应用数学和力学，第10卷第7期(1989年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

从Beltrami-Schaefer应力函数导出几个特殊问题的应力函数*

王敏中　王鲁男

（北京大学力学系，1988年4月3日收到）

摘　要

本文从弹性力学中的Beltrami-Schaefer应力函数出发，导出了扭转问题、平面问题、轴对称问题和迴转体扭转问题的应力函数．

一、引　言

在弹性力学中，对于各种特殊问题，例如扭转问题、平面问题、轴对称问题和迴转体扭转问题，都是从平衡方程出发，分别导出了各自的应力函数．然而，我们知道，平衡方程的一般解为Beltrami-Schaefer应力函数[1]（以下简称为B-S应力函数）．能否从这个一般的应力函数不利用平衡方程而得到特殊情况下的应力函数呢？我们认为这是可能的．这是因为B-S应力函数已经包含了平衡方程的全部信息．

本文的目的，就是从B-S应力函数出发，推导出各种特殊问题的应力函数．下面将会看到，这种推导对某些问题，有时比通常的从平衡方程出发的推导显得复杂一些．不过，我们的目的不是寻求最简单的推导方法，而是希望就此来说明B-S应力函数的价值，即所有从平衡方程得到的结论，都可以从B-S应力函数得到．另外，我们知道，B-S应力函数不管是在单连通区域还是在多连通区域内都是单值的，但特殊问题中的应力函数却可能是多值的．通过本文的推导，我们可以清楚地看出其缘由．

在下一节，我们先介绍一下B-S应力函数，然后在第三～六节中逐个从B-S应力函数导出扭转问题的Prandtl应力函数、平面问题的Airy应力函数、轴对称问题中的丁氏应力函数[2]以及迴转体扭转的Michell应力函数．

二、B-S应力数函

无体力时，弹性体的平衡方程为

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=0 \tag{2.1}$$

* 刘人怀推荐．

其中 $\mathbf{T}$ 为应力张量，∇ 为梯度算子。

方程(2.1)的一般解为下面的B-S应力函数[1]

$$\mathbf{T}=\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla+\mathbf{h}\nabla+\nabla\mathbf{h}-\mathbf{I}(\mathbf{h}) \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{h}=(h_1,h_2,h_3)$ 为调和向量，$\mathbf{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{\phi}$ 为对称张量，它所对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33}\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

式(2.2)的直角坐标形式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}+\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}-\frac{\partial h_3}{\partial z}\\ \sigma_y&=2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}-\frac{\partial h_3}{\partial z}\\ \sigma_z&=2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y^2}-\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}\right)+\frac{\partial h_2}{\partial z}+\frac{\partial h_3}{\partial y}\\ \tau_{zx}&=\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}\right)+\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\\ \tau_{xy}&=\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}\right)+\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Stippes[3] 和 Carlson[4] 曾证明，如果在任意封闭曲面上的作用力是自平衡的，则(2.2)式中的调和向量 $\mathbf{h}$ 可取为零。

如果将(2.3)中的矩阵分别取为

$$\begin{bmatrix}\varphi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varphi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varphi_{33}\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}0 & \varphi_{12} & \varphi_{13}\\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0\end{bmatrix}$$

则相应的解(2.2)分别称为Maxwell-Schaefer应力函数和Morera-Schaefer应力函数。这两种应力函数的完备性已由Rostamian[5] 和 Gurtin[1]分别证明了。

三、Prandtl应力函数

对于柱体扭转，其应力分量有如下假设

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0 \tag{3.1}$$

$$\tau_{xz},\ \tau_{yz}\ \text{与}\ z\ \text{无关} \tag{3.2}$$

这个 z 轴与柱体的母线平行。

我们知道，对于柱体，虽然其截面作为二维图形可能是多连通的，但柱体本身作为三维图形却只有一个封闭表面(图 1)。显然应力场是自平衡场，于是，由上节所述，(2.2) 式中

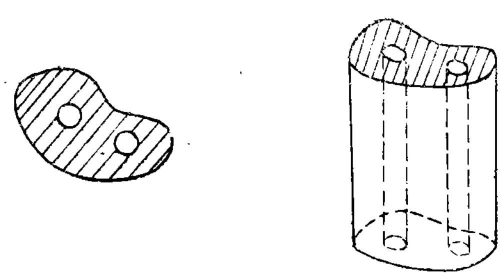

图 1

的h可取为零向量。此外，ϕ 取为Morera形式，那么(2.4)的第三式、(2.5)的第一、二式为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}\right)\\ \tau_{xz}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}\right)\\ 0&=\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

令

$$A(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial y\partial z}dy+odx \tag{3.4}$$

其中(x_0,y_0,z_0)是截面上的一个固定点，而(x,y,z)是其上任意一点，积分是截面上的线积分。由(3.3)的第三式知，积分(3.4)与路径无关，从(3.4)可知

$$\frac{\partial A}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial yyz} \tag{3.5}$$

令

$$\psi=\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}-2A \tag{3.6}$$

将(3.6)代入(3.3)的前两式，由于(3.5)，可得

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \tau_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3.7}$$

将(3.7)对柱长取平均，并记

$$\bar{\psi}(x,y)=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x,y,z)dz \tag{3.8}$$

由于条件(3.2)，那么(3.7)式成为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\\ \tau_{yz}&=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

式(3.9)中的$\bar{\psi}$即为Prandtl扭转应力函数。

利用类似的方法可以导出悬臂梁弯曲问题的应力函数。

四、Airy应力函数

我们仅考虑平面应变问题，此时的假设为

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy}\text{ 与 }z\text{ 无关} \tag{4.1}$$

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \tag{4.2}$$

从三维弹性问题来看，平面应变乃是一个柱体的平衡问题。这个柱体即使横截面是多连通的，也只有一个封闭表面，因此，与上一节一样，在B-S应力函数中，可取h为零向量。

另外，ϕ取为Maxwell形式，于是(2.4)、(2.5)式有关的项为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial y^2}\\ \sigma_y&=-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x^2}\\ \tau_{xy}&=\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y\partial z}=0,\qquad\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x\partial z}=0\tag{4.4}$$

对(4.4)式反复利用(3.4)、(3.5)的方法，可以得到存在函数C，D，使得

$$\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 C}{\partial y^2},\qquad\frac{\partial C}{\partial x}=0\tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 D}{\partial x^2},\qquad\frac{\partial D}{\partial y}=0\tag{4.6}$$

令

$$\varphi=-\varphi_{33}-C-D\tag{4.7}$$

将(4.7)代入(4.3)并考虑到(4.5)、(4.6)，可得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\tag{4.8}$$

再按(3.8)的记号对柱长取平均，由条件(4.1)可得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial y^2},\quad\sigma_y=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2},\quad\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x\partial y}\tag{4.9}$$

式(4.9)中的$\overline{\varphi}$就是平面问题中的Airy应力函数，显然$\overline{\varphi}$只是x、y的函数。

从求解过程中可以看出，虽然φ_{11}，φ_{22}，φ_{33}都是单值的，但对于多连通的xy平面，Airy应力函数$\overline{\varphi}$却可能是多值的。

五、丁氏应力函数[2]

在轴对称问题中，取柱坐标系，关于应力的假设是

$$\sigma_r,\ \sigma_\theta,\ \sigma_z,\ \tau_{rz}\text{ 与 }\theta\text{ 无关}\tag{5.1}$$

$$\tau_{r\theta}=\tau_{z\theta}=0\tag{5.2}$$

对于迴转体，即使半子午面是单连通的，它本身也可能是有封闭孔洞的(图2)。当然，如果半子午面是多连通的，那么迴转体本身也将至少具有两个封闭表面。在每个封闭表面上，应力场不一定是自平衡场。因此，一般说来，(2.2)式中的调和向量$\mathbf{h}$不为零。

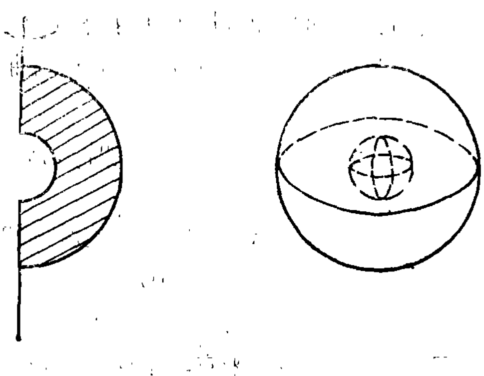

图 2

在柱坐标系中，也可以类似于文[5]的证明方法，证明ϕ在柱坐标系中所对应的矩阵，仅取对角线或非对角线元素也是完备的。

取柱坐标系中的 Maxwell-Schaefer 应力函数，那么，对轴对称问题有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_z}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial\varphi_z}{r\partial r}+\frac{\partial h_r}{\partial r}-\frac{h_r}{r}-\frac{\partial h_\theta}{r\partial\theta}-\frac{\partial h_z}{\partial z},\\
\sigma_\theta&=\frac{\partial^2\varphi_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial z^2}-\frac{\partial h_r}{\partial r}+\frac{h_r}{r}+\frac{\partial h_\theta}{r\partial\theta}-\frac{\partial h_z}{\partial z}\\
\sigma_z&=\frac{\partial^2\varphi_r}{r^2\partial\theta^2}-\frac{\partial\varphi_r}{r\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}\right)-\frac{\partial h_r}{\partial r}-\frac{h_r}{r}-\frac{\partial h_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial h_z}{\partial z}\\
\tau_{rz}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial\varphi_r}{r\partial z}+\frac{\partial h_r}{\partial z}+\frac{\partial h_z}{\partial r}
\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

在(5.3)中，对 θ 从 0 到 2π 积分，并记

$$\bar{\varphi}_r(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_r(r,\theta,z)d\theta\tag{5.4}$$

等等。考虑到函数的周期性和条件(5.1)，得到

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial\bar{\varphi}_z}{r\partial r}+\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}-\frac{\bar{h}_r}{r}-\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\sigma_\theta&=\frac{\partial^2\bar{\varphi}_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}_r}{\partial z^2}-\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}+\frac{\bar{h}_r}{r}-\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\sigma_z&=-\frac{\partial\bar{\varphi}_r}{r\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial r}\right)-\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}-\frac{\bar{h}_r}{r}+\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\tau_{rz}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial\bar{\varphi}_r}{r\partial z}+\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial z}+\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial r}
\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

现在设$f(r,z)$，$g(r,z)$两个待定函数，它们由下式决定

$$\bar{\varphi}_r+\frac{\partial f}{\partial r}=\bar{\varphi}_\theta+\frac{f}{r},\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial r}=0\tag{5.6}$$

这两个函数，依照[5]，它们是存在的。然后令

$$S=\bar{\varphi}_r+\frac{\partial f}{\partial r},\quad R=\bar{\varphi}_z+\frac{\partial g}{\partial z}\tag{5.7}$$

并将(5.7)代入(5.5)，利用(5.6)，可得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+\frac{\partial R}{r\partial r}+\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}-\frac{\bar{h}_r}{r}-\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\sigma_\theta&=\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}-\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}+\frac{\bar{h}_r}{r}-\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\sigma_z&=\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{\partial S}{r\partial r}-\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}-\frac{\bar{h}_r}{r}+\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z}\\
\tau_{rz}&=-\frac{\partial^2 S}{\partial r\partial z}+\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial z}+\frac{\partial\bar{h}_z}{\partial r}
\end{aligned}\right\}\tag{5.8}$$

在附录里，我们将详细介绍式(5.8)中的$\bar{h}_r$，$\bar{h}_z$可以合并到S，R里，从而得到下列形式

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\\
&\sigma_z=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{\partial F}{r\partial r},\quad \tau_{rz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

从平衡方程出发，丁浩江[2]曾首先推出了(5.9)式。另外，我们还可以看出，式(5.8)中的S，R，$\bar{h}_r$，$\bar{h}_z$不管对什么样的区域，始终是单值的，而式(5.9)中的F，ψ，当半子午面是多连通区域时，却有可能是多值的（见附录）。

六、Michell应力函数[6]

今考虑迴转体扭转问题，在柱坐标系下，对应力有如下假设

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{rz}=0 \tag{6.1}$$

$$\tau_{r\theta},\ \tau_{z\theta}\text{ 与 }\theta\text{ 无关} \tag{6.2}$$

由于扭转问题的内边界不受外力，故它的任意封闭表面上的应力场是自平衡场。于是，(2.2)式中的调和向量 **h** 可取为零。我们对 (2.2)式中的**ϕ**取柱坐标系下的 Morera 应力函数形式，于是有

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\theta z}&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_{\theta z})\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{rz}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_{r\theta}}{\partial z}\right)\\ \tau_{\theta r}&=-r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{\theta z}}{\partial z}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{rz}}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial^2\varphi_{r\theta}}{\partial z^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

在(6.3)式两边对θ从0到2π积分，考虑到(6.2)式，并利用(5.4)的记号，有

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\theta z}&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\varphi}_{\theta z})\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{\varphi}_{r\theta}}{\partial z}\right)\\ \tau_{\theta r}&=-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\varphi}_{\theta z}}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\bar{\varphi}_{r\theta}}{\partial z^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

令
$$\psi=-r\bar{\varphi}_{\theta z}+r^2\frac{\partial\bar{\varphi}_{\theta z}}{\partial r}-r^2\frac{\partial\bar{\varphi}_{r\theta}}{\partial z} \tag{6.5}$$

并将(6.5)代入(6.4)，则(6.4)式可化成

$$\tau_{\theta z}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad \tau_{\theta r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{6.6}$$

函数ψ就是迴转体扭转问题的 Michell 应力函数。另外，从求解过程中可以看出，Michell 应力函数是单值的。

附　录

式(5.8)中的$\bar{h}_r$、$\bar{h}_z$分别满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)\bar{h}_r=0 \tag{A.1}$$

$$\nabla^2\bar{h}_z=0 \tag{A.2}$$

其中　$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

为了证明在五节中所叙述的结论，我们引出如下定义和引理。

定义[7]　函数$\varphi(r,z)$和$\varphi^*(r,z)$称为是共轭的轴对称调和函数，如果

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^*)=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{A.4}$$

引理1[7] 如果φ和φ^*是共轭的轴对称调和函数，则有

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{A.5}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)\varphi^*=0 \tag{A.6}$$

通常，引理1的逆定理不成立，即对满足(A.5)和(A.6)式的φ和φ^*，不一定有(A.3)式和(A.4)式成立。但我们却有下述引理

引理2[7] ①如果函数$\varphi^*(r,z)$满足(A.6)式，则存在一个函数$\varphi(r,z)$，满足(A.3)、(A.4)式。

②如果函数$\varphi(r,z)$满足(A.5)，则存在一个函数$\varphi^*(r,z)$，满足(A.3)，(A.4)式。

引理3 如果函数φ，φ^*满足(A.3)、(A.4)式，则存在ψ，ψ^*满足

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi^*)=\frac{\partial\psi}{\partial z}=\varphi \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\varphi^* \tag{A.8}$$

证明 令

$$\psi(r,z)=\int_{(r_0,z_0)}^{(r,z)}\varphi dz-\varphi^* dr \tag{A.9}$$

其中(r_0,z_0)为半子午面上的某一固定点，(r,z)是该面上的一点，积分为半子午面上的线积分。由于(A.4)式，此积分与路径无关。于是(A.7)、(A.8)后面的等式成立，再利用(A.3)式，知ψ满足(A.5)式。按引理2，存在ψ^*，满足(A.7)、(A.8)前面的等式。证毕。

下面我们将对$\bar{h}_r$和$\bar{h}_z$应用上述引理及定义，从而导出式(5.9)。

对$\bar{h}_r$，由引理2知，存在函数$\bar{h}_r^*(r,z)$，满足

$$\frac{\partial h_r^*}{\partial r}=-\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial z} \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial h_r^*}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{h}_r) \tag{A.11}$$

再由引理3可知，对$\bar{h}_r$和h_r^*，存在函数$H_r(r,z)$和$H_r^*(r,z)$，满足

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)=\frac{\partial H_r^*}{\partial z}=h_r^* \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z}=-\frac{\partial H_r^*}{\partial r}=\bar{h}_r \tag{A.13}$$

再由引理1知，H_r^*满足

$$\nabla^2 H_r^*=0 \tag{A.14}$$

同理，对$\bar{h}_z$，存在函数$H_z(r,z)$，满足

$$\frac{\partial H_z}{\partial z}=\bar{h}_z \tag{A.15}$$

$$\nabla^2 H_z=0 \tag{A.16}$$

令

$$F=S-H_z+H_r^* \tag{A.17}$$

并利用(A.12)，(A.13)，(A.14)，(A.15)和(A.16)式，则(5.8)式可以化成

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-2\frac{\bar{h}_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\\
\sigma_\theta&=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-2\frac{\partial\bar{h}_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\\
\sigma_z&=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r},\quad \tau_{rz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{A.18}$$

再令

$$\psi=R+2H^{*}\tag{A.19}$$

并将(A.13)、(A.19)代入(A.18)，则(A.18)式化成

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad\sigma_\theta=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\\&\sigma_z=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r},\quad\tau_{rz}=-\frac{\partial^2F}{\partial r\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

这就是我们在第五节中所叙述的式(5.9)。从求解过程中可以看出，当半子午面是多连通区域时，丁氏应力函数F，ψ可能是多值的。

参考文献

[1] Gurtin, M. E., The linear theory of elasticity, *Encyclopedia of Physics*, **Vol.a/2** (1972).

[2] Ding Hao-jiang, On the stress function of axisymmetric deformation in a solid of revolution, *Shanghai J. of Mech.*, 1 (1987).

[3] Stippes, M., A note on stress functions, *Int. J. Solids Structures*, **3** (1967).

[4] Carlson, D. E., On the completeness of the Beltrami stress function in continuum mechanics, *J. Math. Analysis and Appl.*, **15** (1966).

[5] Rostamain, R., The completeness of Maxwell's stress function representation, *J. Elasticity*, **9**, 4 (1979).

[6] Michell, J. H., *Proc. London Math. Soc.*, **31** (1899), 130—142.

[7] Wang, M. Z., On the completeness of solutions of Boussinesq, Timpe, Love and Michell in axisymmetric elasticity, *J. Elasticity*, 4 (1987).

Derivation of Some Special Stress Function from Beltrami-Schaefer Stress Function

Wang Min-zhong　Wang Lu-nan

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

Using Beltrami-Schaefer stress function in the theory of elasticity in this paper, we derive the stress functions of torsion, plane problem, axisymmetric deformation in solid of revolution and torsion on solid of revolution.