

# 经过修正的层流流动的流动稳定性问题 (Ⅲ)——经过修正的平行剪切流的 非线性稳定性研究\*

周 哲 玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年12月4日收到)

## 摘 要

本文根据文[1]给出的经过修正的层流流动的流动稳定性理论及平行剪切流中平均速度的一类修正剖面, 研究了平行剪切流的非线性稳定性性质, 并在本文的假设下, 把背景湍流噪声的干扰引入了流动稳定性计算, 对于平面Poiseuille流动和圆管Poiseuille流动, 得到了与实验趋势相一致的结果。

## 一、引 言

本文研究经过修正的平行剪切流的非线性稳定性性质。所谓扰动的非线性性质包括以下几个方面:

1. 扰动的非线性作用对平均流动产生扭曲;
2. 非线性作用使扰动产生各次谐波, 且基波模态也受到非线性作用的修正;
3. 扰动的波速和其他参数都将受到非线性作用的影响;

4. 不稳定扰动的增长必须有所限制, 不能无限增长下去。Stuart, Watson (1960)<sup>[8]</sup>提出的展开方法, 考虑到了以上的各个方面, 但这种理论只能在偏离中性不远的情况下适用, 因为它要求扰动的线性衰减率(或增长率) $ac_i$ 是一小量。在平面Poiseuille流动情况下, 由于存在中性曲线( $c_i=0$ ), 在中性曲线附近总可以使 $ac_i$ 为任意小。而在圆管Poiseuille流和平面Couette流中却不存在这样的中性曲线, 从而使这种理论的应用产生困难。此后, Reynolds和Potter(1967)<sup>[4]</sup>, Itoh(1974)<sup>[5]</sup>等发展了不同的算法, 将Stuart-Watson理论应用于各种不同的具体问题。其中, 将Reynolds和Potter的方法应用于圆管Poiseuille流动(Davey和Nguyen(1971)<sup>[6]</sup>)和平面Couette流动(Ellingsen(1970)<sup>[7]</sup> et al.)都得到了扰动振幅的门槛值, 但将Itoh的方法用于圆管Poiseuille流, 得到的结果却与Davey相反。Patera和Orszag

\* 蔡树棠推荐。

(1981)<sup>[8]</sup>对圆管Poiseuille流轴对称扰动直接用契贝谢夫多项式展开法进行数值模拟,得到衰减的结果,因此认为对于圆管Poiseuille流动, Reynolds和Potter的方法是无效的。

我们认为,周恒(1982)<sup>[9]</sup>提出的人为中性方法在反映平均流动和扰动基本模态的扭曲上,比其他的方法更为成功。也许这两点对于研究偏离中性较远情况下的稳定性问题正是至关重要的,所以在平面Poiseuille流动的亚临界情况下,周恒的结果与实验符合得较好。因此我们应用周恒的人为中性方法来研究经过修正的平行剪切流的非线性稳定性性质。

这种方法考虑到非线性的影响,将扰动流函数 $\psi$ ,扰动振幅 $a$ 和频率 $d\theta/dt$ 作下列展开

$$\hat{\psi} = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots \quad (1.1)$$

$$\psi_i = \psi_i(a, \theta, x, y) \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (1.2)$$

$$da/dt = ac_1a + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (1.3)$$

$$d\theta/dt = ac_r + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots \quad (1.4)$$

其中

$$\psi_0 = A\phi_0(y)e^{i a(x - ct)} + C.C. = a\phi_0 e^{i(a x - \theta)} + C.C. \quad (1.5)$$

$A_i, B_i$ 都是 $a$ 的函数

并设

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon u_1 \quad (1.6)$$

在(1.6)式中我们要选择合适的 $\varepsilon$ 和 $u_1$ ,使得当以 $\bar{u}_0 = \bar{u} - \varepsilon u_1$ 代替 $\bar{u}$ 时, Orr-Sommerfeld方程的特征值虚部 $c_i = 0$ 。此时得到的特征函数 $\phi_0$ 已有所不同,也就是说,平均流动和扰动基本模态的修正在这一步中都已给予考虑。我们可以按可解性条件逐步确定 $A_i, B_i$ ,再由(1.3)式,令 $da/dt = 0$ ,即可得到扰动的平衡振幅(或振幅阈值) $(ea)_{cr}$ 。

从数学方法上来说, $u_1$ 的选择是任意的,只要它满足边界条件且使得人为中性成为可能。周恒本人在应用这一方法时,采用由于基本扰动模态自相互作用而产生的零波数解作为 $u_1$ ,而在其他的弱非线性理论的方法中,这一解仅作为对平均流动的二阶修正。然而这一方法在应用于圆管Poiseuille流动时,未能找到人为中性(赵耕夫(1986)<sup>[10]</sup>)。

我们在文[1]中所得到的平行剪切流的修正速度剖面使得以下的两种作法成为可能。

首先,我们可以将我们所得到的修正速度剖面作为 $u_1$ ,用周恒的方法进行计算,这样就克服了在圆管Poiseuille流动和平面Couette流动中找不到人为中性的困难。其次,我们把这种修正看作是背景湍流噪声中雷诺应力的一种影响,将其分离出来,研究这一影响对流动稳定性的作用。下面我们将分别讨论这两种作法。

在非线性计算中,我们采用有限差分法求解,并用Muller法搜索特征值。在圆管Poiseuille流动的计算中,应用四阶差分格式,在 $0 \leq r \leq 1$ 中有301个等距节点;在平面Poiseuille流动和平面Couette流动的计算中,应用与周恒教授同样的方法,即二阶差分格式用Numerov方法改进精度,在 $0 \leq y \leq 1$ (对于平面Couette流是 $-1 \leq y \leq 1$ )中有301个等距节点。

## 二、用修正速度剖面寻找人为中性的解法

### 2.1 平面Poiseuille流动

这种解法用于平面Poiseuille流动时的结果见表1。用我们的修正速度剖面来寻找人为中性,所得到的解答与周恒的结果十分类似。然而我们也可看出,所得结果是与修正速度剖面的选择有关的,如选择 $\eta R = 296.55$ 的修正速度剖面来寻找人为中性,无论是对小扰动的线性特征值,还是对振幅阈值,都不能得到收敛的结果。

### 2.2 圆管Poiseuille流动和平面Couette流动

表1 平面 Poiseuille 流动用修正速度剖面 $u_1$ 寻找人为中性的解法

$\alpha=1.1, R=2900, ac_r=0.33778, ac_i=-0.00905$

$\eta R$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	振幅临界值		
								2nd	3rd	4th
人为中性	-0.00718	-0.00914	-0.00905	-0.00905	0.33774	0.33776	0.33778	0.02913	0.01200	0.00861
20.191	-0.0431	-0.00863	-0.00919	-0.00902	0.33896	0.33779	0.33775	0.01706	0.01299	0.01014
59.680	0.00885	-0.00909	-0.00905	-0.00905	0.33777	0.33777	0.33778	0.0308	0.01240	0.00884
118.900	0.03609	-0.18929	-0.23103	-0.25141	0.55949	0.57166	0.58774	0.0560	0.0928	0.00923
197.86	0.00650	-0.00893	-0.00903	-0.00905	0.33756	0.33773	0.33777	0.01731	0.01797	0.00887
296.55	-0.01775	-0.01305	-0.01194	-0.01092	0.33286	0.33565	0.33715	—	—	—

注: 表中 $a=A_{11}e+A_{21}e^2, b=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3, c=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3+A_{41}e^4,$   
 $d=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2, e=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3, f=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3+B_{40}e^4.$

在圆管 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动中, 用人为中性方法没有能找到中性解, 也可能这是由于在数值计算中扰动振幅 $\delta$ 和扰动速度剖面同时变化, 从而难以收敛的缘故. 而用我们的修正速度剖面, 可以很容易地找到中性解.

从表2、3中可以看到, 此时的结果非常分散, 而且当 $e \rightarrow 0$ 时, 所有的结果都不能收敛到小扰动的线性特征值, 从而不能认为这些结果是合理的.

表2 圆管 Poiseuille 流动用修正速度剖面 $u_1$ 寻找人为中性的解法

$\alpha=1.0, R=10000, ac_r=0.97172, ac_i=-0.02838$

$\mu R$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	振幅临界值		
								2nd	3rd	4th
-70.850	0.12736	-0.19213	-0.22973	-0.25754	0.73376	0.74813	0.76033	—	0.01711	0.03734
-135.02	0.06367	-0.11944	-0.14289	-0.15996	0.84052	0.84961	0.85754	—	—	0.06580
-218.92	0.02975	-0.07624	-0.09184	-0.10313	0.89519	0.90021	0.90477	—	—	—
-332.56	0.02183	-0.05105	-0.06269	-0.07149	0.92841	0.93150	0.93383	0.01221	—	0.01562
-445.93	0.02030	-0.03646	-0.04466	-0.05124	0.94498	0.94818	0.95154	0.01690	—	—
-589.04	0.02364	-0.02528	-0.03041	-0.03426	0.95478	0.95638	0.95834	0.01601	—	—

注: 表2中 $a=A_{11}e+A_{21}e^2, b=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3, c=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3+A_{41}e^4,$   
 $d=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2, e=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3, f=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3+B_{40}e^4.$

表3 平面 Couette 流动用修正速度剖面 $u_1$ 寻找人为中性的解法

$\alpha=1.1, R=2900, ac_r=0.72862, ac_i=-0.078712$

$\eta R$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	振幅临界值		
								2nd	3rd	4th
20.191	0.11218	-0.31208	-0.37742	-0.42632	0.31585	0.31446	0.31421	—	0.00695	0.00140
59.680	0.02403	-0.20978	-0.25439	-0.28755	0.21249	0.21064	0.20948	—	0.00932	0.00298
118.900	0.01153	-0.15020	-0.18297	-0.20742	0.15496	0.15427	0.15378	—	0.01753	0.00576
197.86	0.00757	-0.11696	-0.14266	-0.16186	0.12149	0.12115	0.12091	—	—	0.00682
296.55	0.00614	-0.09567	-0.11677	-0.13254	0.099791	0.09961	0.09948	—	—	0.00529
414.99	0.00593	-0.08092	-0.09880	-0.11216	0.08466	0.08455	0.08447	—	—	0.00255

注: 表3中 $a=A_{11}e+A_{21}e^2, b=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3, c=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3+A_{41}e^4,$   
 $d=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2, e=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3, f=ac_r+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3+B_{40}e^4.$

相对来说, 平面Poiseuille流动的结果虽与修正速度剖面有关, 但几个剖面的结果仍然比较接近, 说明修正速度剖面与实际的非线性影响还是比较接近的。但是, 人为中性方法中的扰动速度 $u_1$ 不能看作任意的, 它必须在反映流动真实特性的条件下, 才能得到满意的结果。

### 三、修正速度剖面作为背景湍流噪声的一种影响的算法

从第二节中的讨论可知, 人为中性方法的计算结果与扰动剖面的选择有关。如前所述, 弱非线性方法是以Orr-Sommerfeld方程的特征函数作为基本函数而进行摄动展开的。在引入扰动剖面之后, 基本特征函数已有所改变, 由不同的扰动剖面就会得到不同的特征函数。如果我们把Landau方程看作某一收敛级数的前几项截断, 各种算法的差别看作是调整级数各项的次序, 那么得到正确解答的途径可有两条: 一是选择合适的扰动剖面, 最好是与实际观察到的剖面一致, 使得级数的前几项就能较好地反映问题的本质; 二是计算高阶项系数以检验级数的收敛性质。

我们从物理直观上考虑, 既然流动是在具有背景湍流度的环境中, 各种复杂扰动的非线性相互作用产生的零波数成分必然对平均速度有所修正。如我们在文[2]中所指出的, 可以把我们所得到的修正速度剖面看作背景湍流度的一种影响。我们以经过这种修正的层流速度剖面作为研究对象, 以周恒的人为中性方法作为数学处理的手段, 对平行剪切流的非线性稳定性性质进行研究。

此时, (1.6)式变为

$$\bar{u} = 1 - y^2 - \delta u_d = \bar{u}_0 + \epsilon u_1 \quad (3.1)$$

其中 $u_d$ 是我们的修正速度剖面,  $u_1$ 仍按周恒的办法在计算中得出。

(1.3)式可以写成以下形式

$$\begin{aligned} da/dt = & (A_{11}\epsilon + A_{21}\epsilon^2 + A_{31}\epsilon^3 + A_{41}\epsilon^4)a \\ & + (A_{23}\epsilon^2 + A_{33}\epsilon^3 + A_{43}\epsilon^4)a^3 + A_{45}\epsilon^4 a^5 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

或

$$\begin{aligned} d(\epsilon a)/dt = & (A_{11}\epsilon + A_{21}\epsilon^2 + A_{31}\epsilon^3 + A_{41}\epsilon^4)(\epsilon a) \\ & + (A_{23} + A_{33}\epsilon + A_{43}\epsilon^2)(\epsilon a)^3 + A_{45}(\epsilon a)^5 \end{aligned} \quad (3.2b)$$

首先我们选择修正速度剖面的幅值, 使第一级线性方程的解达到中性, 此时 $u_1 = 0$ 。平面Poiseuille流动关于扰动振幅的发展方程成为

$$da/dt = 30.235\epsilon^2 a^3 - 424030\epsilon^4 a^5 \quad (3.3a)$$

或

$$d(\epsilon a)/dt = 30.235(\epsilon a)^3 - 424030(\epsilon a)^5 \quad (3.3b)$$

而圆管Poiseuille流动关于扰动振幅的发展方程成为

$$da/dt = -176.61\epsilon^2 a^3 - 11821000\epsilon^4 a^5 \quad (3.4a)$$

或

$$d(\epsilon a)/dt = -176.61(\epsilon a)^3 - 11821000(\epsilon a)^5 \quad (3.4b)$$

这说明在平面Poiseuille流动中, 当小扰动的线性增长率为零时, 非线性作用中的三阶项使扰动增长, 而五阶项使扰动衰减, 从而有限振幅的扰动可达到一振幅平衡值; 而在圆管Poiseuille流动中, 高次谐波的非线性作用都是使扰动衰减的。

我们变动修正速度剖面的幅值, 使得流动处于亚临界或超临界状态(表4.5), 可以看到在平面Poiseuille流动中, 高阶项也进行调整, 仍使有限振幅的扰动存在一门槛值(或平衡值); 在圆管Poiseuille流动中, 当小扰动的线性增长率大于零时, 高阶项的作用仍是使其衰减, 从而可得到一振幅平衡值, 形成所谓超临界稳定, 仅当修正速度剖面的干扰达到一

修正速度剖面作为背景噪声的平面 Poiseuille 流动计算

$\alpha=1.03 \quad R=5500 \quad \eta R=118.900$

$\delta$	$e$	$A_{11}$	$B_{10}$	$A_{21}$	$B_{20}$	$A_{31}$	$B_{30}$	$A_{41}$	$B_{40}$	$A_{43}$	$B_{43}$	$A_{33}$	$B_{33}$	$10^{-5}A_{45}$
-0.090211	-0.000206	0.74557	2.0503	42.623	0.86586	502.72	-1292.7	-41341	-35844	31.305	169.19	-2096.8	-12155	-0.96021
-0.0009311	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	30.235	170.63	—	—	—
-0.000411	0.000203	0.73848	2.2342	48.591	2.7442	704.99	-1550.9	-50730	-51187	28.058	172.21	-1081.5	-12256	-2.8950
$10^{-5}B_{42}$	$10^{-5}A_{45}$	$10^{-5}B_{44}$	$ac_i$	$a$	$b$	$c$	$ac_r$	$d$	$e$	$f$	振幅临界值		$c'$	
6.6657	-4.2552	-0.55408	-0.000152	-0.000152	-0.000152	-0.000152	0.27529	0.27529	0.27529	0.27529	0.00220	0.00219	0.00227	0.26768
—	-4.2403	-0.70939	0.0	—	—	—	0.26726	—	—	—	—	—	0.00844	—
4.5491	-4.2203	-0.87951	0.000152	0.000152	0.000152	0.000152	0.27528	0.27528	0.27528	0.27528	—	—	0.00856	0.26682

注: 表 4 中  $\alpha=A_{11}e+A_{21}e^2, b=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3, c=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3+A_{41}e^4, d=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2, e=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3, f=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3+B_{40}e^4.$

修正速度剖面作为背景噪声的圆管 Poiseuille 流动计算

$\alpha=1.0 \quad R=10000 \quad \mu R=-218.92019$

$\delta$	$e$	$A_{11}$	$B_{10}$	$A_{21}$	$B_{20}$	$A_{31}$	$B_{30}$	$A_{41}$	$B_{40}$	$A_{43}$	$B_{43}$	$A_{33}$	$B_{33}$	$10^{-5}A_{45}$
0.02975	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	-176.61	-221.37	—	—	—
0.03075	-0.00428	-0.38686	-1.0647	0.0207	-4.5340	51.736	-57.161	1489.4	-136.60	-173.63	-201.78	-4795.6	10815	-8.4752
0.03175	-0.01006	-0.31972	-1.0413	0.78478	-3.6293	50.751	-29.572	1001.3	325.46	-171.95	-185.26	-4472.5	8347.9	-5.8235
0.03275	-0.01718	-0.26588	-1.0318	1.4573	-2.9425	49.366	-8.2026	598.56	611.33	-173.97	-171.28	-4454.4	6628.7	-4.0706
0.03375	-0.02585	-0.21350	-1.0273	2.0871	-2.1894	48.235	12.282	137.20	728.47	-182.34	-160.63	-4619.1	5125.6	-2.7570
0.03475	-0.03684	-0.15424	-1.0202	2.5805	-1.1332	27.133	30.448	-348.30	540.90	-202.29	-158.40	-4949.3	3050.4	-1.6611
$10^{-5}B_{12}$	$10^{-5}A_{45}$	$10^{-5}B_{44}$	$ac_i$	$a$	$b$	$c$	$ac_r$	$d$	$e$	$f$	振幅临界值		$c'$	
—	-118.21	199.89	0.0	—	—	—	0.88109	—	—	—	—	—	—	—
-10.576	-73.449	193.34	0.00165	0.00166	0.00165	0.00165	0.88081	0.88081	0.88081	0.88081	0.00309	0.00329	0.00272	0.87633
-7.4929	-42.696	188.49	0.00325	0.00329	0.00324	0.00325	0.88054	0.88051	0.88054	0.88055	0.00438	0.00505	0.00366	0.87041
-5.3000	-20.043	191.26	0.00480	0.00500	0.00475	0.00480	0.88029	0.88021	0.88025	0.88031	0.00536	0.00698	0.00434	0.86336
-3.7032	-3.2844	208.20	0.00629	0.00691	0.00617	0.00623	0.88004	0.88003	0.87982	0.88014	0.00616	0.00980	0.00494	0.85494
-2.7252	1.3261	258.33	0.00774	0.00918	0.00782	0.00719	0.87980	0.88043	0.87891	0.87990	0.00674	0.01981	0.00546	0.84438

注: 表 5 中  $\alpha=A_{11}e+A_{21}e^2, b=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3, c=A_{11}e+A_{21}e^2+A_{31}e^3+A_{41}e^4, d=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2, e=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3, f=ac_i+B_{10}e+B_{20}e^2+B_{30}e^3+B_{40}e^4.$

定强度，高次谐波才有促使扰动增长的作用（当 $\delta=0.03475$ 时， $A_{45}$ 由负变正）。在下一节中我们将会看到，当雷诺数较大时情况会有所改变。

由计算结果可知，平均流动的扭曲对圆管 Poiseuille 流动的失稳有着重要意义。只有这种扭曲达到相当程度后才会引起流动的强烈失稳，这也正是 Leite 在他的实验中所发现的现象。

在非线性问题的数值计算中，我们可用线性稳定性分析契贝谢夫多项式展开法程序算出中性情况下的 $\delta$ 值或 $\delta$ 为某一数值时的特征值，然后将所得结果作为初值代入非线性计算，一般情况下这两种算法所得的特征值可有三位有效数字相同，有时可达五位有效数字。因为非线性计算时用牛顿法在复平面搜索特征值，需同时变动特征值的实部和虚部，如初值不很接近真实值，收敛性无法保证。而线性计算时使用QR算法，可直接算出特征值，在寻找中性解时，也可仅变动 $\delta$ ，寻求 $|c_i|$ 的最小值，成为在实轴上的一维搜索，此时牛顿法的收敛性大为改善，即使初始值离真实值较远，一般经过五次迭代即可找到中性解。

在上海市应用数学和力学研究所的VAX—11/750机上计算，对于平面 Poiseuille 流，找到中性解约需CPU时间1分钟，其中每次线性特征值计算CPU时间为12秒，然后进行的非线性计算约需CPU时间47秒；对圆管 Poiseuille 流动，找到中性解约需CPU时间3分50秒，其中每次线性特征值计算CPU时间为38秒，随后进行的非线性计算约需CPU时间1分56秒。可见，由契贝谢夫多项式方法寻找中性解虽较有保证，但需要机时较多，我们仅在用差分法直接搜索中未获结果时采用这种计算方法。

### 四、关于扰动振幅阈值

要说明计算结果的合理性，必须与实验进行比较。在这一节里，我们将讨论二个算例。

Nishoka<sup>(11)</sup>等人关于平面 Poiseuille 流的实验给出了扰动振幅阈值与波数或频率的关系。在他们的实验装置中，当雷诺数为8000层流流动仍得以维持时，背景湍流速度控制在主流最大速度的0.05%左右。我们也取修正速度剖面的幅值 $|\delta|=0.0005$ ，如图1所示，引入背景湍流速度可降低振幅阈值的最小值，而且加大扰动程度，当 $|\delta|=0.0008$ 时，计算点即可落

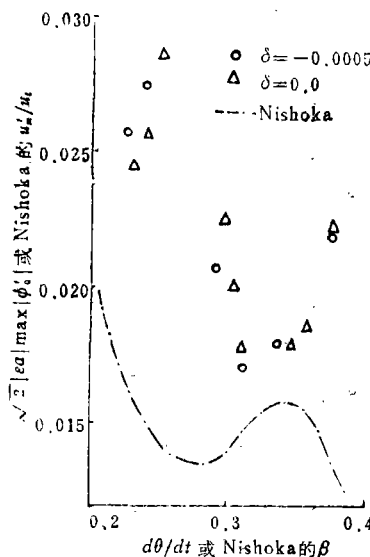


图1 计算所得振幅阈值与实验的比较

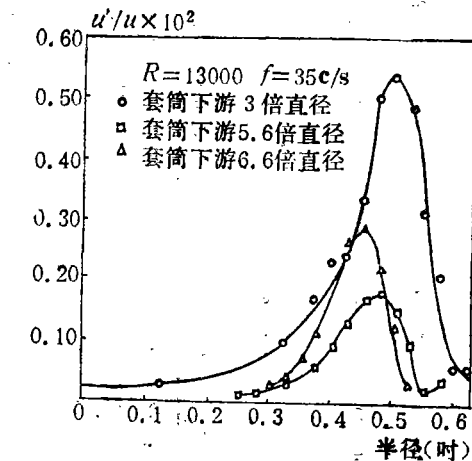


图2 小扰动情况下扰动振幅径向分布

在实验曲线上。

Leite(1959)<sup>[12]</sup>在圆管Poiseuille流动实验中使用了两种引入人工控制的扰动的装置：一种是很薄的(0.002吋厚)圆柱形套筒，紧贴管的内壁装入管中，另一种是再在套筒中装上截圆锥形的环翼。通过电磁作用可使装置在管中沿轴向作周期运动。前者引入的扰动较小，雷诺数达到13000管中都不会出现湍流，我们简称之谓小扰动装置；后者对层流的流动干扰较大，当雷诺数为12000时，即使装置保持不动，也能引起流动的转换，我们简称之谓大扰动装置。为便于比较，我们将文献[12]，[13]中的有关曲线绘出如下。其中图2是小扰动情况下的，图3，图4是大扰动情况下的。

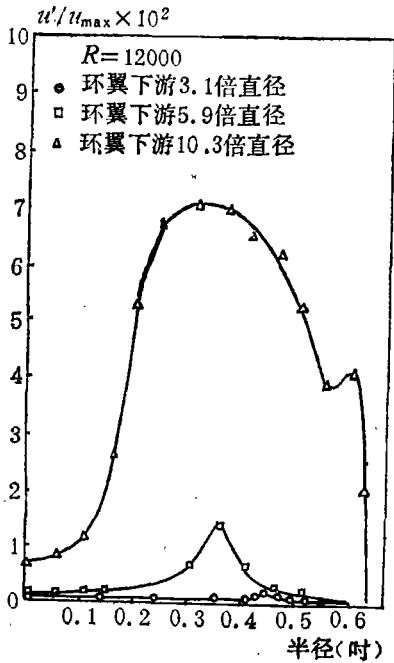


图3 大扰动情况下扰动振幅径向分布

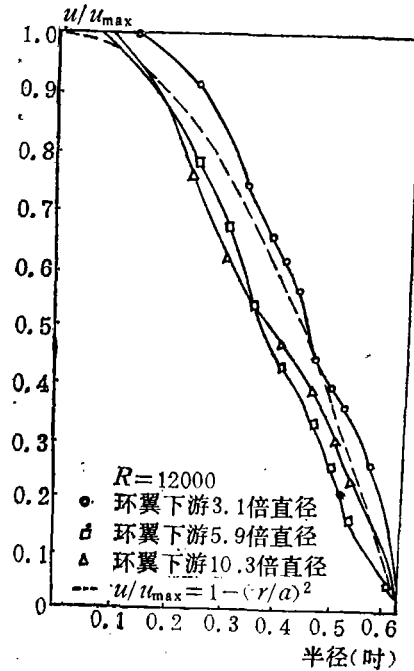


图4 大扰动情况下平均速度径向分布

我们的计算结果见表6~表9。

从图2中可见，当雷诺数为13000时，在小扰动情况下扰动振幅最大只能达到主流中心速度的0.55%，随后就衰减下去。小扰动装置对平均速度的干扰程度未在文献中给出，但从小扰动的发展情况可知这种干扰也不会超过主流中心速度的1%，我们的计算也说明这时流动将是稳定的。从图3中可看到，大扰动装置对平均速度剖面的扭曲已达到主流中心速度的7.5%（在环翼下游3.1倍直径处），扰动振幅从相当于主流中心速度的大约0.2%（环翼下游3.1倍直径处）开始发展起来。虽然实验装置对平均速度剖面的修正形式与我们修正速度剖面的修正不同，但我们的计算也说明，修正速度剖面作为背景噪声的圆管Poiseuille流动计算，当 $R=12000$ ，修正速度剖面的幅值达到3%左右时，扰动振幅的门槛值（此时为 $u'=(ea)_{cr} \cdot |\phi'_0|_{max}=2(ea)_{cr}$ ）已大约为主流中心速度的1.3%。当 $\delta$ 再增大，所得 $A_{46}$ 的值也增大，以至求不出振幅临界值，小扰动也会增长起来，这时的计算已不够准确，需要计算更高阶的系数。

下面我们对表6~表9中所列出的结果再作一些说明。

当考虑到 $(ea)$ 的五次项后， $d(ea)/dt=0$ 实际成为 $(ea)^2$ 的二次代数方程，因此一般情况

表 6

$\alpha=1.0, R=11000, \mu R=-218.92019$							
$\delta$	$\varepsilon$	$ac_i$	$ac_r$	振幅临界值			
				2nd	3rd	4th	4th*
0.02934	0.0	0.0	0.88131	—	—	—	—
0.03034	-0.00408	0.00169	0.88103	0.00303	0.00319	0.00287	—
0.03122	-0.00889	0.00311	0.88079	0.00418	0.00465	0.00387	—
0.03123	-0.00895	0.00312	0.88079	0.00419	0.00467	0.00388	0.10306
0.03134	-0.00963	0.00331	0.88078	0.00431	0.00485	0.00399	0.0265

表 7

$\alpha=1.0, R=12000, \mu R=-218.92019$							
$\delta$	$\varepsilon$	$ac_i$	$ac_r$	振幅临界值			
				2nd	3rd	4th	4th*
0.029	0.0	0.0	0.88150	—	—	—	—
0.02948	-0.00166	0.000821	0.88137	0.00207	0.00211	0.00208	—
0.02949	-0.00170	0.000838	0.88136	0.00209	0.00213	0.00210	0.13697
0.030	-0.00390	0.00170	0.88122	0.00299	0.00312	0.00305	0.0109
0.031	-0.00926	0.00334	0.88095	0.00427	0.00470	0.00471	0.00621

表 8

$\alpha=1.0, R=12500, \mu R=-218.92019$							
$\delta$	$\varepsilon$	$ac_i$	$ac_r$	振幅临界值			
				2nd	3rd	4th	4th*
0.0288	0.00015	-0.00009	0.88160	—	—	—	—
0.028852	0.0	0.0	0.88159	—	—	—	0.0352
0.0289	-0.00014	0.00008	0.88157	0.00065	0.00065	—	0.0239
0.029	-0.00045	0.00026	0.88155	0.00114	0.00114	—	0.0165

表 9

$\alpha=1.0, R=13000, \mu R=-218.92019$							
$\delta$	$\varepsilon$	$ac_i$	$ac_r$	振幅临界值			
				2nd	3rd	4th	4th*
0.028216	0.00112	-0.00088	0.88182	—	—	—	—
0.028316	0.00094	-0.00070	0.88179	—	—	—	0.0262
0.028516	0.00052	-0.00035	0.88173	—	—	—	0.0131
0.028716	0.0	0.0	0.88167	—	—	—	0.0100

下有二个实根（或相等的二个实根），这里我们不考虑复根。将(3.2b)式写成

$$d(ea)/dt=f(ea) \quad (4.1)$$

则 $f(ea)$ 可有如图5所示的两种情况，箭头所示为扰动振幅 $ea$ 随时间发展的情况。

即当 $df(ea)/d(ea)|_{cr}>0$ 时，所得到的振幅临界值为振幅门槛值，扰动振幅一超过此值就会发展起来；而当 $df(ea)/d(ea)|_{cr}<0$ 时，所得到的振幅临界值是振幅平衡值，扰动振幅



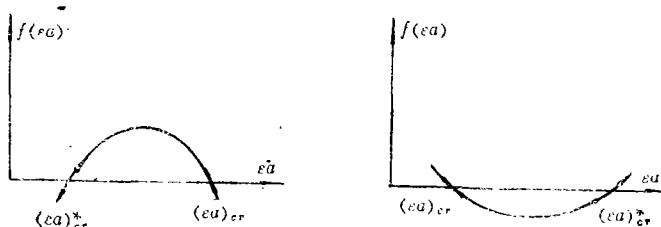


图 5

在此值附近则会趋于此值。我们用“\*”号表示振幅阈值。

又因为

$$\frac{df(\epsilon a)}{d(\epsilon a)}_{cr} = (A_{11}\epsilon + A_{21}\epsilon^2 + A_{31}\epsilon^3 + A_{41}\epsilon^4) + 3(A_{23} + A_{33}\epsilon + A_{43}\epsilon^2)(\epsilon a)^2 + 5A_{45}(\epsilon a)^4 \quad (4.2)$$

当得到二个不等的正实根时,  $A_{45} > 0$ , 较大的根是阈值, 较小的根是平衡值;  $A_{45} < 0$  情况则相反. 当只得到一个正实根时, 就必须计算 (4.2) 式的值.

从对不同雷诺数的计算中发现, 当  $R=12500$  时, 小扰动的线性增长率即使为零, 有限振幅的扰动已存在一阈值, 雷诺数再增大时, 我们的计算就显示出亚临界不稳定的结果. 在平均速度剖面受到相同程度干扰的情况下, 振幅阈值随雷诺数的增大而减小; 在相同雷诺数下, 振幅阈值也随平均速度剖面被干扰的增强而降低. 这些都是与物理现象相一致的. 因此, 本文所提出的经过修正的层流流动的非线性稳定性理论很好地说明了 Leite 的实验. 但是在 Reynolds 的实验中对平均速度剖面并未出现如此程度的干扰. 因此, 本文的理论并不能说明 Reynolds 的实验. Reynolds 实验中的转换发生也许与进口区流动中的失稳现象有关, 而在 Leite 的实验中, 进口区流动失稳的可能已经被精心排除了.

## 五、总结与讨论

我们所得到的主要结果是:

1. 详细讨论了一类随时间衰减, 但无横向速度, 在流动中不发生掺混的修正速度剖面的性质; 2. 提出了经过修正的层流流动的流动稳定性理论, 并用它讨论了前述修正速度剖面对流动稳定性的作用; 3. 对圆管 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动首次得到在轴对称扰动和二维扰动下失稳的结果; 4. 在本文的假设下, 把背景湍流噪声的干扰引入了流动稳定性计算, 在某种程度上模拟了自然条件下的流动失稳过程, 计算结果与实验的趋势相一致.

由于从新的角度来提出流动稳定性问题, 理论分析和计算工作还远未完善, 进一步的工作是必要而有意义的. 主要的问题有:

1. 修正速度剖面解是严格满足 Navier-Stokes 方程的, 但是我们还必须弄清修正速度剖面的产生, 发展以及它与扰动波相互作用的过程; 2. 本文所提出的修正速度剖面并不是唯一的可与基本层流流动同时存在于流场之中的其他层流流动, 发现新的更复杂的这种层流流动可能会给流动稳定性的研究带来更大进展; 3. 由于湍流本身所固有的三维性质, 研究三维情况下经过修正的层流流动的流动稳定性理论是十分必要的; 4. 必须发展更有效的非线性稳定性问题的算法.

周恒教授向作者提供了平面Poiseuille流亚临界稳定性人为中性方法的计算程序,在此表示感谢.

### 参 考 文 献

- [1] 周哲玮, 经过修正的层流流动的流动稳定性问题(I)——基本概念和理论, 应用数学和力学, 10, 2 (1989).
- [2] 周哲玮, 经过修正的层流流动的流动稳定性问题(II)——经过修正的平行剪切流的线性稳定性研究, 应用数学和力学, 10, 3 (1989).
- [3] Stuart, J. T. and J. Watson, On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1, Part 2, *J. Fluid Mech.*, 9 (1960), 353—370, 371—389.
- [4] Reynolds, W. C. and M. C. Potter, Finite-amplitude instability of parallel shear flows, *J. Fluid Mech.*, 27 (1967), 465.
- [5] Itoh, N., Spatial growth of finite wave disturbances in parallel and nearly parallel flows, Part 1, The theoretical analysis and the numerical results for plane Poiseuille flow, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 17 (1974), 160.
- [6] Davey, A. and H. P. F. Nguyen, Finite-amplitude stability of pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 701.
- [7] Ellingsen, T., B. Gjevik and E. Palm, On the nonlinear stability of plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 40 (1970), 97.
- [8] Patera, A. T. and S. A. Orszag, Finite-amplitude stability of axisymmetric pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 112 (1981), 467.
- [9] Zhou, H., On the nonlinear theory of plane Poiseuille flow in the subcritical range, *Proc. R. Soc. London*, A381 (1982), 407.
- [10] 赵耕夫, 圆管Poiseuille流轴对称有限扰动稳定性研究, 天津大学学报, 1 (1986), 64.
- [11] Nishoka, M., S. Iida and Y. Ichikawa, An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 72 (1975), 244.
- [12] Leite, R. J., An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 5 (1959), 81.
- [13] Kuethe, A. M., Some features of boundary layers and transition to turbulent flow, *J. Aero. Sci.*, 23 (1956), 446.

# On the Stability of Distorted Laminar Flow(Ⅲ)—— The Nonlinear Stability Analysis of Distorted Parallel Shear Flow

Zhou Zhe-wei

*(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)*

## Abstract

Based on the hydrodynamic stability theory of distorted laminar flow and the kind of distortion profiles on the mean velocity in parallel shear flow given in paper [1], this paper investigates the nonlinear stability behaviour of parallel shear flow, carries on stability calculation taking account of the perturbations of background turbulence noise under certain assumption, and obtains some results in accordance qualitatively with those of experiment for plane Poiseuille flow and pipe Poiseuille flow.