应用数学和力学，第10卷第7期(1989年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于概率赋范线性空间上的线性算子的一致收敛*

魏　勇

(四川师范学院数学系，1987年8月29日收到)

摘　要

本文引入了概率赋范线性空间上线性算子的一致收敛和可完全刻划这种收敛的算子间的概率距离概念，并利用这些概念获得了算子连续和算子列一致收敛的本质特征，及其连续性和全连续性对于一致收敛极限运算的封闭性。

一、准 备 知 识

定义1[6]　映象Δ: $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$称为三角模（简称t-模）。如果满足下列条件：对任a, b, c, $d\in[0,1]$都有：

Δ-1)、$\Delta(a,1)=a$

Δ-2)、$\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$

Δ-3)、$\Delta(c,d)\geqslant\Delta(a,b)$　($c\geqslant a$, $d\geqslant b$)

Δ-4)、$\Delta(\Delta(a,b),c)=\Delta(a,\Delta(b,c))$

定义2[6]　设E是线性空间，F是E到分布函数集合$\Delta_0=\{f|f$非负，单调增加，左连续，且$f(0)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1\}$的映象，$\forall p\in E$，记$F(p)=f_p(t)$，如果还满足下列条件：

M-PN i)、$f_p(x)=H(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x>0\end{cases}\Leftrightarrow p=\theta$

M-PN ii)、$f_{\lambda p}(x)=f_p\left(\dfrac{x}{|\lambda|}\right)$　($\forall p\in E$, $\lambda\neq 0$)

M-PN iii)、存在三角模Δ使得对$\forall p,q\in E$, $\forall x>0$, $y>0$有$f_{p+q}(x+y)\geqslant\Delta(f_p(x),f_q(y))$，则称$(E,F,\Delta)$为Menger概率赋范线性空间，简称M-PN空间，f_p称为p的概率范数。

显然，M-PN空间按$f_{p,q}(t)=f_{p-q}(t)$为线性概率度量空间。

定义3[5]　设(E,F,Δ)为M-PN空间，A是E中非空子集。令$D_A^*(x)=\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p,q\in A}f_{p-q}(t)$，则称$D_A^*(x)$为$A$的概率直径。并规定$D_\phi^*(x)=H(x)$。

* 张石生推荐。

显然，$D_A^*(x)$非负，单调增加，左连续，且$f(0)=0$。

定义4[5] i)、若$D_A^*(x)\in\Delta_0$，即$\lim\limits_{x\to+\infty} D_A^*(x)=1$，则称$A$为概率有界集。

ii)、若$D_A^*(x)\bar{\in}\Delta_0$，但$D_A^*(x)\neq 0$，则称$A$为概率半有界集。

iii)、若$D_A^*(x)\equiv 0$，则称A为概率无界集。

引理1 E是M-PN空间，且三角模满足：$\sup\limits_{0<x<1}\Delta(x,x)=1$，$A\subset E$，则下列四个条件相互等价：

i)、A是概率有界集；

ii)、当$t\to\infty$时，$f_p(t)$（$\forall p\in A$）等度收敛于1，即对任$\lambda<1$，$\exists M>0$（与p无关）使得当$t\geqslant M$时，对任$p\in A$有$f_p(t)\geqslant\lambda$；

iii)、$D_A(x)=\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)\in\Delta_0$；

iv)、对 $\forall x_0>0$，$\forall\lambda<1$，$\exists M>0$使得$\dfrac{1}{M}A\subset S(x_0,\lambda)$，这里$S(x_0,\lambda)=\{p\mid f_p(x_0)\geqslant\lambda\}$。

证明 i)$\Rightarrow$ii)、$\because\sup\limits_{0<x<1}\Delta(x,x)=1$，对任$\lambda<1$，$\exists\, 0<x_0<1$，任$x_0\leqslant x<1$，$\Delta(x,x)\geqslant\Delta(x_0,x_0)\geqslant\lambda$，而$A$概率有界，$\therefore D_A^*(x)\in\Delta_0$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p,q\in A}f_{p-q}(t)=1$，$\therefore\exists M_1>0$，$t\geqslant M_1$，$f_{p-q}(t)\geqslant x_0$（$\forall p,q\in A$），又任取$p_0\in A$，$\exists M_2>0$，当$t\geqslant M_2$时，$f_{p_0}(t)\geqslant x_0$，令$M=2\max\{M_1,M_2\}$，当$t\geqslant M$时，$\forall p\in A$，$f_p(t)\geqslant\Delta\left(f_{p-p_0}\left(\dfrac{t}{2}\right),f_{p_0}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)\geqslant\Delta(x_0,x_0)\geqslant\lambda$，故$f_p(t)$等度收敛于1。

ii)$\Rightarrow$iii)、$\because$当$t\to\infty$时$f_p(t)$（$p\in A$）等度收敛于1，$\therefore$对$\forall\lambda<1$，$\exists M>0$，当$t\geqslant M$时，$f_p(t)\geqslant\lambda$（$\forall p\in A$），$\therefore$当$x>M$时，$\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)\geqslant\inf\limits_{p\in A}f_p(M)\geqslant\lambda$，故$\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)\in\Delta_0$。

iii)$\Rightarrow$iv)、$\because\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)\in\Delta_0$，$\therefore$ 对 $\forall x_0>0$，$\lambda<1$，$\exists M_0>0$，当$t\geqslant M_0$时，对任$p\in A$，$f_p(t)\geqslant\lambda$，令$M=\dfrac{M_0}{x_0}>0$，$f_{p/M}(x_0)=f_p(Mx_0)=f_p(M_0)\geqslant\lambda$，所以$\dfrac{1}{M}A\subset S(x_0,\lambda)$。

iv)$\Rightarrow$i)、$\because\sup\limits_{0<x<1}\Delta(x,x)=1$，$\therefore$对$\forall\lambda<1$，$\exists\,0<\lambda_0<1$使得当$\lambda_0\leqslant x<1$时，$\Delta(x,x)\geqslant\lambda$，而对此$\lambda_0$及$x_0=1$，$\exists M>0$满足$\dfrac{1}{M}A\subset S(1,\lambda_0)$，即对$\forall p\in A$，$f_p(M)=f_{p/M}(1)\geqslant\lambda_0$，$\therefore$当$t\geqslant 2M$时，$f_{p-q}(t)\geqslant\Delta\left(f_p\left(\dfrac{t}{2}\right),f_q\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)\geqslant\Delta(\lambda_0,\lambda_0)\geqslant\lambda$，故$D_A^*(x)\in\Delta_0$，即$A$是概率有界集。

证毕

为了使条件iv)验证时简单起见，我们用一个与之等价的条件iv)′来代替。

iv)′ 对$x_0=1$，及某列$\lambda_n\to 1$，（$\lambda_n<1$）中每一n都存在$M_n>0$满足$\dfrac{1}{M_n}A\subset S(1,\lambda_n)$。

事实上，iv)$\Rightarrow$iv)′是显然的。反过来，若对某列$\lambda_n\to 0$（$\lambda_n<1$）中每一n都存在$M_n>0$使得$\dfrac{1}{M_n}A\subset S(1,\lambda_n)$，则对$\forall x_0>0$，$\lambda<1$，$\exists\lambda_{n_0}>\lambda$ $\therefore\exists M_{n_0}>0$，$\dfrac{1}{M_{n_0}}A\subset S(1,\lambda_{n_0})$，令$M$

$=M_{n_0}/x_0$，对任 $p\in A$，$f_{p/M}(x_0)=f_p(M_{n_0})=f_{p/M_{n_0}}(1)\geqslant\lambda_{n_0}>\lambda$，所以$\frac{1}{M}A\subset S(x_0,\lambda)$，即iv)成立。

引理2 设(E,F,Δ)是M-PN空间，

则下列三条件相互等价：

i) A是(E,F,Δ)中非概率无界集（即概率半有界集和概率有界集）

ii) $\exists t_0>0$及$0<\lambda_0\leqslant 1$满足$A\subset S(t_0,\lambda_0)$

iii) $\exists n_0$使得$\frac{1}{n_0}A\subset S\left(1,\frac{1}{n_0}\right)$

证明 i)⇒ii) 由[5]知：$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A^*(x)=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A(x)$ 若 A 是非概率无界集，则$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A^*(x)>0$，从而$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A(x)>0$，$\exists t_0$使得$D_A(t_0)>0$，令$\lambda_0=2^{-1}D_A(t_0)<1$，$\forall p\in A$，$f_p(t_0)\geqslant\sup\limits_{t<t_0}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)=D_A(t_0)>\lambda_0$，故$A\subset S(t_0,\lambda_0)$。

ii)⇒iii) $\because\exists t_0>0$，$0<\lambda_0<1$使得 $A\subset S(t_0,\lambda_0)$ 则存在 n_0 使得：$n_0>t_0$ 且$\frac{1}{n_0}<\lambda_0$，$\forall p\in A$，$f_{p/n_0}(1)=f_p(n_0)\geqslant f_p(t_0)\geqslant\lambda_0>\frac{1}{n_0}$，$\therefore\frac{1}{n_0}A\subset S\left(1,\frac{1}{n_0}\right)$。

iii)⇒i) $\because\exists n_0$ 使得$\frac{1}{n_0}A\subset S\left(1,\frac{1}{n_0}\right)$，$\therefore$对$\forall p\in A$，$f_p(n_0)=f_{p/n_0}(1)>\frac{1}{n_0}$，$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A^*(x)=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}D_A(x)\geqslant D_A(n_0+1)=\sup\limits_{t<n_0}\inf\limits_{p\in A}f_p(t)>\frac{1}{n_0}$[5]，故$A$是非概率无界集。证毕

二、主 要 结 果

定义5 设$T_n(n=1,2,\cdots)$，T是M-PN空间(E_1,F_1,Δ_1)到(E_2,F_2,Δ_2)的线性算子，且在E_1上的任一有界集和半有界集A上一致收敛于T(即对$\forall x_0>0$，$0<\lambda_0<1$，$\exists N>0$，当$k>N$时，对任$p\in A$，$f_{(T_k-T)p}(x_0)>\lambda_0$)，则称$T_n$一致收敛于$T$。

定理1 设T，$T_n(n\geqslant 1)$是(E_1,F_1,Δ_1)到(E_2,F_2,Δ_2)的线性算子，则T_n一致收敛于T的充要条件是对任$0<\lambda<1$，T_n在$S(1,\lambda)$上一致收敛于T。

证明 必要性：$\because\forall 0<\lambda<1$，$S(1,\lambda)$是非概率无界集，$\therefore T_n$ 在 $S(1,\lambda)$ 是一致收敛于T。

充分性：对E_1中任一非概率无界集A，由引理2知，$\exists n_0$ 满足$\frac{1}{n_0}A\subset S\left(1,\frac{1}{n_0}\right)$，而$T_n$ 在$S\left(1,\frac{1}{n_0}\right)$上一致收敛于$T$，从而在$\frac{1}{n_0}A$上一致收敛于$T$，故$T_n$在$A$上一致敛于$T$，即$T_n$一致收敛于$T$。

证毕

定义6 设T_1，T_2是M-PN空间(E_1,F_1,Δ_1)到(E_2,F_2,Δ_2)的线性算子，则称

$$F_{T_1,T_2}(x)=\begin{cases}\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in S(1,x/(1+x))}f_{(T_1-T_2)p}(t) & (x\in(0,+\infty))\\ 0 & (x\in(-\infty,0])\end{cases}$$

为T_1，T_2间的概率距离。简记$F_{T,\theta}(x)$为$F_T(x)$，从而$F_{T_1,T_2}(x)$与$F_{T_1-T_2}(x)$意义同一。

显然$F_T(x)$非负、单调增加，左连续，且$f(0)=0$。

定理2 设T是M-PN空间$(E_1,F_1,\varDelta_1)$到$(E_2,F_2,\varDelta_2)$的线性算子，且$\sup\limits_{0<x<1}\varDelta_i(x,x)=1$ $(i=1,2)$则T为连续算子的充要条件是$F_T(x)\in\varDelta_0$。

证明 必要性：若$F_T(x)\bar{\in}\varDelta_0$，则$\exists\, 0<\lambda_0<1$，满足对任$x\in(-\infty,+\infty)$，$F_T(x)<\lambda_0$，由$F_T(x)$定义知$F_T(n)=\sup\limits_{t<n}\inf\limits_{p\in S(1,n/(1+n))}f_{Tp}(t)<\lambda_0$，所以$\exists\, p_n\in S\left(1,\dfrac{n}{n+1}\right)$使得$f_{Tp_n}(n-1)<\lambda_0$，而$\{p_n\}$是概率有界集。(事实上，对任$0<\lambda<1$，$\exists\, N$当$n\geqslant N$，$\dfrac{n}{1+n}\geqslant\lambda$，而对$n=1,2,\cdots N-1$这有限个$n$存在$M_0$，当$t\geqslant M_0$时，$f_{p_n}(t)\geqslant\lambda$，$(n=1、2,\cdots,N-1)$，令$M=\max\{M_0,1\}$，当$t\geqslant M$时，$f_{p_n}(t)\geqslant\lambda$ $(\forall n=1,2,\cdots N-1,N,\cdots)$，故$f_{p_n}(t)$等度收敛于1，由引理1知$\{p_n\}$是概率有界集。) 而$T$连续，$\therefore\{Tp_n\}$概率有界[5]，$\therefore f_{Tp_n}(t)$等度收敛于1与$f_{Tp_n}(n-1)<\lambda_0$相矛盾。

充分性：$\because F_T(x)\in\varDelta_0$，则对任$0<\lambda_0<1$存在$M>0$，当$x\geqslant M$时，$F_T(x)\geqslant F_T(M)=\sup\limits_{t<M}\inf\limits_{p\in S(1,M/(M+1))}f_{Tp}(t)\geqslant\lambda_0$，而对$(E_1,F_1,\varDelta_1)$中的任何概率有界集$A$，由引理1知$\exists\, M_0>0$使得$\dfrac{1}{M_0}A\subset S\left(1,\dfrac{M}{M+1}\right)$，当$t\geqslant M_0M$时$f_{Tp}(t)\geqslant f_{Tp}(M_0M)=f_{T1/M_0p}(M)\geqslant\sup\limits_{t'<M}\inf\limits_{p\in S(1,M/(M+1))}f_{Tp}(t')=F_T(M)\geqslant\lambda_0$，由$\lambda_0$的任意性及$M_0$与$A$中元素$p$的无关性可知，当$t\to\infty$时，$f_{Tp}(t)$等度收敛于1，由引理1知$\{Tp\}_{p\in A}$是概率有界集，又由于$A$是$(E_1,F_1,\varDelta_1)$中任一概率有界集，故$T$是连续算子[5]。 证毕

定理3 $(E_1,F_1,\varDelta_1)$到$(E_2,F_2,\varDelta_2)$空间的连续算子全体$B(E_1,E_2)$，当$\sup\limits_{0<x<1}\varDelta_1(x,x)=1$且$\varDelta_2$为连续三角模时按$(T_1+T_2)p=T_1p+T_2p$，$(\alpha T)p=\alpha(Tp)$定义的线性运算成为线性空间，且在三角模$\varDelta_2$意义下按$F_{T_1,T_2}(x)$为线性的概率度量空间，记为$(B(E_1,E_2),F,\varDelta_2)$，且$(E_2,F_2,\varDelta_2)$完备时，$(B(E_1,E_2),F,\varDelta_2)$也完备。

证明 显然$B(E_1,E_2)$是线性空间，且满足：i) $F_{T_1,T_2}(x)=H(x)\Leftrightarrow T_1=T_2$，ii) $F_{T_1,T_2}(x)=F_{T_2,T_1}(x)$。只须验证iii) $F_{T_1,T_2}(x+y)\geqslant\varDelta_2(F_{T_1,T_3}(x),F_{T_3,T_1}(y))$，事实上：$\forall x,y>0$

$$F_{T_1,T_2}(x+y)=\sup_{t<x+y}\inf_{p\in S(1,(x+y)/(x+y+1))}f_{(T_1-T_2)p}(t)$$

$$\geqslant\sup_{\substack{t_1+t_2<x+y\\ t_1>0\ t_2>0}}\inf_{p\in S(1,(x+y)/(x+y+1))}f_{(T_1-T_2)p}(t_1+t_2)$$

$$\geqslant\sup_{\substack{t_1+t_2<x+y\\ t_1>0,\ t_2>0}}\left[\inf_{p\in S(1,(x+y)/(x+x+1))}\varDelta_2(f_{(T_1-T_3)p}(t_1),f_{(T_3-T_2)p}(t_2))\right]$$

$$\geqslant\sup_{\substack{t_1+t_2<x+y\\ t_1>0,\ t_2>0}}\left[\varDelta_2\left(\inf_{p\in S(1,(x+y)/(x+y+1))}f_{(T_1-T_3)p}(t_1),\inf_{p\in S(1,(x+y)/(x+y+1))}f_{(T_3-T_2)p}(t_2)\right)\right]$$

$$\geqslant\sup_{\substack{t_1+t_2<x+y\\ t_1>0,\ t_2>0}}\left[\varDelta_2\left(\inf_{p\in S(1,x/(x+1))}f_{(T_1-T_2)p}(t_1),\inf_{p\in S(1,y/(y+1))}f_{(T_3-T_2)p}(t_2)\right)\right]$$

$$\geqslant \sup_{\substack{t_1<x\\t_2<y}} \left[\Delta_2\left(\inf_{p\in S(1,x/(x+1))} f_{(T_1-T_2)p}(t_1), \inf_{p\in S(1,y/(y+1))} f_{((T_3-T_2)p)}(t_2) \right)\right]$$

由Δ_2连续且 $\sup\limits_{t_1<x} \inf\limits_{(p\in S(1,x/1+x))} f_{(T_1-T_3)p}(t_1)$和 $\sup\limits_{t_2<y} \inf\limits_{p\in S(1,y/(1+y))} f_{(T_3-T_2)p}(t_2)$单调增加，左连续可知：

$$\sup_{\substack{t_1<x\\t_2<y}} \Delta_2\left(\inf_{p\in S(1,x/(x+1))} f_{(T_1-T_3)p}(t_1), \inf_{p\in S(1,y/(1+y))} f_{(T_3-T_2)p}(t_2) \right)$$

$$\geqslant \Delta_2\left(\sup_{t_1<x} \inf_{p\in S(1,x/(x+1))} f_{(T_1-T_3)p}(t_1), \sup_{t_2<y} \inf_{p\in S(1,y/(y+1))} f_{(T_3-T_2)p}(t_2)\right)$$

即 $F_{T_1,T_2}(x+y)\geqslant\Delta_2(F_{T_1,T_3}(x), F_{T_3,T_2}(y))$，故$(B(E_1,E_2), F, \Delta_2)$是线性概率度量空间。

当E_2是完备的M-PN空间时，任取$(B(E_1, E_2), F, \Delta_2)$中的Cauchy列$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$，即 $F_{T_k,T_{k+n}}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{\forall n} H(x)$ $\forall x\in(-\infty, +\infty)$ 则对 $\forall p_0\in E_1$，$f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{\forall n} H(t)$（事实上，对$\forall t_0\in(-\infty, 0]$显然，对$t_0\in(0,+\infty)$，由$f_{p_0}(t)$单调性知，只须证对$\forall 0<t_0<1$时，$f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(t_0)\to1$，若$f_{p_0}(t_0)=1$，令$x_0=t_0$，若$f_{p_0}(t_0)<1$，令$x_0=\min\left\{t_0, \dfrac{f_{p_0}(t_0)}{1-f_{p_0}(t_0)}\right\}$，则$p_0\in S\left(1, \dfrac{x_0}{x_0+1}\right)$，$f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(t_0)\geqslant f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(x_0)\geqslant \sup\limits_{t<x_0} \inf\limits_{p\in S(1,x_0/(x_0+1))} f_{(T_k-T_{k+n})}(t) =F_{T_k,T_{k+n}}(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{\forall n} H(x_0)$，$\therefore f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(t_0) \xrightarrow[k\to\infty]{\forall n} H(t_0)$，即$\{T_kP_0\}_{k=1}^{\infty}$是M-PN空间$(E_2,F_2,\Delta_2)$中的Cauchy列，由于$E_2$完备，$\therefore \{T_kP_0\}_{k=1}^{\infty}$收敛，令$TP_0=\lim\limits_{k\leftarrow\infty} T_kP_0$，显然$T$是线性算子。现证$T$是连续算子，由于$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$是$(B(E_1,E_2), F, \Delta_2)$中Cauchy列，对任$x_0>0$，$0<\lambda_0<1$，$\exists N>0$，当$k>N$时，对$\forall n>0$，$F_{T_k,T_{k+n}}\left(\dfrac{x_0}{2}\right)>\lambda_0$，对$\forall \dfrac{x_0}{2}<y<x_0$ 及 $\forall p_0\in S\left(1, \dfrac{x_0}{x_0+1}\right)\subset S\left(1, \dfrac{y}{y+1}\right)$，当 $k>N$，$f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(y)\geqslant \sup\limits_{t<y} \inf\limits_{p\in S(1,y/(y+1))} f_{(T_k-T_{k+n})p}(t)\geqslant F_{T_k,T_{k+n}}\left(\dfrac{x_0}{2}\right)>\lambda_0$又$\because f_{(T_k-T)p_0}(t)$单调增，$\therefore$ 在直线上几乎处处连续，从而存在$x_0/2<y_0<x_0$，$f_{(T_k-T)p_0}(t)$在 y_0 点连续，则 $f_{(T_k-T)p_0}(y_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_{(T_k-T_{k+n})p_0}(y_0)$[6]$\geqslant F_{T_k,T_{k+n}}\left(\dfrac{x_0}{2}\right)>\lambda_0$，故$F_{T_k,T}(x_0)=\sup\limits_{y<x_0} \inf\limits_{p\in S(1,x_0/(1+x_0))} f_{(T_k-T)p}(y)>\lambda_0$，故 $F_{T_k,T}(x_0)\xrightarrow[k\to\infty]{} H(x_0)$。又$T_k$连续，$\therefore F_{T_k,\theta}(t)\in\Delta_0$，且由$F_{T,\theta}(t)\geqslant\Delta_2\left(F_{T,T_k}\left(\dfrac{t}{2}\right), F_{T_k,\theta}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$以及$\Delta_2$的连续性知：$\lim\limits_{x\to\infty} F_{T,\theta}(t)=1$，由定理2知$T$连续。同时由已述$F_{T_k,T}(x)\to H(x)$知$T_k$依概率距离收敛于$T$。故$(B(E_1,E_2), F, \Delta_2)$完备。 证毕

定理4 设$T_k(k=1,2,\cdots)$，T是(E_1,F_1,Δ_1)到(E_2,F_2,Δ_2)的连续算子，其中$\sup\limits_{0<x<1}\Delta_1(x,x)=1$且$\Delta_2$连续。则$T_k$依概率距离$F$收敛于$T$的充要条件是$T_k$一致收敛于 T。

证明 充分性：因为T_n一致收敛于T，则对$\forall\ x_0>0$，T_k在$S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)$上一致收敛于$T_0$，对任$t\geqslant 0$，$0<\lambda_0<1$，$\exists\ N$，当$k>N$时，对$\forall\ p\in S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right) f_{(Tk-T)p}(t)>\lambda_0$，特别对$t_0<x_0$，$\exists\ N_0$，当$k>N_0$时，$f_{(Tk-T)p}(t_0)>\lambda_0\left(\forall\ p\in S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)\right) F_{Tk,T}(x_0)=\sup\limits_{t<x_0}\inf\limits_{p\in S(1,x_0/(x_0+1))} f_{(Tk-T)p}(t)\geqslant\inf\limits_{p\in S(1,x_0/(x_0+1))} f_{(Tk-T)p}(t_0)>\lambda_0$，故$T_k$依概率距离收敛于$T_0$。

必要性：设T_k依概率距离收敛于T，由定理1知：只须证对$\forall\, x_0>0$，T_k在$S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)$上一致收敛于$T_0$，事实上，对$\forall\, t_0>0$(不妨设$t_0<x_0$)及$0<\lambda_0<1$，$\exists\ N$，当$k>N$时$F_{Tk,T}(t_0)>\lambda_0$，$F_{Tk,T}(t_0)=\sup\limits_{t<t_0}\inf\limits_{p\in S(1,t_0/(t_0+1))} f_{(Tk-T)p}(t)\leqslant\sup\limits_{t<t_0}\inf\limits_{p\in S(1,x_0/(x_0+1))} f_{(Tk-T)p}(t)\leqslant f_{(Tk-T)p_0}(t_0)\ \forall\ p_0\in S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)$，即当$k>N$时，对$\forall\ p_0\in S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)$，$f_{(Tk-T)p_0}(t_0)>\lambda_0$，故$T_k$在$S\left(1,\frac{x_0}{x_0+1}\right)$上一致收敛于$T$。 证毕

顺便指出：国内外学者对$(E_1,F_1,\varDelta_1)$到$(E_2,F_2,\varDelta_2)$的线性算子所定义的几种概率范数均可导出相应的概率距离，但它们都有各自的缺陷。例如：在[1]中要假定$(E_1,F_1,\varDelta_1)$中存在吸收的概率有界集A时，定义$F_T(x)=\sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in A} f_{Tp}(t)$为$T$的概率范数，这不仅限制了讨论范围，而且$F_T(x)$与$A$的选取有关，具有不确定性。又如：在[2]中定义：

$$F_T(x)=\begin{cases} 0 & (x=-\infty)\\ \sup\limits_{t<x}\inf\limits_{p\in E} f_{Tp}(t) & (x\in(-\infty,+\infty))\\ 1 & (x=+\infty)\end{cases}$$

为T的概率范数，不难证明：

$$F_T(x)=\begin{cases} 0 & (x=-\infty)\\ \inf\limits_{p\in E_1} f_{Tp}(0^+) & (x\in(-\infty,+\infty))\\ 1 & (x=+\infty)\end{cases}$$

从而$F_T(x)$只与T的值域有关，无法刻划算子列的通常的收敛性。

定理5 设$\sup\limits_{0<x<1}\varDelta_1(x,x)=1$，$\varDelta_2$连续，$T_k\in(B(E_1,E_2),F,\varDelta_2)$，则$T_k$一致收敛的极限算子$T\in(B(E_1,E_2),F,\varDelta_2)$，特别地，当$(E_2,F_2,\varDelta_2)$完备时，若$T_k$全连续，则$T$全连续。

证明 $\because T_k$是连续线性算子，且T_k一致收敛于T，则由定理4知：T_k依概率距离收敛于T，由定理3的证明过程最后一部份可知：T是连续线性算子。

当T_k全连续时，对E_1中任一概率有界集A及$\forall\, t_0>0$，$\lambda_0<1$，而$\varDelta_2$连续，$\therefore$对此λ_0，$\exists\ 0<x_0<1$满足$\varDelta_2(x_0,x_0)>\lambda_0$，又已知$T_n$一致收敛于$T$，$\therefore T_n$在概率有界集$A$上一致收敛于$T$，$\therefore$对$\frac{t_0}{2}>0$，$x_0>0$，$\exists\ N$，$f_{(TN-T)p}\left(\frac{t_0}{2}\right)>x_0$，$(\forall\ p\in A)$又由$T_N$全连续定义知：$T_NA$是$E_2$中的概率列紧集，由[4]中定理2知$T_NA$是概率预紧集，由[3]中定理1.1知：存在有限子集$A_{t_0/2,x_0}$使得对$\forall\ p\in A$，$\exists\ q\in A_{t_0/2,x_0}$满足$f_{q-T_Np}\left(\frac{t_0}{2}\right)>x_0$，而$f_{q-Tp}(t_0)\geqslant\varDelta_2\left(f_{q-T_Np}\left(\frac{t_0}{2}\right),\right.$

$f_{TNp-Tp}\left(\frac{t_0}{2}\right)\geqslant\Delta_2(x_0,x_0)>\lambda_0$，也就是说对$\forall t_0>0$，$\lambda_0>0$存在有限子集$A_{t_0/2,x_0}$使得对$\forall p\in A$，$\exists q\in A_{t_0/2,x_0}$满足$f_{q-Tp}(t_0)>\lambda_0$，由[3]中定理1.1知$TA$是概率预紧集，由[4]中定理2知$TA$是概率列紧集，故$T$是全连续线性算子。 证毕

推论 当(E_2,F_2,Δ_2)完备，且$\sup\limits_{0<x<1}\Delta_1(x,x)=1$ Δ_2连续时，(E_1,F_1,Δ_1)到(E_2,F_2,Δ_2)的全连续线性算子全体$(C(E_1,E_2),F,\Delta_2)$是$(B(E_1,E_2),F,\Delta_2)$的闭子空间。

参 考 文 献

[1] Radu, V. C. R., *Acade. Sci.*, Paris, **280** (1975), 80—89.

[2] 林熙，概率赋范线性空间中的线性算子，工程数学学报，**4**，2 (1987)，43—48.

[3] 龚怀云、张敏先、刘作述，概率度量空间的有界性、可分性与紧性，工程数学学报，**1**，2 (1984)，57—66.

[4] 龚怀云，概率度量空间的概率列紧性，工程数学学报，创刊号 (1984)，76—80.

[5] 游兆永、龚怀云、朱林户、林熙，试论概率赋范空间上的线性算子及其他，第四届全国泛函分析会议论文 (1986)，1—10.

[6] 张石生，《不动点理论及其应用》，重庆出版社 (1985)，417—468.

On Uniform Convergence of Linear Operators on the Probabilistic Normed Space

Wei Yong

(*Mathematics Department, Sichuan Normal College, Nanchong*)

Abstract

In this paper, we introduced the notion of uniform convergence of the linear operators on the probabilistic normed space, and the notion of probabilistic distance between the operators, which describes the above convergence completely. In terms of these notions, we obtained the essential features of the continuity of operators, and of the uniform convergence of operator sequences, and we also obtained the closure of continuity and complete continuity under the operation of the limit of uniform convergence.