

# 饱和土中弹性波的传播速度\*

吴世明 陈龙珠

(浙江大学土木系, 1988年3月21日收到)

## 摘 要

根据所建立的波动方程分析了饱和土中弹性波的弥散特性, 并且用室内超声波和现场地震波试验结果进行验证。本文为由弹性波(尤其是 $P$ 波)速度测得合理的饱和土物理力学参数提供了理论依据。

## 一、前 言

根据经典波动理论, 波速与介质物理力学参数间的关系十分密切。于是, 人们已试图由波速法进行土工勘测。但是, 土是一种复杂的三相材料, 孔隙率、饱和度、频率和渗透系数等因素会对土中弹性波的传播速度产生各自不同的影响, 使得经典理论中波速与介质特性参数间的关系式在土中显得过于简单了。本世纪以来, 许多学者对土以及含流体的其它多孔固体中弹性波传播问题进行了深入的研究, 但尚存在过于理论化而难以应用或过于简单化而不能解释土中弹性波的主要实验现象。另一方面, 由实验资料建立起来的经验式虽具有一定的应用价值, 但它往往又因土性质的复杂性而存在着局限, 只是为理论研究提供了宝贵的依据。作者已对以往理论和实验研究结果的缺陷和适用范围作过较详细的分析和讨论<sup>[1][2]</sup>, 限于篇幅, 本文不再赘述。

本文主要探讨饱和土中弹性波传播速度的特性, 即在一定的条件下导出考虑土骨架和孔隙水之间耦合效应的弹性波动方程, 并对此进行数值分析和实验验证以得出比较实用的波速公式, 为人们合理应用波速法及开发 $P$ 波速度的应用提供理论依据。

## 二、饱和土的弹性波动方程组

### (一) 基本假设

本文主要是寻求弹性波速度与饱和土特性参数间的理论关系, 故先作如下几点简化假设: (1)土骨架是理想弹性多孔连续介质, 而其中的土颗粒是不可压缩的; (2)孔隙水是可压缩的, 在土中的流动遵从 Darcy 定律; (3)土体具有统计各向同性且均匀, 其中孔隙相互连

\* 丁浩江推荐。国家教委博士点基金资助项目。

通；(4)最大孔隙尺寸小于波长；(5)温度等因素对波动方程的影响暂忽略不计。

上述第四点决定着能否在饱和土中近似应用连续介质力学的基本原理。若设饱和土中压缩波( $P$ 波)速度量级为 $10^3\text{m/s}$ ,则由第四点及最大允许频率 $f_{\max}$ 与孔隙直径 $d$ 的关系( $f_{\max}=v_p/d$ ,  $v_p$ 为 $P$ 波速度)求出:当 $d=10^{-1}\sim 10^{-3}\text{cm}$ 时,  $f_{\max}=10^9\sim 10^8\text{Hz}$ 。目前土动力学室内外试验所用频率一般均低于这一范围。

## (二) 弹性波动方程组

### 1. 连续性方程

由假设,饱和土的连续条件可叙述成:单位时间内单元土体的体积改变量 $\dot{\epsilon}$ 等于其中孔隙水含量的改变量 $\dot{\epsilon}_v$ 与孔隙水自身体积的改变量 $\dot{\epsilon}_w$ 之和。

现以 $n$ 表示孔隙率, $u_w$ 和 $E_w$ 分别表示孔隙水压力和体变弹模, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别表示孔隙水和土骨架的位移矢量,则 $\dot{\epsilon}=\text{div}\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\epsilon}_v=n\text{div}(\dot{\mathbf{u}}-\dot{\mathbf{w}})$ ,  $\dot{\epsilon}_w=n\dot{u}_w/E_w$ 。于是,饱和土的连续性方程可写成为

$$n\text{div}\dot{\mathbf{u}}+(1-n)\text{div}\dot{\mathbf{w}}-n\dot{u}_w/E_w=0 \quad (2.1)$$

式中字母上的“ $\cdot$ ”表示关于时间 $t$ 求偏导。

### 2. 运动方程

孔隙通道的迂回曲折使得土体中并非全部孔隙水沿某一方向具有相同宏观加速度,从而发生两相介质间复杂的惯性耦合效应。本文暂对两种极限模型来讨论它对土中波速的影响。

模型1<sup>[1]</sup>:由于假定孔隙分布均匀,在笛卡儿坐标系中,单位土体积中的孔隙水只有三分之一量沿某一坐标轴方向具有孔隙水自身的宏观加速度,而另外三分之二的孔隙水沿该方向的宏观加速度与土骨架的相同。

模型2:将土骨架和孔隙水分别当成质量密度为 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的连续介质,两相的质点加速度互不影响,渗透力只是一种体力。这里的 $\rho_1=(1-n)\rho_s$ ,  $\rho_2=n\cdot\rho_w$ ,  $\rho_s$ 和 $\rho_w$ 是土颗粒和水的质量密度。对于这两种模型,整个饱和土体单元和孔隙水的运动方程分别为

模型1:

$$\sigma'_{i,j,j}+(u_w)_{,i}=\left(\rho_1+\frac{2}{3}\rho_2\right)\dot{w}_i+\frac{1}{3}\rho_2\dot{u}_i \quad (2.2)$$

$$(u_w)_{,i}-b(\dot{u}_i-\dot{w}_i)=\frac{2}{3}\rho_2\dot{w}_i+\frac{1}{3}\rho_2\dot{u}_i \quad (2.3)$$

模型2:

$$\sigma'_{i,j,j}+(u_w)_{,i}=\rho_1\dot{w}_i+\rho_2\dot{u}_i \quad (2.4)$$

$$(u_w)_{,i}-b(\dot{u}_i-\dot{w}_i)=\rho_2\dot{u}_i \quad (2.5)$$

式中 $\sigma'_{i,j}$ 是土骨架(有效)应力分量,  $b=n\gamma_w/k$ ,  $\gamma_w=\rho_w g$ 是水的容重( $g$ 是重力加速度),  $k$ 是土的渗透系数。为简明起见,下文仅对模型1作详细分析,而对模型2只在必要时给出相应的结果。

由于土骨架为弹性的,则

$$\sigma'_{i,j}=2\mu'e_{i,j}+\lambda'\epsilon\delta_{i,j} \quad (2.6)$$

式中 $e_{i,j}=(w_{j,i}+w_{i,j})/2$ ,  $\epsilon=\text{div}\mathbf{w}$ 。由式(2.2)、(2.3)和(2.6),运动方程可写成如下形式:

$$\mu' \nabla^2 \mathbf{w} + (\lambda' + \mu') \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}) + \text{grad}(u_w) = \left(\rho_1 + \frac{2}{3} \rho_2\right) \ddot{\mathbf{w}} + \frac{1}{3} \rho_2 \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.7)$$

$$\text{grad}(u_w) + b(\dot{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{u}}) = \frac{2}{3} \rho_2 \dot{\mathbf{w}} + \frac{1}{3} \rho_2 \dot{\mathbf{u}} \quad (2.8)$$

式中  $\lambda'$  和  $\mu'$  是土骨架的 Lamé 常数。

### 3. 波动方程组

上文导出的式(2.1)、(2.7)和(2.8)即构成与模型1相应的饱和土中弹性波动方程组。为了分别讨论压缩波(P波)和剪切波(S波)的特性,引入膨胀势  $\varphi$  和旋转势  $\psi$ , 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} &= \text{grad} \varphi_1 + \text{rot} \psi_1 \\ \mathbf{u} &= \text{grad} \varphi_2 + \text{rot} \psi_2 \\ \text{div} \psi_1 &= \text{div} \psi_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

将此代入模型1的波动方程组可分别得到饱和土中P波和S波波动方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\varphi}_1 &= (-\nabla^2 \dot{\varphi}_2 + \dot{u}_w/E_w)n/(1-n) \\ \square_P^2 \varphi_1 &= \left(-u_w + \frac{1}{3} \rho_2 \dot{\varphi}_2\right) / (\lambda' + 2\mu') \\ u_w + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= \frac{2}{3} \rho_2 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} \rho_2 \dot{\varphi}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \square_S^2 \psi_1 &= \frac{\rho_2}{3\mu'} \ddot{\psi}_2 \\ b(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) &= \frac{2}{3} \rho_2 \dot{\psi}_1 + \frac{1}{3} \rho_2 \dot{\psi}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

式中  $\square_j^2 = \left(\nabla^2 - \frac{1}{v_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$  ( $j=P, S$ )。

## 三、饱和土中弹性波的弥散特性

本文将弹性波速度受频率  $f$  和渗透系数  $k$  影响的特性统称为饱和土中弹性波的弥散特性。显然,一般只有借助数值方法才能由式(2.10)和(2.11)了解波的这一特性。现按平面波问题对此进行研究。

设  $\mathbf{n}_1$  是波前法向单位矢量,  $\mathbf{r}$  是矢径,  $\omega = 2\pi f$  是波的圆频率,  $l$  是一复常数。将

$$\varphi_j = A_j \exp[-i(l\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 - \omega t)] \quad (P\text{波})$$

$$\psi_j = B_j \exp[-i(l\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 - \omega t)] \quad (S\text{波})$$

分别代入式(2.10)和(2.11)得出如下频率方程

$$A \left(\frac{l}{\omega}\right)_P^4 + B \left(\frac{l}{\omega}\right)_P^2 + C = 0 \quad (P\text{波}) \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{l}{\omega}\right)_S^2 = \frac{(\rho_1 \rho_2^2 \omega^2 / 9b^2 + \rho) + i_1 \rho_2^2 \omega / 3b}{\mu' (1 + \rho_2^2 \omega^2 / 9b^2)} \quad (S\text{波}) \quad (3.2)$$

式中  $A = (\lambda' + 2\mu')\omega/b$ ,  $B = -\left[\left(\rho_1 + \frac{\lambda' + 2\mu'}{3E_w} \rho_2\right) \frac{\omega}{b} + i_1 \left(\frac{1}{n} + \frac{\lambda' + 2\mu'}{E_w}\right)\right]$ ,  $C = (\rho_1 \rho_2 \omega$

·(3b)<sup>-1</sup>+i<sub>1</sub>ρ)/E<sub>w</sub>, i<sub>1</sub>=√-1, ρ=(ρ<sub>1</sub>+ρ<sub>2</sub>)是饱和土的质量密度。

饱和土中P波和S波(相)速度可表示为

$$v_j = 1/\text{Re}(l/\omega)_j, \quad (j=P, S) \tag{3.3}$$

式中 Re 表示取复数的实部。(l/ω)<sub>S</sub>显然可由式(3.2)求出, 而(l/ω)<sub>P</sub>由下式求出

$$\left(\frac{l}{\omega}\right)_P = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \tag{3.4}$$

由式(3.1)~(3.4)可求出两个正的v<sub>P</sub>和一个正的v<sub>S</sub>, 说明饱和土体中一般可存在两种P波和一种S波, 其中孔隙水只传播一种P波。由上述公式不难看出, 波速受频率和渗透系数的影响可统一用参数ρ<sub>w</sub>ω/b来反映。若引用Ishihara特征频率 f<sub>c</sub>=ng/2πk<sup>[2]</sup>, 则该参数可写成无量纲频率比形式: f/f<sub>c</sub>=ρ<sub>w</sub>ω/b。

对于饱和土, 土骨架体变模量一般远小于水的亦即 (λ'+2μ')≪E<sub>w</sub>, 从而由孔隙水传播的P波速度高于土骨架P波速度。故从实用角度出发, 下文仅讨论孔隙水P波速度, 并称它为饱和土的P波速度。

### 1. S波

当 f/f<sub>c</sub>→0 和 ∞ 时, 由式(3.2)和(3.3)可得出相应的波速公式

$$v_{S0} = \sqrt{\mu'/\rho}, \quad v_{S\infty} = \sqrt{\mu'/\rho_1} \tag{3.5}$$

图1中实线是根据式(3.2)和(3.3)而绘制的剪切波弥散曲线, 其中参数是参照饱和粘

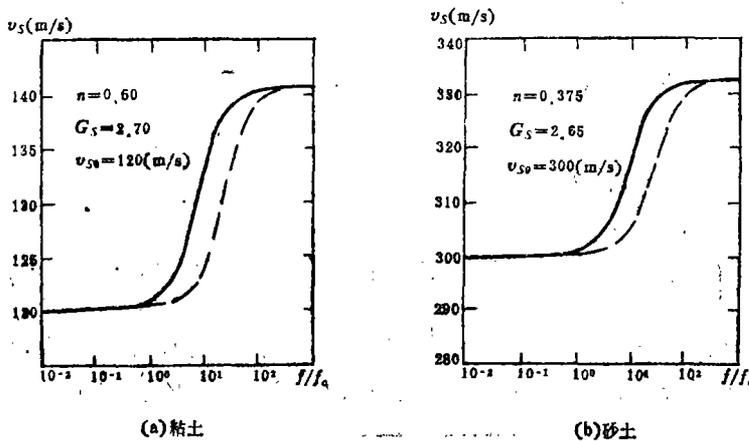


图1 饱和土中S波的弥散特性曲线

土及砂土中v<sub>S0</sub>典型值<sup>[3]</sup>而选用的, 图中虚线与模型2相应。由图可见, 两种模型中S波弥散曲线差异不大, 其共同规律为: 当f/f<sub>c</sub><1时, v<sub>S</sub>由v<sub>S0</sub>代替具有极高的精度, 当f/f<sub>c</sub>≥10<sup>2</sup>时, v<sub>S</sub>≈v<sub>S∞</sub>; 当1≤f/f<sub>c</sub><10<sup>2</sup>时, v<sub>S</sub>随f/f<sub>c</sub>的增大而增大。分析表明, v<sub>S</sub>随f/f<sub>c</sub>而变化主要是由于在不同的f/f<sub>c</sub>下孔隙水随土骨架的参振质量不同所致。

由 Δv<sub>S</sub>/v<sub>S0</sub>=(v<sub>S∞</sub>-v<sub>S0</sub>)/v<sub>S0</sub>=√(1+e/G<sub>S</sub>)-1可以评价S波弥散的程度, 这里e和G<sub>S</sub>分别为孔隙比和土颗粒比重。在图1(a)和(b)中, Δv<sub>S</sub>/v<sub>S0</sub>分别为17.1%和10.7%。

### 2. P波

当 f/f<sub>c</sub>→0 和 ∞ 时, 由式(3.1)、(3.3)和(3.4)可得出相应的P波速度公式

$$v_{P0} = \sqrt{\frac{E_w/n + (\lambda' + 2\mu')}{\rho}}; \quad v_{P\infty} = \sqrt{\frac{3}{n}} v_w \quad (3.6)$$

式中 $v_w$ 是水中波速。对于模型2,  $v_{P0}$ 与上式相同, 但 $v_{P\infty}$ 变成 $\sqrt{1/n} v_w$ 。显然, 饱和土中 $P$ 波弥散特性机理比 $S$ 波的要复杂得多; 模型选择对高频率比条件下的 $P$ 波速度有显著影响, 而实际情况似介于本文两种极限模型之间。

图2中实线是由式(3.1)、(3.3)和(3.4)绘制的饱和土 $P$ 波弥散曲线, 虚线与模型2相应。可见在两种模型中 $P$ 波弥散特性的规律一致, 即当 $f/f_c < 1$ 时 $v_P$ 基本上与 $v_{P0}$ 相同; 当 $1 \leq f/f_c$

$< 10^2$ 时 $v_P$ 随 $f/f_c$ 的增大而增大; 当 $f/f_c \geq 10^2$ 时,  $v_P \approx v_{P\infty}$ 。另外, 模型1中 $P$ 波的弥散程度比模型2中 $P$ 波及图1中 $S$ 波的弥散程度均要显著。

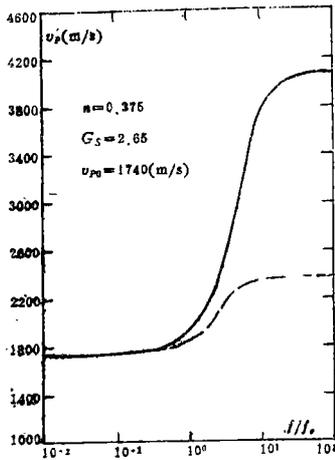
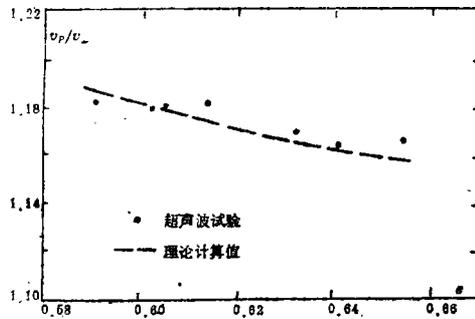


图2 饱和土中 $P$ 波的弥散特性曲线



(固结压力: 100kPa)

图3 福建饱和砂 $P$ 波速度与孔隙比的关系

#### 四、理论与实验结果的比较<sup>[2]</sup>

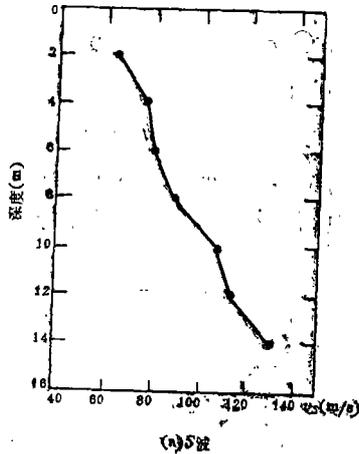
##### 1. 福建标准砂

采用室内超声波试验, 该装置测定无气水波速的误差低于1%。试验时土样处于侧限压缩状态, 孔隙比 $e=0.59 \sim 0.66$ ,  $P$ 波主频率为250kHz。对于饱和砂, 考虑到试验中边界条件的阻碍及较低的孔压梯度, 其渗透系数数量级选为 $10^{-4}$ cm/s。故 $f/f_c \approx 0.4 < 1$ , 从而可将式(3.6)中第一式与实测波速值作比较。理论波速 $v_{P0}$ 的计算方法是令式(3.6)中的 $E_w = \rho_w v_w^2$ 、 $(\lambda' + 2\mu') = \rho_s (v_p^*)^2$ , 而 $v_w$ 和 $v_p^*$ 分别是实测的水中波速和干砂 $P$ 波速度。图3是福建饱和砂的 $P$ 波速度与孔隙比的关系, 可见饱和砂的 $P$ 波速高于水中波速并且随着孔隙比的减小而增大; 理论与实测波速相当吻合。

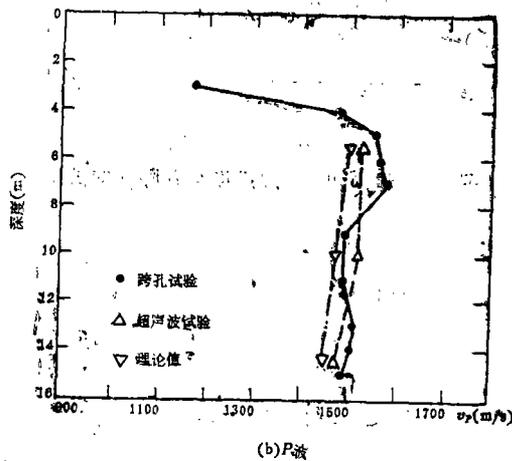
##### 2. 镇海饱和粘土地基

本文对宁波镇海饱和粘土进行了现场跨孔地震波试验和室内超声波试验。从记录波形初步估计跨孔试验中 $P$ 波主频率低于1kHz。饱和粘土的渗透系数低于 $10^{-6}$ cm/s, 孔隙率 $n=0.5 \sim 0.6$ 。容易验证, 室内外试验均满足 $f/f_c < 1$ , 即可将式(3.6)中第一式与实测值作比较。在计算波速 $v_{P0}$ 时, 为解决不能直接测定土骨架模量问题, 令 $(\lambda' + 2\mu') = \alpha \rho v_{s0}^2$ , 这里 $v_{s0}$ 采用实

测  $S$  波速度,  $\alpha = 2(1-\nu') / (1-2\nu')$ .  $\nu'$  是土骨架泊松比, 一般取  $0.10 \sim 0.35$ <sup>[4,5]</sup>, 则  $\alpha = 2.25 \sim 4.33$ . 由跨孔试验结果 (图4) 知, 饱和土初见深度约为  $4\text{m}$ , 比地下水位 (约  $2.5\text{m}$ ) 深. 由于土中  $S$  波速度较低, 在  $\alpha = 2.25 \sim 4.33$  中任取一个值而求出的  $v_p$ , 差异很小, 故取其平均值  $\alpha = 3.3$ . 由图4(b) 可以看出, 理论值与室内外试验结果比较接近, 相对误差不超过  $4.5\%$ .



(a) S波



(b) P波

图4 镇海粘土地基波速与深度的关系

### 3. 渥太华(Ottawa)饱和砂

渥太华砂是美国的一种标准试验砂, 近几十年来人们已对它的动力特性进行了比较深入的研究. 本文拟引用 Whitman<sup>[6]</sup>、Allen等<sup>[7]</sup> 和 De Alba等<sup>[8]</sup> 对渥太华饱和砂所测的压缩波速度资料与本文理论分析结果作比较.

对于  $e = 0.53$  的饱和砂, 参照 Whitman<sup>[6]</sup> 的试验结果取干砂  $P$  波速度  $v_p^d = 500\text{m/s}$ . 按式

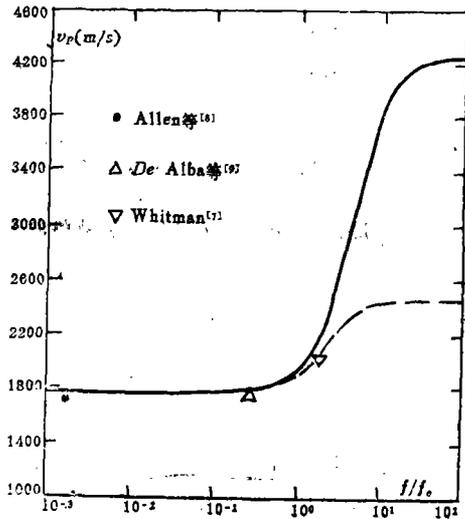


图5 渥太华饱和砂P波的弥散特性

(3.3) 和 (3.4) 可算出饱和渥太华砂  $P$  波弥散曲线, 如图5中实线所示, 而其中虚线与模型2对应. 由于试验砂相对密度较大 ( $D_r \approx 77\%$ ), 故将饱和砂试样在波动时的渗透系数取成  $10^{-4}\text{cm/s}$ . 这样, 按试验超声波频率等已知参数可将  $P$  波速度实测值也绘于图5中. 由图可见, 本文理论曲线与实测点相当接近. 应当说明, 由于目前试验所用频率难以高于  $1\text{MHz}$ , 饱和土中  $P$  波弥散特性的理论结果在高频段尚未作过验证, 即在高频段哪种理论模型更接近实际还有待于进一步研究.

## 五、讨 论

1. 本文已从理论上证明了饱和土中 $S$ 波速度主要是受土骨架 Lamé 常数或剪切模量 $\mu'$ 控制。由此可以认为,目前人们利用 $S$ 波速度来判别土的工程力学性质的做法基本上是合理的。但应指出,用超声波试验波速 $v_s$ 计算 $\mu'$ 时,如不适当考虑 $S$ 波的弥散特性,则将会使结果偏离实际值。这一情况在比较跨孔试验和超声波试验结果时常会发生。

2. 本文理论和试验研究均表明,不论饱和土渗透性优劣和波频率高低,只要满足 $f/f_c = 2\pi f k / n g < 1$ ,则 $P$ 波速度不但与孔隙水有关而且受土骨架特性的影响。目前工程中所遇到的情况绝大多数能满足上述条件,可见以往关于饱和土中 $P$ 波速度无实用意义的看法<sup>[4]</sup>是片面的。利用 $P$ 波和 $S$ 波速度测定饱和土孔隙率及土骨架泊松比的方法及实例,作者已另文介绍<sup>[2][10]</sup>。

3. 由式(3.6)第一式及图2知,当 $n < 60\%$ 或 $(\lambda' + 2\mu')/E_w \geq 0.1$ 时,总有 $v_p > v_w$ 。这就说明了饱和土中 $P$ 波速度高于水中波速的实验现象。

## 参 考 文 献

- [1] Chen Long-zhu, et al., Propagation of elastic waves in water-saturated soils, *Acta Mechanica Sinica*, 3, 1 (1987).
- [2] 陈龙珠, 饱和土中弹性波的传播速度及其应用, 浙江大学博士学位论文 (1987).
- [3] Ishihara, K., Approximate forms of wave equations for water-saturated porous materials and related dynamic moduli, *Soils and Foundations*, 10, 4 (1970).
- [4] Imai, T., P- and S-wave velocities of ground in Japan, *Proc. 9th ICSMFE*, 2 (1977).
- [5] Hardin, B. O., The nature of stress-strain behavior in soils, *Proc. of Conf. on Earthquake Engrg. and Soil Dynamics*, ASCE, 1 (1978).
- [6] 龚晓南等, 油罐软粘土地基性状, 岩土工程学报, 4 (1985).
- [7] Whitman, R. V., *The Response of Soils to Dynamic Loading*, U.S.A., AD708625 (1970).
- [8] Allen, N. F., et al., Fluid wave propagation in saturated and nearly saturated sand, *ASCE*, 106, 3 (1980).
- [9] De Alba, P., et al., Elastic-wave velocities and liquefaction potential, *Geot. Testing J*, 7, 2 (1984).
- [10] 陈龙珠、吴世明, 用波速法测定饱和土的孔隙率和容重, 浙江大学学报 (待发表).

## Propagation Velocities of Elastic Waves in Saturated Soils

Wu Shi-ming    Chen Long-zhu  
(Zhejiang University, Hangzhou)

### Abstract

Based on the wave equations established by the authors, the characteristics of propagation velocities of elastic waves in saturated soils are analyzed and verified by ultrasonic test in laboratory and seismic survey in the field. The results provide theoretical basis for the determination of physical and mechanical parameters of saturated soils using propagation velocities of elastic waves, especially P-wave velocity.