

油气藏两相渗流问题的多重网格法*

陈天翔 吕 涛 林爱民

(中国科学院成都分院数理室, 1988年5月3日收到)

摘 要

油气藏数值模拟要解一套高维、非线性、奇异、不定常方程组, 工作量很大。本文讨论非线性椭圆-抛物方程的多重网格算法, 给出了四重网格计算子程序, 并把它用于底水气田计算, 与SOR法比较, 计算结果完全相同, 计算效率显著提高。

一、前 言

现代专家普遍认为, 科学与工程问题的数值模拟已成为继伽里略与牛顿开创的实验与理论两大方法的第三种科学方法, 并以前所未有的势头推动技术革命, 在这场变革中, 计算机与科学计算方法相互依存配合, 计算能力提高依赖于两方面的发展。

在已探明的天然气藏中, 底水气藏无论储量和产量都占有重要的位置。确定合理的开采方案, 可有效地防止底水推进, 提高天然气的采收率, 具有明显的经济效益。

了解地下油气藏动态规律, 数值模拟几乎是唯一最经济、最有效的手段。模拟过程是把工程问题化为数学问题, 再用有限元或差分方法离散成代数问题, 最后选取合适的数值方法求解。设 N 是代数方程未知数个数, 常用的算法工作量如下:

表 1

方 法	高斯消去法	SOR	ADI	多重网格法
提出时间	1850	1954	1955	1962
工 作 量	$O(N^3)$	$O(N^{2/3})$	$O(N \log N)$	$O(N)$

以上表可以看出, 多网格法优于其它算法, 国外很多专家认为, 多网格算法会给计算数学带来一场革命。

多网格方法虽然早在60年代已由苏联人率先提出^[1], 但真正蓬勃发展是在七十年代。我国数学家在80年代开始注意, 目前已成为计算数学中最活跃领域, 有关多网格专著与文献很多, 但理论工作至今仍处于研究阶段。正如Parter, et al^[8]指出: “我们才刚开始理解多重网格法强大思想, 至于推广应用于工程尚处于开始。”因此, 把多网格法用于油气藏数值模拟, 是有意义的事。

* 周光炯推荐。

二、数学模型

1 流动方程

设地层等温, 气水不互溶, 遵循Darcy定律, 则可压缩气水两相流体弹性非均质孔隙介质渗流模型方程为^[6]

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (a_l \nabla \Phi_l) - Q_l/V = \frac{\pi}{B_l} \left(\frac{\partial S_l}{\partial t} + S_l(C_g + C_l) \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} \right) \end{array} \right. \quad (2.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c(S) = \Phi_g - \Phi_w - \Delta r Z \end{array} \right. \quad (2.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_g + S_w = 1 \end{array} \right. \quad (2.1c)$$

式中 $S = S_w$, $\Delta r = r_w = r_g$

$$a_l = \frac{K \cdot K_{rl}(S)}{\mu_l(P) \cdot B_l(P)}, \quad l = g \text{ (气相), } w \text{ (水相)}$$

其余符号具有通常意义^[5]。

2. 初边值条件

初始条件: 气藏开采前处于势平衡, 原始地层压力可以通过井上实测获得。

边界条件: 设气藏封闭型边界条件 $q_l|_{\partial\Omega} = 0$ (q_l 为质量流量), 即边界无物质流入或流出, 该条件可用边界处的零渗透率条件代替, 这样更利于程序编制。

方程组 (2.1) 与初边值条件一起是一套二维、非定常二阶非线性偏微方程组, 一般是用差分法离散后用迭代法求解。为了提高效率我们编制成功四重网格法计算子程序, 调用此子程序可以解一般的二维非线性抛物型方程。所以, 为了使讨论具有普遍性, 在下面的论述中将采用算子形式。

三、多重网格法

1. 线性椭圆型方程的多重网格法

先考虑椭圆型第一边值问题 (由于第二、三类边值问题的处理方法与第一类并无大的区别, 我们就不加以讨论了):

$$L^D u = f^D(x) \quad (x \in \Omega)$$

$$L^F u = f^F(x) \quad (x \in \Gamma := \partial\Omega)$$

其中 L^D 为线性椭圆微分算子, L^F 为线性边界算子。上面问题离散化后得:

$$L_h^D u_h = f_h^D(x) \quad (x \in \Omega_h)$$

$$L_h^F u_h = f_h^F(x) \quad (x \in \Gamma_h)$$

其中 L_h^D 为差分算子, L_h^F 为离散的边界算子, u_h 为网格函数, h 为网格尺寸。为简单起见, 在下面的讨论中略去边界条件, 并将上式写成:

$$L_h u_h = f_h \quad (\Omega_h) \quad (3.1)$$

设 u_h^j 为第 j 次计算细网格的离散解。二重网格法的计算过程可用以下简图表示:

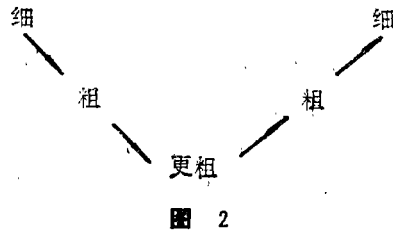
$$\begin{aligned}
 u_h^i \xrightarrow{\nu_1 \text{次松弛}} \bar{u}_h^i \longrightarrow \bar{E}_h^i = f_h - L_h \bar{u}_h^i \quad V_h^i \longrightarrow \bar{u}_h^i + V_h^i \xrightarrow{\nu_2 \text{次松弛}} u_h^{i+1} \\
 \downarrow I_{2h}^h \qquad \qquad \qquad \uparrow I_{2h}^h \\
 \bar{E}_{2h}^i \longrightarrow L_{2h} V_{2h}^i = \bar{E}_{2h}^i \quad (\text{余量方程})
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

其中： ν_1, ν_2 为松弛次数， $2h$ 为粗网格尺寸，我们应当把它理解成一个记号，对于不等距网格， h 不等于常数， $2h$ 也不一定等于 h 的两倍。 \bar{E}_h^i 为在细网格上经过 ν_1 次松弛后差分方程的余量。 I_{2h}^h 为限制算子，通过它把余量变换到粗网格。 L_{2h} 为粗网格上的差分算子。 I_{2h}^h 为延拓算子，通过它把粗网格上余量方程的解 V_{2h}^i 变换到细网格。 $\bar{u}_h^i + V_h^i$ 为校正后细网格的解。 u_h^{i+1} 为第 $j+1$ 次计算解。

对于余量方程需要求得精确解，这可用直接法或松弛法迭代至收敛。过程(3.2)可简单地表示为：

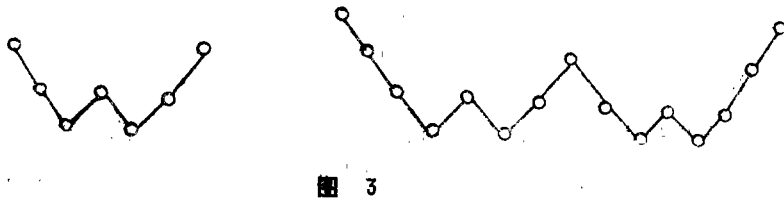


称为一个“V”循环。如果在解余量方程时也采用二重网格法，则整个求解过程就是三重网格法了：



以此类推可以构造出重数更多的多重网格法。

以上讲的是第 j 个计算步，两个计算步的两个“V”循环合并起来就是一个“W”循环。对于三重以上的多重网格法还可构造更复杂的循环方式，如



等等。

自适应算法没有固定的循环方式，在某一层网格上松弛若干次后，根据增量或余量是否达到要求以及程序编制者预先规定的一些判据，由计算机判断是转入更粗网格还是返回细网格。

2. 非线性及抛物型方程的多重网格法

上节所述的线性多重网格法是建立在线性迭加原理的基础上的，不能直接用到非线性方程中。

对于非线性问题可采用“直接”处理方法,即所谓“完全近似技术”(full approximation technique, “FAT”),这可参看 Brandt^[2], Stuben^[4]的文章。“间接”处理方法是寻求一个近似的线性算子,从而用线性多重网格法来解决非线性问题。例如,对于非线性问题 $L_h u_h = f_h$, 用牛顿法,有:

$$L_h u_k + L'_h(u_k) V_k = f_k \quad (3.3)$$

设算子 L'_h 为算子 $L'_h(u_k)$ 的线性近似,则用线性多重网格法解

$$L'_h V_k = d_k := f_k - L_h u_k \quad (3.4)$$

得 V_k , 最后得到 $j+1$ 计算步的近似解:

$$u_k^{j+1} = u_k + V_k \quad (3.5)$$

在实际计算中往往采用更简单的线性化迭代过程。在第 $j+1$ 个计算步直接取 L_h 的线性近似算子 L'_h , 用多重网格法解线性问题:

$$L'_h u_k = f_k \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

就可以得到非线性问题的解。

渗流力学中的非定常问题的模型方程是抛物型的:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \quad (3.7)$$

对时间采用隐式差分格式:

$$Lu^n = f^n - \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

其中 u^{n-1} 是上一时间步的计算值,对于第 n 时间步,它是已知量。因此(3.8)式对于未知量 u^n 是非线性椭圆方程,可以用多重网格法求解。

线性多重网格法的收敛性可以从不同角度去研究,主要方法有局部 Fourier 分析法, Hackbusch 方法, McCormik 法及偏差校正法。对于我们所处理的非线性问题,即使只用单网格和简单 Jacobi 迭代,其收敛性也没有得到证明。不过,对于渗流方程组(2.1)在单一的网格上离散、迭代求解,人们已积累了相当多的经验,对于多重网格的计算这些经验都是值得借鉴的。

四、两相渗流方程的离散及求解

1. 离散化方程

对于一个微分方程来说,离散的方法有很多,一般来说,有明确物理意义的差分格式往往会得到好的结果,这只要回想一下我们的数学模型本身就是通过把守恒定律用到体积微元中然后取极限而得到的就可明瞭,对于收敛性没有得到证明的复杂问题则更应该时刻注意这一点。对于方程组(2.1)我们采用控制容积法将其离散,系数 a_i 在控制容积的边界上取值^[10]。对非定常项,按照(3.8)式采用隐式格式,对于非线性项,其系数依上次迭代结果取值就可得到(3.6)式中的线性近似算子。

与文献[6]一样,我们采用计算量较小的隐压显饱(IMPES)方法并用压差方程代替压力方程,得:

$$\Delta a \Delta \hat{\Phi} = e \hat{\Phi} + f \quad (4.1)$$

式中: $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_w = \Phi_w^{n+1} - \Phi_w^n$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma\Delta\hat{\Phi} &= B_g\Delta\sigma_g\Delta\hat{\Phi} + B_w\Delta\sigma_w\Delta\hat{\Phi} \\ \Delta a_i\Delta\hat{\Phi}_i &= \Delta_s a_i\Delta_s\hat{\Phi}_i + \Delta_p a_i\Delta_p\hat{\Phi}_i \\ \Delta_s a_i\Delta_s\hat{\Phi}_i &= \frac{2}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1}} \left(a_{i+1/2} \frac{\hat{\Phi}_{i+1} - \hat{\Phi}_i}{\Delta x_{i+1}} + a_{i-1/2} \frac{\hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) \\ \Delta x_{i+1} &= x_{i+1} - x_i \\ e &= e_g + e_w, \quad e_i = C \cdot S_i (C_\phi + C_l) \\ f &= (B_g + RB_w)Q_g/V - B_g\Delta\sigma_g\Delta\Phi_g^* - B_w\Delta\sigma_w\Delta\Phi_w^* \end{aligned}$$

2. 实际问题的计算

图 4 是四川某地一个气田的平面图。我们采用一长方形区域将其包围，对矩形区域用等

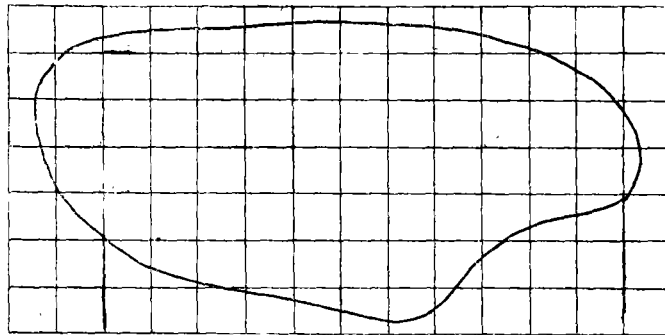


图 4

距网格剖分。第四重网格 ($L=4$) 是最细的网格，网格数为 28×56 ，第三重网格为 14×28 ，第二重网格 ($L=2$) 网格数为 7×14 。由于 7 不能被 2 整除，此例中只采用三重网格法。在气藏之外岩石的渗透率为零。各重网格的差分方程的系数及右端项均在主程序中算出。限制算子 (精 \rightarrow 粗) 取为：

$$I_{L+1}^L \hat{=} \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ L+1 \end{matrix}$$

延拓算子取为与 I_{L+1}^L 互伴的双线性插值算子：

$$I_{L+1}^L \hat{=} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L+1 \\ L \end{matrix}$$

四重网格法子程序 MG 的框图见附录，计算结果放在 E_4 中。本法问题计算结果表明，在同样精度要求下多重网格法收敛速度比单网格松弛法高得多 (表 2)。由于最后的迭代是在最细网格中进行，所以用多重网格法得到的结果与单网格法完全相同。显然，随着网格加密或问题规模加大 (如三维问题)，多网格法的优越性愈加突出。表 3 所列的是气藏的主要参数。

图 5 是气田开采 539 天后的压力分布图，图中的黑点表示井的位置。图 6 为两口气井的压力随时间变化曲线图。

最后还有几点补充说明：

表 2

方 法	时间步数	用于迭代的计算量	CFU时间	注: K 为一个网格点迭代一次的计算量
SOR	5	$(192 \times 10^4)K$	324秒	
三重网格法	5	$(63 \times 10^4)K$	166秒	

表 3

气藏模型参数表

气相重度 (ρ_g)	0.21g/cm ³	水相重度 (ρ_w)	0.968g/cm ³
渗透率 (K)	10md	孔隙度 (ϕ_0)	0.1
气相粘度 (μ_g)	0.02CP	水相粘度 (μ_w)	1.0CP
岩石压缩系数 (C_ϕ)	4.5×10^{-5}	水相压缩系数 (C_w)	1.4×10^{-5}
束缚水饱和度 (S_c)	0.3	原始气水界面压力 (P_o)	200kg/cm ²
大气压力 (P_g)	1.033kg/cm ²	临界压力 (P_{cc})	47.25kg/cm ²
气藏温度 (T_f)	337.6°K	临界温度 (T_{cc})	191.5°K
地面温度 (T_s)	293.0°K	气井产量 (Q_o)	2.1×10^6 m ³ /d

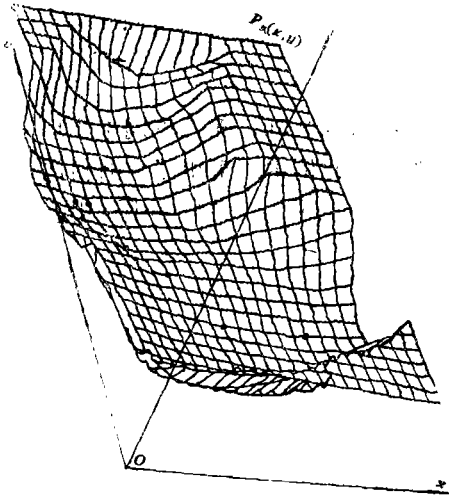


图 5 压力分布图

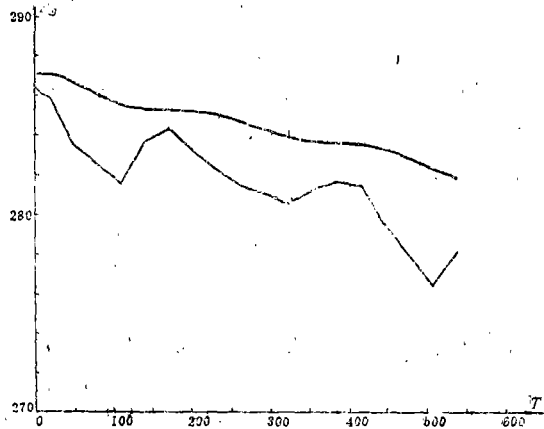


图 6 压力-时间曲线图

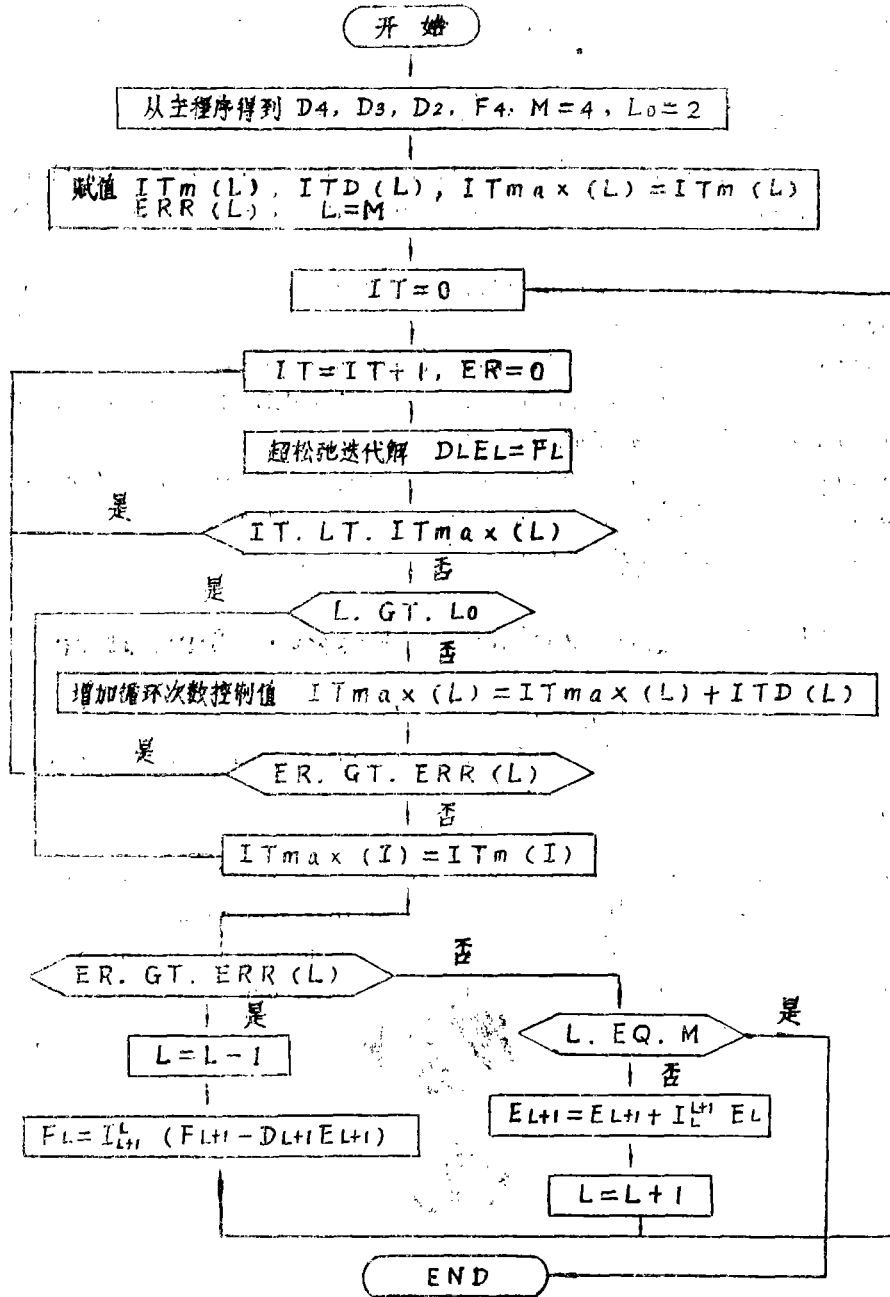
1) 与文献中分数步长法不同,多网格法完全从整体离散方程着手,而分数步长法通常有较大的截断误差。

2) 将多网格法用于非线性问题时的主要困难是离散方程的系数往往变化较大(例如当渗透率有较大间断时),这使得低层网格的差分方程与高层网格的方程不能很好匹配。在技术上有时可采用全加权系数来提高收敛速度。

3) 直接非线性算法(FAS法)是可行的但要求更多的计算量,因而很少采用。

本课题得到四川石油局开发研究院张厚清等同志的大力协助,仅此表示感谢。

附录. 多网格子程序框图



D_L : 差分算子 F_4 : 方程右端项 I_{L+1} : 限制算子 I_L^{L+1} : 延拓算子

$IT_m(L)$: 松弛次数 $ERR(L)$: 误差控制值

参 考 文 献

- [1] Fedorenko, R. P., A relaxation method for solving elliptic difference equation, *U. S. S. R. Computational Math. and Math. Phys.*, 1, 5 (1962), 1092—1096.
- [2] Brandt, A., Multi-level adaptive solution to boundary value problems, *Math. Comp.*, 31 (1977), 333—390.
- [3] Hackbusch, W., Convergence of multi-grid iterations applied to difference equations, *Math. Comp.*, 34 (1980), 425—440.
- [4] Stuben, K., Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications, *Multigrid Methods, Proceedings of the Conference, Koln-Porz* (1981).
- [5] Aziz, K., *Petroleum Reservoir Simulator*, Applied Science Publishers Ltd (1979).
- [6] 张厚清、吕涛, 底水气藏三维模拟与分数步长法, *石油学报*, 7, 4 (1986).
- [7] Hackbusch, W., *The Multigrid Method*, Springer (1985).
- [8] Parter, S. V. and D. Kamowitz, A study of multigrid ideas, *Science Report of University of Wisconsin-Madison* (1984).
- [9] Crichlow, H. B., *Modern Reservoir Engineering—A Simulation Approach* (1977).
- [10] Spalding, D. B., *Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion*, Pergamon Press (1983).

The Multigrid Method for Reservoir Simulation

Chen Tian-xiang Lü Tao Lin Ai-min

(Institute of Mathematical Science, Chengdu Branch, Academia Sinica, Chengdu)

Abstract

This paper describes a way of solving the reservoir simulation pressure equation using multigrid technique. The subroutine MG of four-grid method is presented. The result for 2-D two-phase problem is exactly the same as that of the SOR method and the CPU time is much less than that of the latter one.