Parkes 问题，总是包含了两个阶段，即塑性铰从自由端向固支端的移动和梁绕固定端的刚体转动。当  $\xi > 2.3311$  且  $\psi_0 \geq 2(\pi - \alpha)$  时，与直梁问题显著不同，环形梁的塑性动力响应过程只有第一阶段，即塑性铰的移动。

### 附 录

关于积分  $\int \ln \sin x dx$  的推导过程。

$$I = \int \ln \sin x dx \tag{a}$$

令： $e^t = \sin x$ ， 则： $dx = \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$

代入 (a) 式：

$$\begin{aligned} I &= \int \ln \sin x dx = \int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}} \\ &= t \cdot \arcsin e^t - \int \frac{\arcsin e^t}{e^t} de^t \end{aligned} \tag{b}$$

根据泰勒展开式：

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \cdot x^{2n+1} \tag{c}$$

(c)代入(b)：

$$\begin{aligned} I &= t \cdot \arcsin e^t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \int (e^t)^{2n} de^t \\ &= t \arcsin e^t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{[2^n(n!)(2n+1)]^2} (e^t)^{2n+1} \end{aligned} \tag{d}$$

所以

$$\int \ln \sin x dx = x \cdot \ln \sin x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{[2^{2n}(n!)(2n+1)]^2} (\sin x)^{2n+1} \tag{e}$$

利用公式：

$$(\sin x)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \cdot C_{2n+1}^k \sin(2n-2k+1)x \tag{f}$$

(f)式代入(e)式，得：

$$\int \ln \sin x dx = x \cdot \ln \sin x - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}(2n)! C_{2n+1}^k}{[2^{2n}(n!)(2n+1)]^2} \cdot \sin(2n-2k+1)x \tag{g}$$

## 参 考 文 献

- [1] Parkes, E. W., *Proc. R. Soc. Lond.*, A228 (1955), 462—476.
- [2] Parkes, E. W., *Proc. Instn civ. Engrs.*, 10 (1958), 277—295.
- [3] Yu, T. X., *Proc. R. Soc. Lond.*, A400 (1985), 19—36.
- [4] Yu, T. X., *Int. J. Impact Engng.*, 4, 4 (1986), 221—228.
- [5] Tamuzh, V. P., *Prikl. Mat. Mekh.*, 26 (1962), 715—722.
- [6] 樊映川, 《高等数学讲义》下册, 第二版, 人民教育出版社 (1977), 6—7.

## The Dynamic Plastic Response Characteristics of Circular Beam

Wang Jian-jun, Liu Xiao-kun, Chen Bai-ping  
(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

### Abstract

In this paper the problem of a circular beam subjected to radial impact by a rigid mass at its tip in its own plane is investigated on the basis of rigid-perfectly plastic assumption. The analytical solution of the particle velocities is obtained as the function of travelling plastic hinge location. By analysing the solution, some special properties of circular beam problem are found.