应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

共振情况下非自治系统的Hopf分叉*

程崇庆　季文美

（西北工业大学，1987年5月14日收到）

摘　要

本文研究了共振情况下非自治系统的 Hopf 分叉问题，得到了和非共振情况下 Hopf 分叉相类似的结果。

（一）

本文研究如下方程零解的分叉问题：

$$\dot{x}=A(\mu)x+F(t,x,\mu) \tag{1.1}$$

其中$x\in R^2$，$F=O(\|x\|^2)$，关于t为2π周期。在研究微分方程周期解的分叉情况时，如果分叉发生在二维中心流形上，我们便可得到上述方程。

文献[1]研究了方程（1.1）在非共振情况下的分叉情况，得到了与经典 Hopf 分叉平行的结果。文献[3]则对受外加激励的 Hopf 分叉作了研究。本文对方程（1.1）在共振情况下的分叉问题做了研究，得到了比非共振情况复杂的结果。

（二）

对方程（1.1）作一些假设：

1．$A(\mu)$的特征值为$\lambda(\mu)$，$\bar{\lambda}(\mu)$；其中$\lambda(\mu)=\alpha_0(\mu)+i\omega(\mu)$，$\alpha_0(0)=0$，$\omega(0)\neq 0$。

2．$F(t,x,\mu)$在区域$(-\infty,\infty)\times D\times(-\mu_0,\mu_0)$上解析，$F(\cdot,x,\cdot)=O(\|x\|^2)$，$F(t,\cdot,\cdot)=F(t+2\pi,\cdot,\cdot)$，$D\subset R^2$，$(0,0)\in\operatorname{int}D$。

引理1　用适当的变量代换，可把方程（1.1）变换成为如下复平面上的方程：

$$\dot{y}=\lambda(\mu)y+yP(y\bar{y},\lambda)+Q(t,y,\bar{y},\lambda)+Y(t,y,\bar{y},\mu) \tag{2.1}$$

其中

$$P(y\bar{y},\mu)=\sum_{l=1}^{N}p_l(\mu)(y\bar{y})^l \qquad (p_l=a_l+i\beta_l)$$

* 朱照宣推荐。

$$Q(t,y,\bar{y},\mu)=\sum_{\substack{k+l=2N+1\\(k-l-1)\omega(0)=m}}\sigma_{kl}\exp[i(\varphi_{kl}-mt)]y^k\bar{y}^l$$

$$Y(t,y,\bar{y},\mu)=O(\|y\|^{2N+2})$$

证明 不失一般性，我们可以假设（1.1）式具有如下形式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\alpha_0(\mu)x_1-\omega(\mu)x_2+f_1(t,x_1,x_2,\mu)\\\dot{x}_2=\omega(\mu)x_1+\alpha_0(\mu)x_2+f_2(t,x_1,x_2,\mu)\end{cases}\tag{2.2}$$

令$z=x_1+ix_2$，(2.2)式等价于下列方程：

$$\dot{z}=\lambda(\mu)z+Z(t,z,\bar{z},\mu)\tag{2.3}$$

引入 Poincare 变换代换：

$$z=y+\sum_{k+l\leqslant 2N+1}\psi_{kl}(t,\mu)y^k\bar{y}^l=y+\Phi(t,y,\bar{y},\mu)\tag{2.4}$$

其中ψ_{kl}待定，关于t为2π周期。假设（2.3）式经变换（2.4）后成为（2.1）式，对(2.4)式两端求导，我们可得：

$$\begin{aligned}&\sum\dot{\psi}_{kl}y^k\bar{y}^l+\sum(k\lambda+l\bar{\lambda}-\lambda)\psi_{kl}y^k\bar{y}^l\\&=-y\sum p_l(y\bar{y})^l-\sum\sigma_{kl}\exp[i(\varphi_{kl}-mt)]y^k\bar{y}^l+Z(t,y+\Phi,\bar{y}+\bar{\Phi})\\&\quad-(yP+Q)\Phi'_y-(\bar{y}\bar{P}+\bar{Q})\Phi'_{\bar{y}}-Y-Y\Phi'_y-\bar{Y}\Phi'_{\bar{y}}\end{aligned}$$

比较两边 $y^k\bar{y}^l(2\leqslant k+l\leqslant 2N+1)$，我们可得：

$$\dot{\psi}_{kl}+(k\lambda+l\bar{\lambda}-\lambda)\psi_{kl}=\Delta_{kl}+\xi_{kl}(t)\tag{2.5}$$

其中

$$\Delta_{kl}=\begin{cases}0 & ((k-l-1)\omega(0)\neq m,\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots)\\-p_l & (k=l+1)\\-\sigma_{kl}\exp[i(\varphi_{kl}-mt)] & ((k-l-1)\omega(0)=m,\ m\neq 0)\end{cases}$$

$\xi_{kl}(t)$只依赖于Z的相应 Taylor 展式的系数以及那些$\psi_{k'l'}$，$\sigma_{k'l'}\exp[i(\varphi_{k'l'}-m't)]$ $(k'+l'<k+l)$和$p_{l'}(2l'<k+l)$。

如果Δ_{kl}满足第一个条件，(2.5)式是非共振的，因而当然有2π周期解。在第二条件下，我们取

$$p_l=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_{kl}(t)dt$$

既然右端是一个平均值为零的周期函数，当μ在0附近时，(2.5)也有2π 周期解。在第三条件下，如果让

$$\sigma_{kl}\exp[i\varphi_{kl}]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_{kl}(t)\exp[imt]dt$$

这表示能够引起共振的频率分量已被去除，因不难证明以如上方式得到的$\psi_{kl}(t,\mu)$是解析的。 □

在（2.1）式中，阶次低于$2N+2$的有关项仍然与t有关，这不利于分析，我们应该作进一步化简。取

$$y=w\exp[i\omega(0)t]$$

如果$(k-l-1)\omega(0)=m$，那么

$$\exp(-imt)y^k\bar{y}^l=w^k\bar{w}^l\exp[i\omega(0)t]$$

根据（21.1）式，可得：

$$\begin{aligned}\dot{w}=&(\lambda(\mu)-i\omega(0))w+wP(w\bar{w},\mu)\\&+Q(0,w,\bar{w},\mu)+Y(t,w,\bar{w},\mu)\end{aligned}$$

取极坐标

$$w=r\exp[i\varphi]$$

$$\begin{cases}\dot{r}=\sum\limits_{j\leqslant 2N+2}\left(\sum\limits_{(k-l-1)\omega=m}\sigma_{kl}\cos\left(\dfrac{m}{\omega}\varphi+\varphi_{kl}\right)\right)r^j\\ \qquad+\sum\limits_{l=0}^{N}\alpha_l r^{2l+1}+R(t,r,\varphi,\mu)\\ \dot{\varphi}=\sum\limits_{j<2N+2}\left(\sum\limits_{(k-l-1)\omega=m}\sigma_{kl}\sin\left(\dfrac{m}{\omega}\varphi+\varphi_{kl}\right)\right)r^{j-1}\\ \qquad+\omega(\mu)-\omega(0)+\sum\limits_{l=0}^{N}\beta_l r^{2l}+\Phi(t,r,\varphi,\mu)\end{cases}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}R(t,r,\varphi,\mu)=O(r^{2N+3})\\ \Phi(t,\dot{r},\varphi,\mu)=O(r^{2N+2})\end{aligned}\right\}\qquad(2.6)$$

方便于讨论起见，我们将（2.6）式分为两种情况加以研究：第一种情况是存在$r_0>0$，$\dot{\varphi}(r,\varphi)$定正（定负）（$r<r_0$）；第二种情况是$\dot{\varphi}$在原点的邻域内变号。当然这两种情况的区分都是当$\mu=0$。本文中我们始终假设当$\mu=0$时原点是渐近稳定的，而当$\mu>0$时失稳。

（三）

本节研究第一种类型的分叉问题，并假设$\beta_1(0)>0$，对于$\beta_1(0)<0$，研究方法类似。

我们把（2.6）式重新写成关于r的幂级数形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}=&\sum_{j=1}^{2N+1}R_j(\varphi,\mu)r^j+r^{2N+2}R(t,r,\varphi,\mu)\\ \dot{\varphi}=&\omega(\mu)-\omega(0)+\sum_{j=1}^{2N}\Phi_j(\varphi,\mu)r^j+r^{2N+1}\Phi(t,r,\varphi,\mu)\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

当然，$\sigma_{kl}(0)=0\quad(k+l=2)$

引理 2　如果$\omega(\mu)\equiv\omega(0)$，$\sigma_{kl}(\mu)\equiv 0$（$k+l=2$），存在一个解析的变量代换$T_\mu$

$$T_\mu:\ \begin{cases}\rho=\rho(r,\varphi,\mu)\\ \theta=\theta(\varphi,\mu)\end{cases}$$

其中ρ，θ关于φ均为2π周期，$\theta(0,\mu)=0$，$\theta(2\pi,\mu)=2\pi$。以及$r_0>0$，当$r<r_0$时，（3.1）式可变换成如下形式：

（a）　如果$\alpha_0(\mu)\neq 0$（$\mu>0$），$\operatorname{avg}\left(\dfrac{R_3(\varphi,0)}{\Phi_2(\varphi,0)}\right)=0$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\sum_{j=1}^{2N+1}P_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+2}P(t,\rho,\theta,\mu)\\ \dot{\theta}&=\sum_{j=2}^{2N}\Theta_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+1}\Theta(t,\rho,\theta,\mu)\end{aligned}\right\}\tag{3.2a}$$

其中
$$P_1(\theta,\mu)=\alpha_0(\mu)$$
$$P_j(\theta,0)=0\qquad (j\leqslant 2q)$$
$$P_{2q+1}(\theta,0)=\tilde{\alpha}_q$$
$$\Theta_2(\theta,\mu)=\tilde{\beta}_1=2\pi\Big/\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\Phi_2(\varphi,\mu)}$$

（b） 如果$\alpha_0(\mu)\equiv 0$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\exp 2\tilde{R}_3(\theta,\mu)\sum_{j\geqslant 2p+1}^{2N+1}P_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+2}P(t,\rho,\theta,\mu)\\ \dot{\theta}&=\sum_{j\geqslant 2}^{2N}\Theta_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+1}\Theta(t,\rho,\theta,\mu)\end{aligned}\right\}\tag{3.2b}$$

其中

$$\tilde{R}_3(\theta,\ \mu)=\frac{1}{\tilde{\beta}_1}\int_0^{\varphi(\theta)}\frac{1}{\Phi_2(\varphi)}\left[R_3(\varphi,\mu)-\tilde{\beta}_1\operatorname{avg}\left(\frac{R_3(\varphi,\mu)}{\Phi_2(\varphi,\ \mu)}\right)\right]d\varphi$$
$$P_{2p+1}(\theta,\mu)=\tilde{\alpha}_p(\mu)\qquad(\tilde{\alpha}_p(0)=0)$$
$$\Theta_2(\theta,\mu)=\tilde{\beta}_1\exp[2\tilde{R}_3(\theta,\mu)]$$

其余各项的意义和（3.2a）中一样。

（c） 如果$\alpha_0(\mu)\neq 0$ $(\mu\neq 0)$，$\operatorname{avg}\left(\frac{R_3(\varphi,0)}{\Phi_2(\varphi,0)}\right)\neq 0$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\alpha_0(\mu)\rho+\tilde{\beta}_1(\mu)\operatorname{avg}\left(\frac{R_3(\varphi,\mu)}{\Phi_2(\varphi,\mu)}\right)\exp 2\tilde{R}_3(\theta,\ \mu)\rho^3\\ &\quad+\sum_{j\geqslant 4}^{2N+1}P_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+2}P(t,\rho,\theta,\mu)\\ \dot{\theta}&=\tilde{\beta}_1(\mu)\exp 2\tilde{R}_3(\theta,\ \mu)\rho^2+\sum_{j\geqslant 3}^{2N}\Theta_j(\theta,\mu)\rho^j+\rho^{2N+1}\Theta(t,\rho,\theta,\mu)\end{aligned}\right\}\tag{3.2c}$$

证明 引进如下变量代换T_θ，T_3，$T_j(j\geqslant 4)$，T_ψ

$$T_\theta\quad\begin{cases}r=r\\ \theta=\tilde{\beta}_1(\mu)\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Phi_2(\varphi,\mu)}\end{cases}$$

显然T_θ定义了一个函数关系 $\theta=\theta(\varphi)$，$\theta(0)=0$，$\theta(2\pi)=2\pi$，$d\theta/d\varphi>0$．因而具有反函数．

$$T_3\quad\begin{cases}\rho=r\exp(-\tilde{R}_3(\theta,\mu))\\ \theta=\theta\end{cases}$$

$$T_j\quad\begin{cases}\rho=\dfrac{r}{(1+\widetilde{P}_j(\theta,\mu)r^{j-3})^{\frac{1}{j-3}}} & (j\geqslant 4)\\ \theta=\theta\end{cases}$$

其中

$$\widetilde{P}_j(\theta,\mu)=(j-3)\int_0^\theta\left(\frac{P_j(\theta,\mu)}{\widetilde{\beta}_1(\mu)\exp 2\widetilde{R}_3(\theta,\mu)}-\operatorname{avg}\left[\frac{P_j(\theta,\mu)}{\widetilde{\beta}_1(\mu)\exp 2\widetilde{R}_3(\theta,\mu)}\right]\right)d\theta$$

T_ψ的形式和T_θ一样。对于情况(c)，取$T_\mu=T_3\circ T_\theta$；对于情况（b)，取$T_\mu=T_{2q+1}\circ\cdots\circ T_3\circ T_\theta$ $(q>1)$；对于情况(a)，取$T_\mu=T_{2q+1}\circ\cdots\circ T_\psi\circ T_3\circ T_\theta(q>1)$。既然$T_\mu$是有限个$T_j$与$T_\theta$,$T_\psi$的复合，所以总可以找到$r_0>0$，当$r<r_0$，$T_\mu$满足我们的要求.$T_\mu$的解析性是容易验证的。 □

根据本文对原点的稳定性假设，总存在$q\geqslant 1$，使得 $\alpha_q(0)<0$。

定理 1 如果$\omega(0)\neq 0$，$\frac{1}{3}\left(\bmod\frac{1}{3}\right)$，$\frac{d\omega(0)}{d\mu}=0$，$\widetilde{\alpha}_p'=\frac{d\widetilde{\alpha}_p}{d\mu}>0$，当$\mu>0$ 充分小时，(3.1) 式从原点分叉出一个渐近稳定的，关于其2π周期 Poincare 映射的不变圈。

证明 由于$\omega(0)\neq 0$，$\frac{1}{3}\left(\bmod\frac{1}{3}\right)$，$\sigma_{kl}(\mu)=0$ $(k+l=2)$。分如下三部分证明：

(a) $p=0$，$q>1$

根据（3.2a）式容易验证存在一个正数M，在圆

$$\rho=\left(-\frac{\widetilde{\alpha}_p(\mu)}{\widetilde{\alpha}_q(\mu)}\right)^{\frac{1}{2d}}(1+M\mu^{\frac{1}{2d}})\qquad(d=q-p)$$

上，$\dot{\rho}$ 是定负的，而在圆

$$\rho=\left(-\frac{\widetilde{\alpha}_p(\mu)}{\widetilde{\alpha}_q(\mu)}\right)^{\frac{1}{2d}}(1-M\mu^{\frac{1}{2d}})$$

上，$\dot{\rho}$是定正的。根据 Bendixson 定理，方程（3.2）的自治近似方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=\sum_{j=1}^{2N+1}P_j(\theta,\mu)\rho^j\\ \dot{\theta}&=\sum_{j=0}^{2N}\Theta_j(\theta,\mu)\rho^j\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

具有一个渐近稳定的极限环 $\rho=\rho_0(\theta,\mu)$

$$\rho_0(\theta,\mu)=\left(-\frac{\widetilde{\alpha}_p(\mu)}{\widetilde{\alpha}_q(\mu)}\right)^{\frac{1}{2d}}(1+\mu^{\frac{1}{2d}}\rho_1(\theta,\mu))$$

选择变量代换

$$\rho=\rho_0(\theta,\mu)(1+\mu^s x)\qquad\left(s=\frac{2q+1}{2d}\right)$$

令$N=2q$，注意到$\rho_0(\theta,\mu)$是（3.3）式的解，我们可从（3.2）式导得（3.4）式：

$$\begin{cases}\dot{x}=(\sum(j-1)P_j(\theta,\mu)\rho_0^{j-1}(\theta,\mu))x+\mu^s X(t,x,\theta,\mu)\\ \dot{\theta}=\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)+\mu^s\Theta(t,x,\theta,\mu)\end{cases}\tag{3.4}$$

定义

$$\hat{R}(\theta,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta\frac{\sum(j-1)P_j(\theta,\mu)\rho_0^{j-1}(\theta,\mu)}{\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)}d\theta$$

取代换

$$\left\{\begin{aligned} &x=y\exp(\hat{R}(\theta,\mu)-\hat{\alpha}_0(\mu)) \\ &\psi=\frac{2\pi}{\hat{\beta}_0(\mu)}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)} \end{aligned}\right.$$

其中 $\hat{\alpha}_0(\mu)=\hat{R}(2\pi,\mu)$, $\hat{\beta}_0(\mu)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)}$

注意到$d\psi/d\theta>0$，$\psi(0,\mu)=0$，$\psi(2\pi,\mu)=2\pi$，存在反函数$\theta=\theta^{-1}(\psi)$。正如上代换之下，(3.4)式被变换成为如下形式：

$$\dot{y}=\hat{\alpha}_0 y+\mu^s Y(t,y,\bar{y},\mu),\quad \dot{\psi}=\hat{\beta}_0+\mu^s\Psi(t,y,\bar{y},\mu) \tag{3.5}$$

既然$\rho_0(\theta,\mu)$是(3.3)式的解，所以

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sum P_j(\theta,\mu)\rho_0^{j-1}(\theta,\mu)}{\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)}d\theta=0$$

因此

$$\hat{\alpha}_0(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2q\tilde{\alpha}_q(\mu)+o(\mu^{\frac{1}{2d}}))\rho_0^{2q}(\theta,\mu)}{\sum\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)}d\theta$$

根据本节的假设以及$\tilde{\alpha}_q(0)<0$，显然有

$$-M<\lim\frac{\hat{\alpha}_0(\mu)}{\mu^{(q-1)/d}}<-m<0$$

根据 Hale 积分流形定理[2]，(3.5)式有一个渐近稳定解$y(t,\psi)$ $((t,\psi)\in T^2)$。

(b) $p>0$

与情况(a)类似，我们可导出如下方程：

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{x}=\left(\exp 2\tilde{R}_3\sum_{j\geq 2p+1}^{2N+2}(j-1)P_j(\theta,\mu)\rho_0^{j-1}(\theta,\mu)\right)x+\mu^s X(t,x,\theta,\mu) \\ &\dot{\theta}=\exp 2\tilde{R}_3\sum_{j\geq 2}\Theta_j(\theta,\mu)\rho_0^j(\theta,\mu)+\mu^s\Theta(t,x,\theta,\mu) \end{aligned}\right.$$

由于$\exp 2\tilde{R}_3>0$，证明与(a)类似。

(c) $p=0$，$q=1$

根据(3.2c)，在圆

$$\rho^2=\frac{1}{2}\frac{\alpha_0(\mu)}{\max\left(\exp(2\tilde{R}_3)\operatorname{avg}\left(\frac{R_3}{\Phi_2}\right)\tilde{\beta}_1(\mu)\right)}$$

上，$\dot{\rho}$定正，而在圆

$$\rho^2=\frac{2\alpha_0(\mu)}{\min\left(\exp(2\tilde{R}_3)\operatorname{avg}\left(\frac{R_3}{\Phi_2}\right)\tilde{\beta}_1(\mu)\right)}$$

上，$\dot{\rho}$定负，因此(3.3)有一个稳定的极限环，并且有

$$0<m<\frac{\rho_0(\theta,\mu)}{\mu^{1/2}}<M$$

其余证明与情况(a)一样。 □

(四)

本节研究第二类情况下方程（2.6）的分叉问题，并且假设$\omega(0)=0,\frac{1}{2}\pmod 1$，第一共振项非零（$\mu=0$）。根据（2.6）式，这意味着$\sigma_{0l}(0)\neq 0$（$-(l+1)\omega(0)=n$，$\omega(0)=n/m$ $(n,m)=1$）。当$\mu=0$时，(2.6)式的自治近似式为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=\sigma_{0l}\cos((l+1)\varphi)r^l+\alpha_q r^{2q+1}+O(r^{l+1})\\ \dot{\varphi}&=-\sigma_{0l}\sin((l+1)\varphi)r^{l-1}+\beta_q r^{2q}+O(r^l)\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

不失一般性，我们设$\sigma_{0l}=1$。由于$\mu=0$时原点渐近稳定，所以有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&|\beta_q|<1,\ -\alpha_q>\sqrt{1-\beta_q^2} \qquad (2q+1=l)\\ &\beta_q=0,\ \alpha_q<1 \qquad\qquad\quad (2q+1<l)\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

在$-\alpha_q=\sqrt{1-\beta_q^2}$的临界情况下，原点的稳定性要由高阶项来决定，本文不考虑这种临界情况。

既然当$\mu>0$时，原点失稳，必然存在$\alpha_p(\mu)>0$（$p<q$），同时在$\dot{\varphi}$的右端也将出现一些低阶项。这里我们假设只要$\alpha_p(\mu)$，$\beta_s(\mu)\neq 0$($p<q$，$s<q$)，就有$\alpha_p'(0)\neq 0$，$\beta_s'(0)\neq 0$。因而我们只需研究下列方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=\alpha_p(\mu)r^{2p+1}+\alpha_q(\mu)r^{2q+1}+\cos((l+1)\varphi)r^l\\ \dot{\varphi}&=\beta_s(\mu)r^{2s}+\beta_q(\mu)r^{2q}-\sin((l+1)\varphi)r^{l-1}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

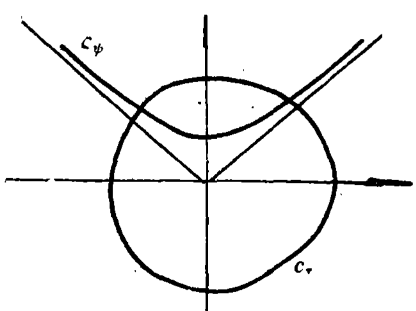
显然当$2q+1<l$时的分叉情况的分析要比$2q+1=l$的分析简单，因此我们假设$2q+1=l$。

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=\alpha_p(\mu)r^{2p+1}+(\alpha_q+\cos 2(q+1)\varphi)r^{2q+1}\\ \dot{\varphi}&=\beta_s(\mu)r^{2s}+(\beta_q-\sin 2(q+1)\varphi)r^{2q}\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

首先我们研究$s>p$的情况，设$\beta_q(0)>0$，令

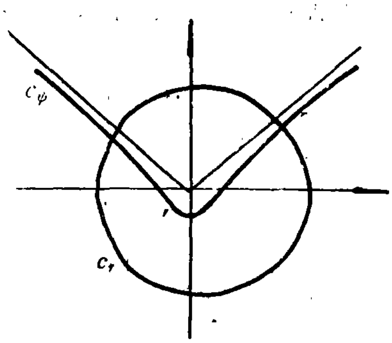
$$\left.\begin{aligned}R(\psi,r)&=\alpha_p r^{2p+1}+(\alpha_q+\cos\psi)r^{2q+1}=0\\ \Phi(\psi,r)&=\beta_s r^{2s}+(\beta_q-\sin\psi)r^{2q}=0\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

$R(\psi,r)=0$决定了一条曲线c_r，$\Phi(\psi,r)=0$决定了一条曲线c_ψ，它们的形状及相互位置关系如图所示：



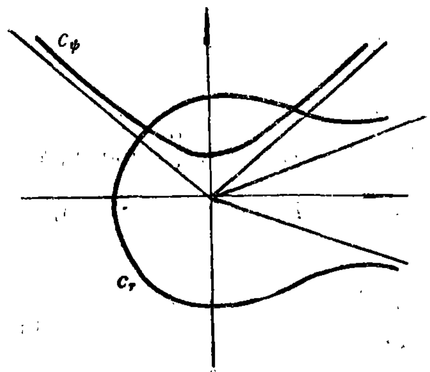
$\beta_s>0,|\alpha_q|>1$

图 1



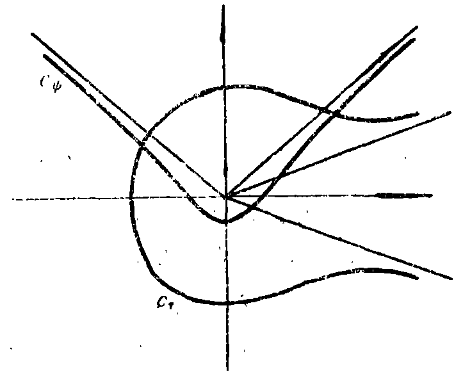
$\beta_s<0,|\alpha_q|>1$

图 2



$\beta_s>0,|\alpha_q|<1$

图 3



$\beta_s<0,|\alpha_q|<1$

图 4

c_ψ有两条渐近线$\beta_q=\sin\psi$，如果$|\alpha_q|<1$，c_r也有两条渐近线，它们在$|\alpha_q|=1$时重合。当$|\alpha_q|>1$时，c_r是一条闭曲线。

既然$s>p$，$\alpha_p(\mu)\sim\mu$，$\beta_s(\mu)\sim\mu$，c_r与c_ψ有两个交叉点，这表示（4.4）式有$4(q+1)$个奇点。为了与曲线c_ψ相交，在交叉点上c_r必须满足下列关系：

$$\beta_q-\sin 2(q+1)\varphi\sim\mu^{\frac{s-p}{q-p}}$$

这表示交叉点必须非常接近c_ψ的渐近线。从以上这些性质，我们可以推得在$2(q+1)$个奇点上：

$$\det\left(\frac{\partial(\dot r,\dot\varphi)}{\partial(r,\varphi)}\right)\bigg|_s>0$$

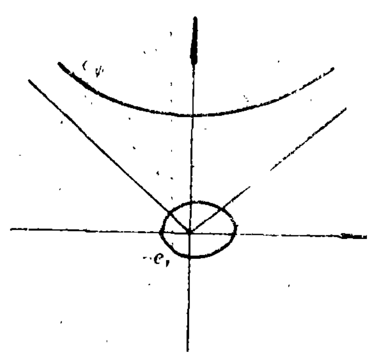
$$\operatorname{trace}\left(\frac{\partial(\dot r,\dot\varphi)}{\partial(r,\varphi)}\right)\bigg|_s<0$$

在另外$2(q+1)$个奇点上

$$\det\left(\frac{\partial(\dot r,\dot\varphi)}{\partial(r,\varphi)}\right)\bigg|_u<0$$

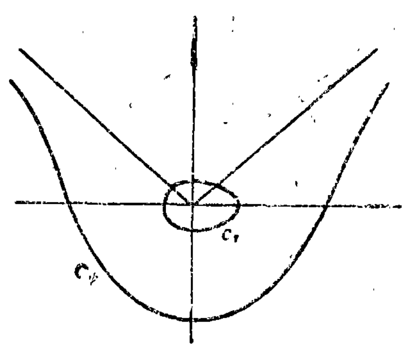
因此存在$2(q+1)$个线性近似渐近稳定与$2(q+1)$个鞍点。在稳定奇点处导算子的迹$\sim\mu^{\frac{s}{q-p}}$，根据隐函数定理，我们容易看出原点失稳后分叉出$4(q+1)$个非零奇点，一半渐近稳定，另一半是不稳定的。

现在研究情况$s<p$。c_r和c_ψ的形状及相互位置如图所示：



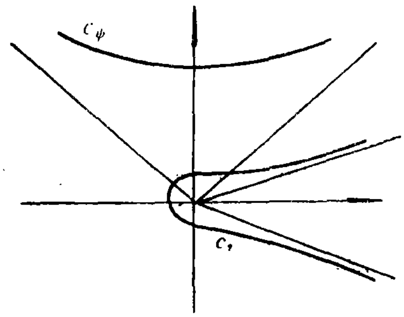
$\beta_s>0,|\alpha_q|>1$

图 5



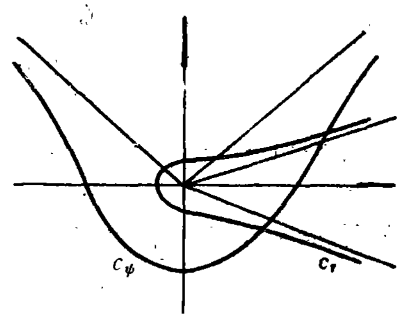
$\beta_s<0,|\alpha_q|>1$

图 6



$\beta_s>0$, $|\alpha_q|<1$

图 7



$\beta_s<0$, $|\alpha_q|<1$

图 8

（1） $\beta_s<0$，$|\alpha_q|<1$（见图8），存在$4(q+1)$奇点，与上面的研究类似，$2(q+1)$个奇点渐近稳定，$2(q+1)$个不稳定．

（2） 其它三种情况（见图5～7），不存在非奇点．如图9所示，我们可以构造一个闭曲线，使得方程（4.4）的轨线均从外部流向闭曲线内部．在$\dot r$为正的区域内选取（4.4）的轨线，用两段圆弧将其与c_ψ联结．这样的闭曲线是合乎要求的．根据 Bendixson 定理，存在稳定极限环$r_1(\varphi,\mu)$．

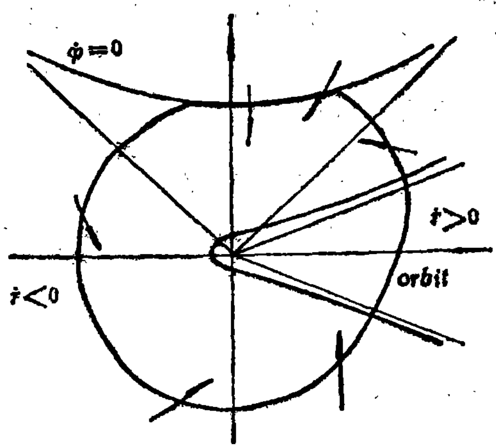


图 9

选取变量代换 $r=r_1(\varphi,\mu)(1+\mu^s\rho)$

$$\left\{\begin{aligned}\dot\rho=&(2p\alpha_p r_1^{2p}(\varphi,\mu)+2q(\alpha_q+\cos2(q+1)\varphi)\\&\cdot r_1^{2q}(\varphi,\mu))\rho+\mu^s P(\rho,\varphi,\mu)\\\dot\varphi=&\beta_s r_1^{2s}(\varphi,\mu)+(\beta_q-\sin2(q+1)\varphi)\\&\cdot r_1^{2q}(\varphi,\mu)+\mu^s\Phi(\rho,\varphi,\mu)\end{aligned}\right.$$

由于

$$\int_0^{2\pi}\frac{\alpha_p r_1^{2p}(\varphi,\mu)+(\alpha_q+\cos2(q+1)\varphi)r_1^{2q}(\varphi,\mu)}{\beta_s r_1^{2s}(\varphi,\mu)+(\beta_q-\sin2(q+1)\varphi)r_1^{2q}(\varphi,\mu)}\,d\varphi=\int_{r(0)}^{r(2\pi)}\frac{dr}{r}=0$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{2p\alpha_p r_1^{2p}+2q(\alpha_q+\cos 2(q+1)\varphi r_1^{2q}}{\beta_s r_1^{2s}+(\beta_q-\sin 2(q+1)\varphi)r_1^{2q}}d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-2(q-p)\alpha_p r_1^{2p}(\varphi,\mu)}{\beta_s r_1^{2s}+(\beta_q-\sin 2(q+1)\varphi)r_1^{2q}}d\varphi<0$$

运用与证明定理1的同样方法可证得，从原点分叉出一个关于 Poincaré 映射的渐 近稳定不变圈。

最后研究$s=p$，只要下列方程有实解，c_ψ与c_r就有交点：

$$\frac{\beta_p}{\beta_q-\sin\psi}=\frac{\alpha_p}{\alpha_q+\cos\psi}$$

即

$$\sin(\psi+\psi_0)=\frac{\alpha_p\beta_q-\beta_p\alpha_q}{\sqrt{\alpha_p^2+\beta_p^2}}$$

其中

$$\tan\psi_0=\frac{\beta_p}{\alpha_p}$$

$$\frac{|\alpha_p\beta_q-\beta_p\alpha_q|}{\sqrt{\alpha_p^2+\beta_p^2}}\begin{cases}<1 & \text{两个实解}\\ =1 & \text{一个实解}\\ >1 & \text{没有实解}\end{cases}$$

如果（4.6）有两个实解，由于

$$\det\left(\frac{\partial(\dot r,\dot\varphi)}{\partial(r,\varphi)}\right)=4(q-p)(q+1)\cos(2(q+1)\varphi+\psi_0)r^{4q}$$

不难验证存在$2(q+1)$个非零渐近稳定点，$2(q+1)$个鞍点，如果（4.6）没有实解，与$s<p$的情况一样，从原点分叉出一个关于 Poincaré 映射渐近稳定的不变圈。

参 考 文 献

[1] 钱敏等，非自治系统的不变圈（解流形）分支，数学学报，26 (1983).

[2] Hale, J. K., Integral manifolds of perturbed differential systems, *Ann. Math.*, 73 (1963).

[3] Gambaudo, J. A., Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing, *J. Diff. Eqns.*, 57 (1985).

Hopf Bifurcations of Nonautonomous Systems at Resonance

Cheng Chong-qing Ji Wen-mei

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Abstract

In this paper, Hopf bifurcations of nonautonomous systems at resonance are studied and similar results are obtained.