应用数学和力学，第10卷第6期(1989年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

胡海昌解的完备性的注记*

王敏中　　何北昌

（北京大学力学系，1986年6月12日收到）

摘　　要

本文证明了，如果区域是z向凸的，则各向同性的胡海昌解是完备的。

一、引　　言

以位移表示的弹性力学方程为

$$\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\text{grad div}\vec{u}=0 \tag{1.1}$$

其中$\vec{u}=(u,\ v,\ w)^T$是位移向量，ν为 Poisson 比，∇^2是Laplace算子。

Папкович 和 Neuber给出了（1.1）式的一个解，

$$\vec{u}=\vec{H}-\frac{1}{4(1-\nu)}\text{grad}(H_0+\vec{r}\cdot\vec{H}) \tag{1.2}$$

其中H_0和$\vec{H}=(H_1,\ H_2,\ H_3)^T$都是调和函数，且$\vec{r}=(x,\ y,\ z)^T$。

Mindlin[1]证明了解（1.2）是完备的，即（1.2）是（1.1）的通解。

胡海昌[2]得到了横观各向同性弹性力学空间问题的解。在各向同性时，该解化为，

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\v&=-\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\w&=-\frac{\partial^2F}{\partial z\partial z}+2(1-\nu)\nabla^2F\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中$\nabla^4F=0$，$\nabla^2\varphi=0$。

关于解(1.3)，王敏中[4]曾得到如下结果：

定理1　如果弹性区域G满足下述两个条件，

i）G是z向凸的。

ii）存在完全包含在G中的平面

$$S=\{(x,\ y,\ z_0)\,|\,(x,\ y)\in G_{xy}\}$$

---

* 钱伟长推荐。

（其中，$G_{xy}=\{(x,\ y)\mid(x,\ y,\ z)\in G\}$）。
则G内的任何弹性位移均可表成（1.3）的形式。

定理2 如果G不是z向凸的，则解（1.3）不完备。

本文的目的在于放松定理1的条件，证明如下定理：

定理1′ 如果弹性区域G是z向凸的，则解（1.3）就是完备的。

综合定理1′和定理2，可以看出，对胡海昌解的完备性来说，z向凸的条件是必不可少的。

定理1′的证明将在第二节和第三节中给出，它们分别相应于G_{xy}为单连通区域或多连通区域的情形。

张鸿庆、王震宇[5]曾利用形式微分算子的方法讨论过这一结论。

二、定理1′的证明——G_{xy}是单连通区域的情形

首先我们不加证明地引述两个引理。

引理1（Eubanks-Sternberg[3]） 若区域G是z向凸的，则在G中存在调和函数F，满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial z}=f_0(x,\ y,\ z)$$

其中f_0是已知的调和函数。

引理2[4] 设函数$F(x,\ y,\ z)$在连通域G上调和，且

$$\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

则$F(x,\ y,\ z)=f(x,\ y)$，$(x,\ y)\in G_{xy}$。

现在来证明定理1′。

由于已知Папкович-Neuber解是完备的，为了证明胡海昌解的完备性，只须证明，存在双调和函数F和调和函数φ，使得下式

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=H_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\\
&-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=H_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\\
&-\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial z}+2(1-\nu)\nabla^2 F=H_3-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

成立，这里认为H_0，H_1，H_2，H_3都是已知的调和函数。

为此，利用定理1′中区域G是z向凸的条件，两次利用引理1，可求得调和函数$\hat{A}$满足方程

$$\frac{\partial^2\hat{A}}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial y}\right)\tag{2.2}$$

设 $$A=\hat{A}\tag{2.3}$$

求出函数A后，便可如下定义函数f和F_1，

$$f=\frac{1}{2(1-\nu)}\left(H_3-\frac{\partial A}{\partial z}\right) \tag{2.4}$$

$$F_1=-\frac{1}{4\pi}\iiint_G\frac{f(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\rho}d\xi d\eta d\zeta \tag{2.5}$$

其中 $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$

从(2.2)～(2.5)诸式，可以求出

$$\nabla^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)=\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla^2(\boldsymbol{r}\cdot\vec{H}) \tag{2.6}$$

由于A和H_0是调和函数，故有

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{1}{4(1-\nu)}(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\vec{H})-A+B \tag{2.7}$$

其中B是某个调和函数($\nabla^2B=0$)。

又由引理1，可以求出调和函数F_2，使得

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=B \tag{2.8}$$

然后，令

$$F=F_1-F_2 \tag{2.9}$$

利用(2.4)～(2.9)诸式，容易得出，

$$\nabla^4F=0 \tag{2.10}$$

$$A=\frac{1}{4(1-\nu)}(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\vec{H})-\frac{\partial F}{\partial z} \tag{2.11}$$

$$\nabla^2F=\frac{1}{2(1-\nu)}\left(H_3-\frac{\partial A}{\partial z}\right) \tag{2.12}$$

这里的F就是（2.1）式中所要的双调和函数。并且，由（2.11）式可知，(2.12)式就是（2.1）式中的第三式。

现在来求调和函数φ。为此，先两次利用引理1求出调和函数φ_0，它满足下述条件

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}=\frac{\partial H_1}{\partial y}-\frac{\partial H_2}{\partial x} \tag{2.13}$$

然后，令

$$P=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-H_2,\quad Q=\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-H_1 \tag{2.14}$$

从(2.14)，可以算出

$$\nabla^2P=0,\quad\frac{\partial^2P}{\partial z^2}=0;\quad\nabla^2Q=0,\quad\frac{\partial^2Q}{\partial z^2}=0 \tag{2.15}$$

然后，两次运用引理2，可得，

$$\left.\begin{aligned}P(x,\ y,\ z)=zP_1(x,\ y)+P_2(x,\ y)\\Q(x,\ y,\ z)=zQ_1(x,\ y)+Q_2(x,\ y)\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

其中P_i和Q_i（$i=1,\ 2$)都是G_{xy}中的调和函数。

另外，从（2.14）式，可知

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.17}$$

把（2.16）式代入（2.17）中，可以看出 P_i，$Q_i(i=1,\ 2)$满足 Cauchy-Riemann 条件，即

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}=\frac{\partial Q_i}{\partial y},\ \frac{\partial P_i}{\partial y}=-\frac{\partial Q_i}{\partial x} \qquad (i=1,\ 2) \tag{2.18}$$

由条件（2.18）和区域G_{xy}的单连通条件，可以利用线积分定义下列函数φ_i，

$$\varphi_i=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P_i dx-Q_i dy \qquad (i=1,\ 2) \tag{2.19}$$

这里$(x,\ y)\in G_{xy}$。

然后，令

$$\varphi=\varphi_0-z\varphi_1-\varphi_2 \tag{2.20}$$

则φ是调和函数，且有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=H_2-\frac{\partial A}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-H_1+\frac{\partial A}{\partial x} \tag{2.21}$$

这里φ即为（2.1）式中所要求的调和函数，且由于（2.11）式，可知（2.21）就是（2.1）的前两式。

于是，我们在G_{xy}单连通的条件下证明了定理1′。

三、定理1′的证明——Gxy是多连通区域的情形

只要对单连通区域情形的证明做些修改，即得到G_{xy}是多连通区域时，定理1′的证明。

为此，改变定义（2.3）式，令，

$$A=\hat{A}+zM_1(x,\ y)+M_2(x,\ y) \tag{3.1}$$

其中M_1和M_2都是待定的调和函数，且$(x,\ y)\in G_{xy}$。

显然，这样定义的A是三维调和函数，并且有

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial y}\right) \tag{3.2}$$

同前，定义调和函数φ_0满足(2.13)。

然后，令

$$P=\frac{\partial \hat{A}}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}-H_2,\ Q=\frac{\partial \hat{A}}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}-H_1 \tag{3.3}$$

容易验证，(2.15)～(2.18)诸式依然成立。

由（2.18）式，可得，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(P_i+\frac{\partial M_i}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(Q_i+\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(P_i+\frac{\partial M_i}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_i+\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (i=1,\ 2) \tag{3.4}$$

在得到上式时用到了M_i（$i=1,\ 2$）为调和函数。

今设，多连通域G_{xy}中有n个孔，其边界为L_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）。我们在每个小孔内各

作一个小圆，其圆心、半径和周界分别为(x_j, y_j)，r_j和L'_j $(j=1, 2, \cdots, n)$。

设

$$\oint_{L_j} P_i dx - Q_i dy = a_{ji} \qquad (j=1, \cdots, n;\ i=1, 2)$$

其中a_{ji}是常数。

今如下定义（3.1）中的待定函数M_1和M_2。

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} a_{ji} \ln \rho_j, \quad \rho_j^2 = (x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 \tag{3.5}$$

其中$i=1, 2$而$j=1, \cdots, n$。

显然，这样定义的M_1和M_2都是G_{xy}中的调和函数，并且有

$$\begin{aligned}
&\oint_{L_j}\left(P_i + \frac{\partial M_i}{\partial y}\right)dx - \left(Q_i + \frac{\partial M_i}{\partial x}\right)dy \\
&= \oint_{L_j} P_i dx - Q_i dy + \oint_{L_j} \frac{\partial M_i}{\partial y} dx - \frac{\partial M_i}{\partial x} dy \\
&= a_{ji} - \oint_{L_j} \frac{\partial M_i}{\partial n} dl = a_{ji} - \oint_{L'_j} \frac{\partial M_i}{\partial \rho} r_j d\theta \\
&= a_{ji} - a_{ji} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

今在G_{xy}中定义函数φ_i，

$$\varphi_i = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(P_i + \frac{\partial M_i}{\partial y}\right)dx - \left(Q_i + \frac{\partial M_i}{\partial x}\right)dy \qquad (i=1, 2) \tag{3.7}$$

按照（3.4）的第二式和(3.6)，以及[6]的补充材料Ⅰ，这样定义的函数φ_1和φ_2都是单值函数。

至此，我们可以得出如下结论：如果区域G_{xy}是多连通的，我们就利用(3.1)和（3.5）式定义函数A；由(2.4)、(2.5)和(2.8)、(2.9)定义F，可以验证(2.10)～(2.12)式仍成立；利用(3.5)、(3.7)和(2.16)、(2.20)定义函数φ，可以验证φ满足（2.21）式。于是我们求得了满足（2.1）式的φ和F，因而当G_{xy}为多连通域时，定理1′获证。

参 考 文 献

[1] Mindlin, R., Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936), 373—376.

[2] 胡海昌，横观各向同性体的弹性力学的空间问题，物理学报，**9**，2 (1953)，130—147.

[3] Enbanks, R. A. and E. Sternberg, On the completeness of the Papkovitch stress function, *J. Rational Mech. Anal.*, **5** (1956), 735—746.

[4] 王敏中，关于胡海昌解的完备性，应用数学和力学，**2**，2 (1981)，243—249.

[5] 张鸿庆、王震宇，胡海昌解的完备性和逼近性，科学通报，**30**，5 (1985)，342—344.

[6] Мусхелишвили Н. И.，《数学弹性力学的几个基本问题》，科学出版社 (1965).

A Note on the Completeness of Hu Hai-chang's Solution

Wang Min-zhong He Bei-chang
(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In this paper it is showed that Hu Hai-chang's solution for the isotropic is complete in case of regions convex in z-direction.