应用数学和力学,第 25 卷 第 7 期(2004 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 07_0723_06

基于 Kelvin_Voigt 模型的粘弹性波动力学的本征化理论*

郭少华

(中南大学 土木建筑学院,长沙 410083)

(皓江、陈予恕推荐)

摘要: 利用固体力学本征化理论,研究了具有 Kelvin_Voigt 粘弹性质的各向异性固体的本征特性,并由此得到了各向异性粘弹性波动力学的广义 Stokes 方程,展现了波动过程的立体图像• 讨论了几类常见各向异性固体的粘弹性波动规律,给出了一些新的结论•

关 键 词: 各向异性; 粘弹性; 波动方程; 本征化理论

中图分类号: O347.4 文献标识码: A

引 言

在地震波理论的研究中,Stokes 波动方程占据了十分重要的地位[1],它是研究介质内摩擦与散射效应引起的能量耗散对地震波传播影响的经典模型• 但遗憾的是,Stokes 方程只适用于各向同性介质,而在各向异性介质中没有对应的形式,致使各向异性地震波传播理论仍停留在弹性阶段• 自二十世纪 70 年代开始,从地震波的观测中已经注意到了地球介质的各向异性特性,并发现了横波分裂等现象[2],弹性力学分析虽然部分解释了地震波的各向异性现象,但像振幅耗损,选择性吸收等地震波传播规律,则必须依靠粘弹性模型,才能给出合理的解释•

固体力学的本征化原理是作者针对各向异性力学所提出的一个新理论[3~8],它从力学表象,而非传统的几何表象,研究各向异性固体的力学问题,从而能够得到一组算子化模态方程• 在波动力学方面,先后建立了各向异性弹性模态波动方程,以及基于 Maxwell 模型的各向异性粘弹性模态波动方程• 对进一步深入了解各向异性波动力学性质提供了有力的理论• 本文则是在前面工作的基础上,对具有 Kelvin_Voigt 性质的各向异性粘弹性波动力学进行研究,并给出详细地讨论•

1 各向异性 Kelvin_Voigt 模型及其本征化形式

对于最一般的各向异性固体,Kelvin_Voigt 粘弹性模型的应力_应变关系为

$$\sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon + \boldsymbol{D}\,\dot{\partial}_t\,\varepsilon, \tag{1}$$

这里,$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别是固体的弹性系数矩阵和粘性系数矩阵,$\dot{\partial}_t = \partial/\partial t$ 是对时间的一次微分算

* 收稿日期: 2002_10_22; 修订日期: 2004_03_08
作者简介: 郭少华(1960—),男,陕西西安人,教授,博士,副院长(Tel:+86_731_2655624;Fax:+86_731_5571736;E_mail:gsh@mail.csu.edu.cn).

子•

根据本征弹性的概念[9], 存在如下的弹性本征方程

$$(\boldsymbol{C}-\lambda_i\boldsymbol{I})\phi_i=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

它有六个实数本征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,6)$ (对不完全各向异性固体, 有重根存在) 和六个相应的本征矢• 前者称为本征弹性模量(Kelvin 模量), 它与几何坐标的选择无关; 后者称为力学表象空间, 它表征了固体的各向异性主方向• 因此, 弹性系数矩阵可以谱分解

$$\boldsymbol{C}=\Phi\Lambda\Phi^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

这里, Φ 为本征矢构成的模态矩阵, 是正交对称阵• Λ 是本征弹性矩阵, 是对角阵•

根据本征粘性的概念[7], 类似的粘性本征方程在同一力学表象空间中成立

$$(\boldsymbol{D}-d_i\boldsymbol{I})\phi_i=\boldsymbol{0}, \tag{4}$$

它同样有六个实数本征值 $d_i(i=1,2,\cdots,6)$, 称为本征阻尼• 它与同阶的本征弹性共处于同一个异性子空间中• 这样, 粘性系数矩阵可以在同一力学表象空间中谱分解

$$\boldsymbol{D}=\Phi\Pi\Phi^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

这里, Π 为本征粘性矩阵, 也是对角阵•

将(3)、(5)式代入(1)式, 两边同时左乘 Φ^{T}, 并利用模态矩阵的正交性质, 得

$$(\Phi^{\mathrm{T}}\sigma)=\Lambda(\Phi^{\mathrm{T}}\varepsilon)+\Pi\partial_t(\Phi^{\mathrm{T}}\varepsilon)• \tag{6}$$

定义模态应力和模态应变为[9]

$$\sigma^*=\Phi^{\mathrm{T}}\sigma, \tag{7}$$

$$\varepsilon^*=\Phi^{\mathrm{T}}\varepsilon, \tag{8}$$

这里, σ^* 和 ε^* 分别是力学表象空间中观察到的应力和应变• 方程(7)和(8)称为表象变换关系• 将它们代入方程(6)式, 得到力学表象空间下各向异性 Kelvin_Voigt 粘弹性本构方程

$$\sigma^*=\Lambda\varepsilon^*+\Pi\partial_t\varepsilon^*=(\Lambda+\Pi\partial_t)\varepsilon^*• \tag{9}$$

写成分量形式有

$$\sigma_i^*=\lambda_i\varepsilon_i^*+d_i\partial_t\varepsilon_i^*=(\lambda_i+d_i\partial_t)\varepsilon_i^*\qquad(i=1,2,\cdots,6)• \tag{10}$$

对一般各向异性体, 它们是六个独立的标量方程, 其形式与一维 Kelvin 模型方程一致•

2 广义 Stokes 波动方程

Stokes 方程是基于 Kelvin_Voigt 模型基础上的粘弹性波传播方程• 各向异性广义 Stokes 方程则应建立在模态 Kelvin_Voigt 模型的基础上•

在几何表象空间中, 忽略体力的经典运动方程可以写成矩阵形式[4]

$$\Delta\sigma=\rho\partial_{tt}\varepsilon, \tag{11}$$

这里, Δ 是对称的微分算子矩阵•

$$\Delta=\begin{bmatrix}\partial_{11} & 0 & 0 & 0 & \partial_{31} & \partial_{21}\\ & \partial_{22} & 0 & \partial_{32} & 0 & \partial_{21}\\ & & \partial_{33} & \partial_{32} & \partial_{31} & 0\\ & & & (\partial_{33}+\partial_{22}) & \partial_{21} & \partial_{31}\\ & & & & (\partial_{33}+\partial_{11}) & \partial_{32}\\ & & & & & (\partial_{22}+\partial_{11})\end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中, $\partial_{ij}=\partial_{ji}=\partial/\partial x_i\partial x_j$•

令 $\sigma=\beta\alpha\phi$, 其中 β 为待定的时间算子, α 为任意时空变量, ϕ 为待定矢量• 根据 Kelvin_Voigt 粘弹性模型(1)式, 如果 $\varepsilon=\alpha\phi$, 则必有

$$[(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\partial_t)-\beta\boldsymbol{I}]\phi=\boldsymbol{0}\bullet \tag{13}$$

由(13)式可知, β_i 和 ϕ_i 分别是Kelvin_Voigt粘弹性矩阵的本征值和本征矢量, 后者是各向异性子空间, 而前者由(10)式可得

$$\beta_i=\lambda_i+d_i\partial_t\qquad(i=1,2,\cdots,6)\bullet \tag{14}$$

这样, Kelvin_Voigt 粘弹性矩阵也能够写成谱分解形式

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\partial_t=\Phi\Sigma\Phi^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

这里, Σ 是本征粘弹性矩阵, 是对角阵, 其中元素由(14)式给定•

将应力矢 $\sigma=\beta\alpha\phi$ 和应变矢 $\varepsilon=\alpha\phi$ 代入运动方程(11)式, 得

$$\Delta(\alpha\phi)=\frac{\rho\partial_{tt}}{\beta}(\alpha\phi), \tag{16}$$

由此可见, 在粘弹性条件下, 运动方程的几何微分算子 Δ 也具有本征性质, 并满足下列的本征方程

$$(\Delta-\delta_i^*\boldsymbol{I})(\alpha\phi_i)=0, \tag{17}$$

将上式两边转置, 有

$$\alpha\phi^T(\Delta-\delta_i^*\boldsymbol{I})=0, \tag{18}$$

这里, α 不能为零, 否则为零响应• 因此有

$$\phi^T(\Delta-\delta_i^*\boldsymbol{I})=0\bullet \tag{19}$$

由此可见, $\delta_i^*=\rho\partial_{tt}/\beta_i$ 和 ϕ_i 分别是几何微分算子矩阵的本征值和本征矢量• 由于 ϕ 是各向异性子空间的基矢• 如果将几何微分算子投影到力学表象空间, 也能够得到谱分解的形式

$$\Delta=\Phi\Delta^*\Phi^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

这里, Δ^* 是本征几何微分算子矩阵, 称为应力算子矩阵, 是对角阵•

将(20)式代入运动方程(11)式, 并利用表象变换关系(7)、(8)式, 得

$$\Delta^*\sigma^*=\rho\partial_{tt}\varepsilon^*\bullet \tag{21}$$

写成分量形式, 有

$$\Delta_i^*\sigma_i^*=\rho\partial_{tt}\varepsilon_i^*\qquad(i=1,2,\cdots,6)\bullet \tag{22}$$

将模态Kelvin_Voigt方程(10)式代入上式, 则有

$$\Delta_i^*(\lambda_i+d_i\partial_t)\varepsilon_i^*=\rho\partial_{tt}\varepsilon_i^*\qquad(i=1,2,\cdots,6)\bullet \tag{23}$$

这就是以模态应变表示的各向异性广义 Stokes 方程• 它们也是六个独立的微分型标量方程•

3 具体应用

3.1 各向同性

各向同性有二个异性子空间, 其空间结构为[9]

$$W=W_1^{(1)}(\phi_1)\oplus\boldsymbol{W}_2^{(5)}(\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_5,\phi_6), \tag{24}$$

其中

$$\begin{cases}\phi_1=(\sqrt{3}/3)[1,1,1,0,0,0]^{\mathrm{T}}, & \phi_2=(\sqrt{2}/2)[0,1,-1,0,0,0]^{\mathrm{T}},\\ \phi_3=(\sqrt{6}/6)[2,-1,-1,0,0,0]^{\mathrm{T}}, & \phi_i=\zeta_i\qquad(i=4,5,6),\end{cases} \tag{25}$$

这里, ζ_i 是第 i 个元素为 1, 其余元素为零的列矢•

由应力算子定义式(10)和模态应变定义式(8), 计算得

$$\Delta_1^* = (\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33})/3 = \nabla^2/3, \tag{26}$$

$$\Delta_2^* = (\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33})/2 = \nabla^2/2, \tag{27}$$

$$\varepsilon_1^* = \sqrt{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3, \tag{28}$$

$$\varepsilon_2^* = \sqrt{3}\ \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}/3• \tag{29}$$

这里, ∇^2 为 Laplace 算子•

因此, 各向同性 Stokes 波动方程为

$$\nabla^2(\lambda_1 + d_1 \partial_t)\varepsilon_1^* = \rho \partial_{tt}\varepsilon_1^*, \tag{30}$$

$$\nabla^2(\lambda_2 + d_2 \partial_t)\varepsilon_2^* = \rho \partial_{tt}\varepsilon_2^*, \tag{31}$$

这里, $\lambda_{1,2}$ 和 $d_{1,2}$ 分别是各向同性弹性矩阵和粘性矩阵的一、二阶本征值• 其中 $\lambda_{1,2}$ 分别是体积模量和剪切模量•

于是, 得到结论: 各向同性介质中的粘弹性波有二个, 一个是膨胀波, 另一个是剪切波•

如果将经典 Stokes 波动方程和方程(30)、(31)式比较, 会发现它们仍有不同• 经典 Stokes 波动方程以几何量位移表达• 因此, 它不能显示各向同性介质中波传播的立体图像, 只能从其某一剖面大致看出波在不同方向上的传播特点• 而方程(30)、(31)式以力学量模态应变表示• 因此, 它能够显示出各向同性介质中波传播的立体图像•

3.2 横观各向同性

横观各向同性有四个异性子空间, 其空间结构为[9]

$$W = W_1^{(1)}(\phi_1) \oplus W_2^{(1)}(\phi_2) \oplus W_3^{(2)}(\phi_3, \phi_6) \oplus W_4^{(2)}(\phi_4, \phi_5), \tag{32}$$

其中

$$\begin{cases} \phi_{1,2} = \dfrac{c_{13}}{\sqrt{(\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12})^2 + 2c_{13}^2}}\left[1, 1, \dfrac{\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12}}{c_{13}}, 0, 0, 0\right]^{\mathrm{T}} \\ \phi_3 = (\sqrt{2}/2)[1, -1, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \\ \phi_4 = \zeta_i \qquad (i = 4, 5, 6); \end{cases} \tag{33}$$

这里,

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = (c_{11} + c_{12} + c_{33})/2 + \sqrt{[(c_{11} + c_{12} - c_{33})/2]^2 + 2c_{13}^2}, \\ \lambda_3 = c_{11} - c_{12}, \quad \lambda_4 = c_{44}• \end{cases} \tag{34}$$

应力算子和模态应变计算得

$$\Delta_{1,2}^* = \frac{c_{13}^2}{(\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12})^2 + 2c_{13}^2}\left[\partial_{11} + \partial_{22} + \left(\frac{\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12}}{c_{13}}\right)^2\partial_{33}\right], \tag{35}$$

$$\Delta_3^* = (\partial_{11} + \partial_{22})/3, \tag{36}$$

$$\Delta_4^* = (\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33})/2, \tag{37}$$

$$\varepsilon_{1,2}^* = \frac{c_{13}}{\sqrt{(\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12})^2 + 2c_{13}^2}}\left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \left(\frac{\lambda_{1,2} - c_{11} - c_{12}}{c_{13}}\right)\varepsilon_{33}\right], \tag{38}$$

$$\varepsilon_3^* = \sqrt{[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})/3]^2 + \varepsilon_{12}^2}, \tag{39}$$

$$\varepsilon_4^* = \sqrt{(\varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{31}^2)/2}• \tag{40}$$

因此, 横观各向同性广义 Stokes 方程为

$$\Delta_i^*(\lambda_i + d_i\partial_t)\varepsilon_i^* = \rho\partial_{tt}\varepsilon_i^* \quad (i = 1, 2, 3, 4)\cdot \tag{41}$$

于是, 得到结论: 横观各向同性介质中的粘弹性波有四个• 其中, 二个是膨胀波, 另二个是剪切波•

3.3 正交各向异性

正交各向异性的弹性矩阵是

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix}, \tag{42}$$

其中, $\boldsymbol{L}$ 为满阵, $\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(c_{44}, c_{55}, c_{66})$•

$$\begin{cases} \lambda_{1,2,3}\ \text{为}\ \boldsymbol{L}\ \text{阵的本征值}, \\ \lambda_4 = c_{44},\ \lambda_5 = c_{55},\ \lambda_6 = c_{66}, \end{cases} \tag{43}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \tag{44}$$

这里, $\boldsymbol{I}$ 为三阶单位阵, Ψ 为 $\boldsymbol{L}$ 阵的本征矢矩阵, $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \boldsymbol{I}$•

因此, 正交各向异性有六个异性子空间, 其空间结构为

$$W = \sum_{i=1}^{6} W_i^{(1)}(\phi_i)\cdot \tag{45}$$

由于三维正交各向异性较为复杂, 可以数值求解• 为了能够得到正交各向异性 Stokes 方程的分析式, 考虑平面正交各向异性问题•

平面正交各向异性有三个异性子空间, 其空间结构为

$$W = W_1^{(1)}(\phi_1) \oplus W_2^{(1)}(\phi_2) \oplus W_3^{(1)}(\phi_3), \tag{46}$$

其中

$$\begin{cases} \phi_{1,2} = \dfrac{c_{12}}{\sqrt{(\lambda_{1,2} - c_{11})^2 + c_{12}^2}}\left[\dfrac{\lambda_{1,2} - c_{11}}{c_{12}}, 1, 0\right]^{\mathrm{T}}, \\ \phi_3 = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}; \end{cases} \tag{47}$$

这里

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = (c_{11} + c_{12})/2 + \sqrt{[(c_{11} - c_{22})/2]^2 + c_{13}^2} \\ \lambda_3 = c_{33}\cdot \end{cases} \tag{48}$$

应力算子和模态应变计算得:

$$\Delta_1^* = \frac{c_{12}^2}{(\lambda_1 - c_{11})^2 + c_{12}^2}\left[\partial_{11}\left(\frac{\lambda_1 - c_{11}}{c_{12}}\right)^2 + \partial_{22}\right], \tag{49}$$

$$\Delta_2^* = \frac{c_{12}^2}{(\lambda_2 - c_{11})^2 + c_{12}^2}\left[\partial_{11} + \left(\frac{\lambda_2 - c_{11}}{c_{12}}\right)^2\partial_{22}\right], \tag{50}$$

$$\Delta_3^* = [\partial_{11} + \partial_{22}], \tag{51}$$

$$\varepsilon_1^* = \frac{c_{12}}{\sqrt{(\lambda_1 - c_{11})^2 + c_{12}^2}}\left[\left(\frac{\lambda_1 - c_{11}}{c_{12}}\right)\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right]\cdot \tag{52}$$

$$\varepsilon_2^* = \frac{c_{12}}{\sqrt{(\lambda_2 - c_{11})^2 + c_{12}^2}}\left[\varepsilon_{11} + \left(\frac{\lambda_2 - c_{11}}{c_{12}}\right)\varepsilon_{22}\right], \tag{53}$$

$$\varepsilon_3^* = \varepsilon_{12}\cdot \tag{54}$$

因此, 平面正交各向异性广义 Stokes 方程为

$$\Delta_i^*(\lambda_i + d_i \cdot\cdot_t)\,\varepsilon_i^* = \rho \cdot\cdot_{tt}\,\varepsilon_i^* \qquad (i = 1, 2, 3)\cdot \tag{55}$$

于是, 得到结论: 平面正交各向异性介质中的粘弹性波有三个• 其中, 二个是膨胀波, 一个是剪切波•

对其它几类各向异性的粘弹性波动方程, 可以采用相同的方法得到•

[参 考 文 献]

[1] 瑞克 N H. 粘弹性介质中的地震波[M]. 许云 译. 北京: 地质出版社, 1981.

[2] Crampin S. An introduction to wave propagation in anisotropic media[J]. Geophys J R Astr Soc, 1984, **76**(1): 17—28.

[3] GUO Shao_hua. Eigen theory of elastic dynamics for anisotropic solids[J]. Trans Nonferrous Met Soc China, 1999, **9**(2): 327—331.

[4] GUO Shao_hua. Eigen theory of elastic mechanics for anisotropic solids[J]. Trans Nonferrous Met Soc China, 2000, **10**(2): 217—219.

[5] GUO Shao_hua. The operationalized principle of elastic mechanics[J]. Trans Nonferrous Met Soc China, 2000, **10**(6): 709—711.

[6] GUO Shao_hua. Eigen elastic mechanics and its variation principle[J]. Trans Nonferrous Met Soc China, 2001, **11**(2): 283—287.

[7] GUO Shao_hua. Eigen theory of viscoelastic mechanics for anisotropic solids[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2001, **14**(1): 74—80.

[8] 郭少华. 各向异性内摩擦材料强度准则的规范空间理论[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(3): 340—343.

[9] 陈绍汀. 弹性力学的几个新概念及其一种应用[J]. 力学学报, 1984, **16**(3): 259—274.

Eigen Theory of Viscoelastic Dynamics Based on the Kelvin_Voigt Model

GUO Shao_hua

(School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410083, P.R.China)

Abstract: Using the eigen theory of solid mechanics, the eigen properties of anisotropic viscoelastic bodies with Kelvin_Voigt model were studied, and the generalized Stokes equation of anisotropic viscoelastic dynamics was obtained, which gives the three_dimensional pattern of viscoelastical waves. The laws of viscoelastical waves of different anisotropical bodies were discussed. Several new conclusiones are given.

Key words: anisotropy; viscoelasticity; wave equation; eigen theory