应用数学和力学，第 10 卷第 4 期(1989年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

奇摄动向量Robin问题的对角化方法*

倪 守 平

(福建师范大学数学系，1987年 10 月19日收到)

摘 要

本文使用对角化的方法和技巧，把一个二阶的非线性系统变换成二个一阶的近似对角线的系统，获得奇异摄动类型的向量二阶非线性 Robin 问题解的存在性和渐近估计式.

一、引 言

我们考察奇摄动边值问题

$$\varepsilon y''=f(t,\ \varepsilon,\ y,\ y') \qquad 0<t<1 \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1(\varepsilon)y(0,\ \varepsilon)+A_2(\varepsilon)y'(0,\ \varepsilon)=\alpha(\varepsilon) \\ B_1(\varepsilon)y(1,\ \varepsilon)+B_2(\varepsilon)y'(1,\ \varepsilon)=\beta(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

当 $\varepsilon\to0^+$时，解的存在性和渐近性质。其中 y, f, α, β 是 n 维向量函数；A_i, B_i, $i=1,\ 2$ 是 $n\times n$ 矩阵函数和$|\det A_1(\varepsilon)|+|\det A_2(\varepsilon)|>0$, $|\det B_1(t)|+|\det B_2(\varepsilon)|>0$.

关于奇摄动类型的向量边值问题，K. W. Chang[1]提出一种对角化方法，并且应用这些结果讨论了向量二阶非线性 Dirichlet 问题的奇摄动[2],[3]。在[4]中，我们把对角化方法引伸到高阶微分方程，获得一类伴有边界摄动的向量高阶非线性边值问题解的存在性和渐近性质，进一步扩大了对角化方法的应用.

一个自然的问题是：能否应用对角化方法处理向量非线性 Robin 问题？K. W. Chang 教授在讲学中曾多次提到这个问题。但是，它似乎至今还没有被研究过。本文将改进以上文献所指明的论证方法并探讨向量 Robin 问题。我们的主要结果类似于 Bris[5] 对于纯量问题所得到的结果.

二、预 备 结 果

我们需要如下对角化方法的基本结果（参看[1]和[2]）.

考察向量线性微分方程

$$\varepsilon v''=C(t,\ \varepsilon)v+D(t,\ \varepsilon)v'+g(t) \tag{2.1}$$

* 林宗池推荐.

其中 $C(t, \varepsilon)=C(t, 0)+O(\varepsilon)$ 和 $D(t, \varepsilon)=D(t, 0)+O(\varepsilon)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$ 是连续、有界的 $n\times n$ 矩阵函数。

引理 如果对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，$D(t, 0)$ 的每一个特征值有实部 $\leqslant -8\mu<0$，那么存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$，下列矩阵初值问题

$$\varepsilon P'=D(t, \varepsilon)P+\varepsilon P^2-C(t, \varepsilon), \quad P(0, \varepsilon)=0$$

$$\varepsilon Q'=-\varepsilon P(t, \varepsilon)Q-Q[D(t, \varepsilon)+\varepsilon P(t, \varepsilon)]-I, \quad Q(1, \varepsilon)=0$$

分别有解 $P(t)=P(t, \varepsilon)$ 和 $Q(t)=Q(t, \varepsilon)$，并且是一致有界的，即存在常数 $p>0$，$q>0$，使得

$$\|P(t)\|\leqslant p, \quad \|Q(t)\|\leqslant q \tag{2.2}$$

同时

$$\left.\begin{aligned} P(t, 0)&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(t, \varepsilon)=D^{-1}(t, 0)C(t, 0), \quad && 0<t\leqslant 1 \\ Q(t, 0)&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}Q(t, \varepsilon)=-D^{-1}(t, 0), && 0\leqslant t<1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

此外，变量替换

$$z=v'+P(t, \varepsilon)v, \quad w=v+\varepsilon Q(t, \varepsilon)z \tag{2.4}$$

把(2.1)变成对角线系统

$$\left.\begin{aligned} w'&=-P(t, \varepsilon)w+Q(t, \varepsilon)g(t) \\ \varepsilon z'&=[D(t, \varepsilon)+\varepsilon P(t, \varepsilon)]z+g(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

设具有 $W(0, \varepsilon)=I$ 的 $W(t)=W(t, \varepsilon)$ 是线性方程

$$w'=-P(t, \varepsilon)w$$

的基本解矩阵；具有 $Z(0, \varepsilon)=I$ 的 $Z(t)=Z(t, \varepsilon)$ 是线性方程

$$\varepsilon z'=[D(t, \varepsilon)+\varepsilon P(t, \varepsilon)]z$$

的基本解矩阵，则存在 $\varepsilon_1>0$ 和 $L>1$ 使得对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，

$$\left.\begin{aligned} &|W(t)W^{-1}(s)|\leqslant L, && 0\leqslant s,\ t\leqslant 1 \\ &|Z(t)Z^{-1}(s)|\leqslant L\exp[-\mu(t-s)/\varepsilon], && 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

因此，(2.5)的通解 $w(t)=w(t, \varepsilon)$，$z(t)=z(t, \varepsilon)$ 为

$$\left.\begin{aligned} w(t)&=W(t)l_1+\int_0^t W(t)W^{-1}(s)Q(s)g(s)ds \\ z(t)&=Z(t)l_2+\varepsilon^{-1}\int_0^t Z(t)Z^{-1}(s)g(s)ds \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

其中 l_i，$i=1, 2$ 是任意的常向量。

三、边界层性质

我们首先考察如下 Robin 问题，

$$\varepsilon y''=f(t, \varepsilon, y, y') \tag{3.1}$$

$$y(0, \varepsilon)+A(\varepsilon)y'(0, \varepsilon)=\alpha(\varepsilon), \quad y(1, \varepsilon)+B(\varepsilon)y'(1, \varepsilon)=\beta(\varepsilon) \tag{3.2}$$

其中 $B(\varepsilon)=B(0)+O(\varepsilon)$，$\beta(\varepsilon)=\beta(0)+O(\varepsilon)$，而 $A(\varepsilon)$，$\alpha(\varepsilon)$ 对于 $\varepsilon\geqslant 0$ 是连续的。

我们假定，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时摄动问题(3.1)，(3.2)退化为

$$\left.\begin{array}{ll} f(t,\ 0,\ u,\ u')=0, & 0<t<1 \\ u(1)+B(0)u'(1)=\beta(0) & \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

并且它的解用 $u=u(t)$ 表示。现在假设

(H_1) 退化问题(3.3)有解 $u(t)\in C^{(2)}[0,\ 1]$。

(H_2) 逆矩阵 $A^{-1}(0)$ 存在，函数 f 和 Jacobi 矩阵函数 f_y，$f_{y'}$ 对于 $(t,\ \varepsilon,\ y,\ y')$ 连续且有界。这里

$$0\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon},\qquad |y-u(t)|\leqslant\delta,\ |y'-u'(t)|\leqslant d$$

其中 $\delta>0$ 和 $\bar{\varepsilon}>0$ 是小常数，而 $d>0$ 是一个足够大的常数。同时存在常数 $k>0$，使得

$$|f(t,\ \varepsilon,\ u(t),\ u'(t))-f(t,\ 0,\ u(t),\ u'(t))|\leqslant k\varepsilon$$

$$|f_y(t,\ \varepsilon,\ u(t),\ u'(t))-f_y(t,\ 0,\ u(t),\ u'(t))|\leqslant k\varepsilon$$

$$|f_y(t,\ \varepsilon,\ y_1,\ y')-f_y(t,\ \varepsilon,\ y_2,\ y')|\leqslant k|y_1-y_2|$$

$$|f_y(t,\ \varepsilon,\ y,\ y_1')-f_y(t,\ \varepsilon,\ y_2,\ y_2')|\leqslant k|y_1'-y_2'|$$

并且用 $f_{y'}$ 替代 f_y 时不等式也成立。

(H_3) 逆矩阵 $[B(0)f_{y'}^{-1}(1,\ 0,\ u(1),\ u'(1))f_y(1,\ 0,\ u(1),\ u'(1))-I]^{-1}$存在。

(H_4) 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f_{y'}(t,\ 0,\ u(t),\ u'(t))$的每一个特征值的实部$\leqslant-8\mu<0$。

定理 1 若(H_1)～(H_4)成立，则存在常数 $\delta_0>0$，使得当 $|\alpha(0)-u(0)-A(0)u'(0)|\leqslant\delta_0$ 和 $\varepsilon>0$ 充分小时，问题(3.1)～(3.2)在$[0,\ 1]$中有解 $y(t,\ \varepsilon)$，并满足

$$y(t,\ \varepsilon)=u(t)+O(\varepsilon)$$

$$y'(t,\ \varepsilon)=u'(t)+O(|\alpha(\varepsilon)-u(0)-A(\varepsilon)u'(0)|\exp[-\mu t/\varepsilon])+O(\varepsilon)$$

证明 为了书写简洁，在如下的叙述中相似的符号，假如 $\widetilde{P}$，$\hat{P}$ 和 P 具有类似的含义。我们设

$$y-u(t)=\tilde{v}+\hat{v}$$

和要求 $\tilde{v}$ 满足

$$\varepsilon\tilde{v}''=f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\tilde{v},\ u'(t)+\tilde{v}')-\varepsilon u''(t) \tag{3.4}$$

$$\tilde{v}(1)+B(\varepsilon)\tilde{v}'(1)=H(\varepsilon,\ m),\ \tilde{v}'(0)=0 \tag{3.5}$$

而 $\hat{v}$ 满足

$$\varepsilon\hat{v}''=f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\tilde{v}(t)+\hat{v},\ u'(t)+\tilde{v}'(t)+\hat{v}')-f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\tilde{v}(t),\ u'(t)+\tilde{v}'(t)) \tag{3.6}$$

$$\hat{v}(0)+A(\varepsilon)\hat{v}'(0)=\tau(\varepsilon)-\tilde{v}(0),\ \hat{v}(1)=0 \tag{3.7}$$

其中 $H(\varepsilon,\ m)=\beta(\varepsilon)-u(1)-B(\varepsilon)u'(1)-m\varepsilon=O(\varepsilon)$，$m=(m_1,\ \cdots,\ m_n)$ 是参数的向量，$|m_j|\leqslant 1\ (1\leqslant j\leqslant n)$ 和 $\tau(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)-u(0)-A(\varepsilon)u'(0)$。

(i) 把方程(3.4)表示为

$$\varepsilon\tilde{v}''=\widetilde{C}(t)\tilde{v}+\widetilde{D}(t)\tilde{v}'+g(t,\ \varepsilon,\ \tilde{v},\ \tilde{v}')$$

其中

$$\widetilde{C}(t)=\widetilde{C}(t,\ \varepsilon)=f_y(t,\ \varepsilon,\ u(t),\ u'(t))$$

$$\widetilde{D}(t)=\widetilde{D}(t,\ \varepsilon)=f_{y'}(t,\ \varepsilon,\ u(t),\ u'(t))$$

$$g(t,\ \varepsilon,\ \tilde{v},\ \tilde{v}')=f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\tilde{v},\ u'(t)+\tilde{v}')-\widetilde{C}(t)\tilde{v}-\widetilde{D}(t)\tilde{v}'-\varepsilon u''(t)$$

于是根据引理，存在 $\widetilde{P}(t)$，$\widetilde{Q}(t)$和变量替换(2.4)，把(3.4)，(3.5)变成边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{w}'=-\widetilde{P}(t)\tilde{w}+\widetilde{Q}(t)\tilde{g}(t,\ \varepsilon,\ \tilde{w},\ \tilde{z})\\&\varepsilon\tilde{z}'=[\widetilde{D}(t)+\varepsilon\widetilde{P}(t)]\tilde{z}+\tilde{g}(t,\ \varepsilon,\ \tilde{w},\ \tilde{z})\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

$$[I-B(\varepsilon)\widetilde{P}(1)]\tilde{w}(1)=H(\varepsilon,\ m)-B(\varepsilon)\tilde{z}(1),\quad \tilde{z}(0)=0\tag{3.9}$$

其中 $\tilde{g}(t,\ \varepsilon,\ \tilde{w},\ \tilde{z})=g(t,\ \varepsilon,\ \tilde{v},\ \tilde{v}')$。因为

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[I-B(\varepsilon)\widetilde{P}(1)]=I-B(0)f_{y'}^{-1}(1,\ 0,\ u(1),\ u'(1))f_y(1,\ 0,\ u(1),\ u'(1))\tag{3.10}$$

所以对于充分小的 ε, $\tilde{w}$, $\tilde{z}$ 满足积分方程

$$\left.\begin{aligned}\tilde{w}(t)=&\widetilde{W}(t)\widetilde{W}^{-1}(1)[I-B(\varepsilon)\widetilde{P}(1)]^{-1}[H(\varepsilon,\ m)-B(\varepsilon)\tilde{z}(1)]\\&-\int_t^1\widetilde{W}(t)\widetilde{W}^{-1}(s)\widetilde{Q}(s)\tilde{g}(s,\ \varepsilon,\ \tilde{w}(s),\ \tilde{z}(s))ds\\\tilde{z}(t)=&\varepsilon^{-1}\int_0^t\widetilde{Z}(t)\widetilde{Z}^{-1}(s)\tilde{g}(s,\ \varepsilon,\ \tilde{w}(s),\ \tilde{z}(s))ds\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

令任意的连续向量函数对 $(\tilde{w}(t),\ \tilde{z}(t))$ 的范数为 $\|(\tilde{w},\ \tilde{z})\|=\|\tilde{w}\|+\|\tilde{z}\|$。定义映象 $T(\tilde{w},\ \tilde{z})=(\xi,\ \eta)$，即

$$\left.\begin{aligned}\xi(t)=&\widetilde{W}(t)\widetilde{W}^{-1}(1)[I-B(\varepsilon)\widetilde{P}(1)]^{-1}[H(\varepsilon,\ m)-B(\varepsilon)\tilde{z}(1)]\\&-\int_t^1\widetilde{W}(t)\widetilde{W}^{-1}(s)\widetilde{Q}(s)\tilde{g}(s,\ \varepsilon,\ \tilde{w}(s),\ \tilde{z}(s))ds\\\eta(t)=&\varepsilon^{-1}\int_0^t\widetilde{Z}(t)\widetilde{Z}^{-1}(s)\tilde{g}(s,\ \varepsilon,\ \tilde{w}(s),\ \tilde{z}(s))ds\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

由假设(H_1)和(3.10)存在正常数 h_1, h_2 和 p_1，使得

$$\left.\begin{aligned}&|H(\varepsilon,\ m)|,\quad |\varepsilon u''(t)|\leqslant h_1\varepsilon\\&|B(\varepsilon)|\leqslant h_2,\quad |[I-B(\varepsilon)\widetilde{P}(1)]^{-1}|\leqslant p_1\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

又由假设(H_2)和(2.2)，应用中值定理得到

$$K=k(2+\tilde{p}\tilde{q}+\tilde{q}+\tilde{p})^2$$

使得

$$|\tilde{g}(t,\ \varepsilon,\ \tilde{w},\ \tilde{z})-\tilde{g}(t,\ \varepsilon,\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z})|\leqslant K\pi(\tilde{w},\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z},\ \tilde{z}_1)\tag{3.14}$$

其中

$$\pi(\tilde{w},\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z},\ \tilde{z}_1)=\max(|\tilde{w}|,\ |\tilde{w}_1|,\ |\tilde{z}|,\ |\tilde{z}_1|)\max(|\tilde{w}-\tilde{w}_1|,\ |\tilde{z}-\tilde{z}_1|)$$

利用(2.6)，(3.13)和(3.14)，从(3.12)有

$$\|\xi(t)-\xi_1(t)\|\leqslant LK(Lp_1h_2\mu^{-1}+\tilde{q})\|\pi(\tilde{w},\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z},\ \tilde{z}_1)\|$$

$$\|\eta(t)-\eta_1(t)\|\leqslant LK\mu^{-1}\|\pi(\tilde{w},\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z},\ \tilde{z}_1)\|$$

和

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\|\leqslant &L[p_1h_1+(Lp_1h_2\mu^{-1}+\tilde{q})(k+h_1)]\varepsilon\\&+LK(Lp_1h_2\mu^{-1}+\tilde{q})\|\pi(\tilde{w},\ 0,\ \tilde{z},\ 0)\|\end{aligned}$$

$$\|\eta(t)\|\leqslant L\mu^{-1}(k+h_1)\varepsilon+LK\mu^{-1}\|\pi(\tilde{w},\ 0,\ \tilde{z},\ 0)\|$$

选取 $0<\varepsilon_2<1$ 如此地小，使得对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2$,

$$2LK(Lp_1h_2\mu^{-1}+\mu^{-1}+\tilde{q})\gamma\varepsilon\leqslant 1$$

其中 $\gamma=2L[p_1h_1+(Lp_1h_2\mu^{-1}+L\mu^{-1}+\tilde{q})(k+h_1)]$

如果 $\|\tilde{w}\|$, $\|\tilde{w}_1\|$, $\|\tilde{z}\|$, $\|\tilde{z}_1\|\leqslant\gamma\varepsilon$，那么对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2$,

$$\|T(\tilde{w}(t),\ \tilde{z}(t))-T(\tilde{w}_1(t),\ \tilde{z}_1(t))\|$$
$$\leqslant LK(Lp_1h_2\mu^{-1}+\tilde{q}+\mu^{-1})\|\pi(\tilde{w},\ \tilde{w}_1,\ \tilde{z},\ \tilde{z}_1)\|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\|\tilde{w}(t)-\tilde{w}_1(t)\|+\|\tilde{z}(t)-\tilde{z}_1(t)\|)$$

和

$$\|T(\tilde{w}(t),\ \tilde{z}(t))\|\leqslant L[p_1h_1+(Lp_1h_2\mu^{-1}+L\mu^{-1}+\tilde{q})(k+h_1)]\varepsilon$$
$$+LK(Lp_1h_2\mu^{-1}+\mu^{-1}+\tilde{q})\gamma^2\varepsilon^2\leqslant\gamma\varepsilon$$

因此，在 $S=\{(\tilde{w},\ \tilde{z}):\|(\tilde{w},\ \tilde{z})\|\leqslant 2\gamma\varepsilon\}$ 中 T 是一个压缩映象，从而在 S 中 T 有唯一的不动点。于是(3.11)，即(3.4)，(3.5)有唯一的解 $\bar{v}(t,\ \varepsilon)$，使得

$$\|\bar{v}(t,\ \varepsilon)\|,\quad \|\bar{v}'(t,\ \varepsilon)\|=O(\varepsilon) \tag{3.15}$$

(ii) 相似于(i)，存在 $\hat{P}(t)$，$\hat{Q}(t)$ 和变量替换(2.4)，把(3.6)，(3.7)变成边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\hat{w}'=-\hat{P}(t)\hat{w}+\hat{Q}(t)\hat{g}(t,\ \varepsilon,\ \hat{w},\ \hat{z})\\&\varepsilon\hat{z}'=[\hat{D}(t)+\varepsilon\hat{P}(t)]\hat{z}+\hat{g}(t,\ \varepsilon,\ \hat{w},\ \hat{z})\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

$$\hat{w}(1)=0,\ [A(\varepsilon)-\varepsilon\hat{Q}(0)]\hat{z}(0)=\tau(\varepsilon)-\bar{v}(0)-\hat{w}(0) \tag{3.17}$$

其中

$$\hat{C}(t)=f_y(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\bar{v}(t),\ u'(t)+\bar{v}'(t))$$
$$\hat{D}(t)=f_{y'}(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\bar{v}(t),\ u'(t)+\bar{v}'(t))$$
$$\hat{g}(t,\ \varepsilon,\ \hat{w},\ \hat{z})=f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\bar{v}(t)+\hat{v},\ u'(t)+\bar{v}'(t)+\hat{v}')$$
$$-f(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\bar{v}(t),\ u'(t)+\bar{v}'(t))-\hat{C}(t)\hat{v}-\hat{D}(t)\hat{v}'$$

因为

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[A(\varepsilon)-\varepsilon\hat{Q}(0)]=A(0) \tag{3.18}$$

所以对于充分小的 ε，$\hat{w}$，$\hat{z}$ 满足积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\hat{w}(t)=-\int_t^1\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(s)\hat{Q}(s)\hat{g}(s,\ \varepsilon,\ \hat{w}(s),\ \hat{z}(s))ds\\&\hat{z}(t)=\hat{Z}(t)[A(\varepsilon)-\varepsilon\hat{Q}(0)]^{-1}[\tau(\varepsilon)-\bar{v}(0)-\hat{w}(0)]\\&\qquad+\varepsilon^{-1}\int_0^t\hat{Z}(t)\hat{Z}^{-1}(s)\hat{g}(s,\ \varepsilon,\ \hat{w}(s),\ \hat{z}(s))ds\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

令 $(\hat{w}_0(t),\ \hat{z}_0(t))=(0,\ 0)$，并作迭代公式

$$\left.\begin{aligned}&\hat{w}_{i+1}(t)=-\int_t^1\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(s)\hat{Q}(s)\hat{g}(s,\ \varepsilon,\ \hat{w}_i(s),\ \hat{z}_i(s))ds\\&\hat{z}_{i+1}(t)=\hat{Z}(t)[A(\varepsilon)-\varepsilon\hat{Q}(0)]^{-1}[\tau(\varepsilon)-\bar{v}(0)-\hat{w}_{i+1}(0)]\\&\qquad+\varepsilon^{-1}\int_0^t\hat{Z}(t)\hat{Z}^{-1}(s)\hat{g}(s,\ \varepsilon,\ \hat{w}_i(s),\ \hat{z}_i(s))ds\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$i=1,\ 2,\ \cdots$。这里 $\hat{g}$ 也满足不等式(3.14)，并且存在 $h_3>0$，使得

$$|[A(\varepsilon)-\varepsilon\hat{Q}(0)]^{-1}|\leqslant h_3 \tag{3.21}$$

取

$$\delta_0=1/8\lambda$$
$$\lambda=\hat{L}^2\hat{K}h_3\mu^{-1}[2+(1+h_3\hat{L})\hat{q}]$$
$$r=|\tau(\varepsilon)-\bar{v}(0)|$$

利用(2.2)，(2.6)，(3.14)和(3.21)，由(3.20)得到

$$|\hat{w}_{i+1}(t)-\hat{w}_i(t)|\leqslant \hat{L}\hat{q}\hat{R}\int_t^1 \hat{\pi}(\hat{w}_i(s),\ \hat{w}_{i-1}(s),\ \hat{z}_i(s),\ \hat{z}_{i-1}(s))ds$$

$$\varepsilon|\hat{z}_{i+1}(t)-\hat{z}_i(t)|\leqslant \hat{L}h_3\varepsilon\exp[-\mu t/\varepsilon]|\hat{w}_{i+1}(0)-\hat{w}_i(0)|$$

$$+\hat{L}\hat{K}\int_0^t \exp[-\mu(t-s)/\varepsilon]\hat{\pi}(\hat{w}_i(s),\ \hat{w}_{i-1}(s),\ \hat{z}_i(s),\ \hat{z}_{i-1}(s))ds$$

和

$$\hat{w}_1(t)=0,\ \varepsilon|\hat{z}_1(t)|\leqslant \hat{L}h_3r\varepsilon\exp[-\mu t/\varepsilon]$$

由归纳法不难证得

$$|\hat{w}_i(t)-\hat{w}_{i-1}(t)|,\ \varepsilon|\hat{z}_i(t)-\hat{z}_{i-1}(t)|\leqslant \hat{L}h_3\varepsilon r(r\lambda)^{i-1}\exp[-\mu t/\varepsilon]$$

$$|\hat{w}_i(t)|,\ \varepsilon|\hat{z}_i(t)|\leqslant 2\hat{L}h_3\varepsilon r\exp[-\mu t/\varepsilon]$$

因为 $\bar{v}(0)=O(\varepsilon)$ 和 $A(\varepsilon)$，$\alpha(\varepsilon)$ 关于 $\varepsilon>0$ 连续，所以存在 $\varepsilon_3>0$，使得对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_3$，

$$|\bar{v}(0)|\leqslant 1/4\lambda,\qquad |\tau(\varepsilon)-\tau(0)|\leqslant\delta_0$$

因此，如果 $|\alpha(0)-u(0)-A(0)u'(0)|\leqslant\delta_0$ 成立，那么对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_3$，

$$r\leqslant|\tau(0)|+|\tau(\varepsilon)-\tau(0)|+|\bar{v}(0)|\leqslant 1/2\lambda$$

从而序列 $\{\hat{w}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\hat{z}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 关于 $(t,\ \varepsilon)$ 一致地收敛于(3.19)的解 $\hat{w}(t)$，$\hat{z}(t)$，并且

$$|\hat{w}(t)|,\qquad \varepsilon|\hat{z}(t)|\leqslant 2\hat{L}h_3\varepsilon r\exp[-\mu t/\varepsilon]$$

于是边值问题(3.6)，(3.7)有解 $\hat{v}(t,\ \varepsilon)$，满足

$$\hat{v}(t,\ \varepsilon)=O(\varepsilon r\exp[-\mu t/\varepsilon]),\ \hat{v}'(t,\ \varepsilon)=O(r\exp[-\mu t/\varepsilon])\tag{3.22}$$

(iii) 由(i)和(ii)推得 $y(t,\ \varepsilon)=u(t)+\bar{v}(t,\ \varepsilon)+\hat{v}(t,\ \varepsilon)$ 满足微分方程(3.1)，并且

$$y(0,\ \varepsilon)+A(\varepsilon)y'(0,\ \varepsilon)=\alpha(\varepsilon)$$

$$y(1,\ \varepsilon)+B(\varepsilon)y'(1,\ \varepsilon)=\beta(\varepsilon)-m\varepsilon+B(\varepsilon)\hat{v}'(1)$$

因为当 $\varepsilon\to0^+$ 时，$|\varepsilon^{-1}B(\varepsilon)\hat{v}'(1)|\to0$，所以存在 $\tilde{\varepsilon}>0$，使得对于 $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$，

$$|\varepsilon^{-1}B(\varepsilon)\hat{v}'(1)|\leqslant 1$$

现在定义 $F(m)=\varepsilon^{-1}B(\varepsilon)\hat{v}'(1,\ \varepsilon)$，则对于 $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$，映象 $F:[-1,\ 1]^n\to[-1,\ 1]^n$ 为连续的映象。

事实上，如果对应于 m，$m_0\in[-1,\ 1]^n$，边值问题(3.4)，(3.5)和(3.6)，(3.7)的解分别是 $\bar{v}_m(t)$，$\bar{v}_0(t)$ 和 $\hat{v}_m(t)$，$\hat{v}_0(t)$。设

$$\bar{\bar{v}}(t)=\bar{v}_m(t)-\bar{v}_0(t),\qquad \hat{\hat{v}}(t)=\hat{v}_m(t)-\hat{v}_0(t)\tag{3.23}$$

于是 $\bar{\bar{v}}(t)$ 满足

$$\varepsilon\bar{\bar{v}}''=f[u(t)+\bar{v}_0(t)+\bar{\bar{v}}]-f[u(t)+\bar{v}_0(t)]\tag{3.24}$$

$$\bar{\bar{v}}(1)+B(\varepsilon)\bar{\bar{v}}'(1)=-(m-m_0)\varepsilon,\ \bar{\bar{v}}'(0)=0\tag{3.25}$$

和 $\hat{\hat{v}}(t)$ 满足

$$\varepsilon\hat{\hat{v}}''=f[u(t)+\bar{v}_m(t)+\hat{v}_0(t)+\hat{\hat{v}}]-f[u(t)+\bar{v}_m(t)]$$

$$-f[u(t)+\bar{v}_0(t)+\hat{v}_0(t)]+f[u(t)+\bar{v}_0(t)]\tag{3.26}$$

$$\hat{\hat{v}}(0)+A(\varepsilon)\hat{\hat{v}}'(0)=-\bar{\bar{v}}(0),\ \hat{\hat{v}}(1)=0\tag{3.27}$$

其中，例如

$$[u(t)+\bar{v}_0(t)]=(t,\ \varepsilon,\ u(t)+\bar{v}_0(t),\ u'(t)+\bar{v}_0'(t))$$

关于边值问题(3.24)，(3.25)和(3.26)，(3.27)，再次应用步骤(i)，(ii)可以推得

$$\bar{\bar{v}}(t),\ \bar{\bar{v}}'(t),\ \hat{\hat{v}}(t),\ \hat{\hat{v}}'(t)=O(|m-m_0)\varepsilon)$$

因此根据 Brouwer 不动点定理，存在一个 $m^*\in[-1,\ 1]^n$ 使得 $F(m^*)=m^*$。从而对应于 m^*

的 $y(t, \varepsilon)$ 满足

$$y(1, \varepsilon)+B(\varepsilon)y'(1, \varepsilon)=\beta(\varepsilon)$$

于是定理 1 得证。

在下面的定理中，我们研究具有 $A(\varepsilon)\equiv 0$ 的边值问题(3.1)，(3.2)。我们假设

(H_4') $A(\varepsilon)\equiv 0$，函数 f 和 Jacobi 矩阵函数 f_y，$f_{y'}$ 对于 (t, ε, y, y') 连续且有界。这里

$$0\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon},\ |y-u(t)|\leqslant d,\ |y'|<\infty$$

同时存在常数 $k>0$，使得

$$|f(t, \varepsilon, u(t), u'(t))-f(t, 0, u(t), u'(t))|\leqslant k\varepsilon$$
$$|f_y(t, \varepsilon, u(t), u'(t))-f_y(t, 0, u(t), u'(t))|\leqslant k\varepsilon$$
$$|f_y(t, \varepsilon, y_1, y')-f_y(t, \varepsilon, y_2, y')|\leqslant k|y_1-y_2|$$
$$|f_y(t, \varepsilon, y, y_1')-f_y(t, \varepsilon, y, y_2')|\leqslant k|y_1'-y_2'|$$

并且用 $f_{y'}$ 替代 f_y 时第 2、3 的不等式也成立。

(H_5) $|f_{y'}(t, \varepsilon, y, y_1')-f_{y'}(t, \varepsilon, y, y_2')|\leqslant k\varepsilon|y_1'-y_2'|$

定理 2 若(H_1)，(H_2')，$(\mathrm{H}_3)\sim(\mathrm{H}_5)$ 成立，则存在常数 $\delta_0>0$，使得当 $|\alpha(0)-u(0)|\leqslant\delta_0$ 和 $\varepsilon>0$ 充分小时，问题(3.1)，(3.2)在[0, 1]中有解 $y(t, \varepsilon)$，并满足

$$y(t, \varepsilon)=u(t)+O(|\alpha(\varepsilon)-u(0)|)\exp[-\mu t/\varepsilon]+O(\varepsilon)$$
$$y'(t, \varepsilon)=u'(t)+O(\varepsilon^{-1}|\alpha(\varepsilon)-u(0)|+1)\exp[-\mu t/\varepsilon]+O(\varepsilon)$$

定理 2 的证明是定理 1 和[2]的定理 1 的证明的组合，因而略去。

我们现在处理一般边值问题(1.1)，(1.2)。我们假定 $B_i(\varepsilon)=B_i(0)+O(\varepsilon)$，$i=1, 2$，$\beta(\varepsilon)=\beta(0)+O(\varepsilon)$ 和 $A_i(\varepsilon)$，$i=1, 2$，$\alpha(\varepsilon)$ 于是 $\varepsilon>0$ 是连续的。于是对于逆矩阵 $A_2^{-1}(0)$ 存在或 $A_2(\varepsilon)\equiv 0$ 的情况，我们能够分别得到类似于定理 1 和定理 2 的结果。它们确切的表述和证明是定理 1，2 的简单修改。

参 考 文 献

[1] Chang, K. W., Singular perturbation of a general boundary value problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **3** (1972), 520—526.

[2] Chang, K. W., Diagonalization method for a vector boundary problem of singular perturbation type, *J. Math. Anal. Appl.*, **48** (1974), 652—665.

[3] Chang, K. W., Singular perturbations of a boundary problem for a vector differential equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **30** (1976), 42—54.

[4] 倪守平，伴有边界摄动的向量高阶非线性边值问题的奇摄动，数学物理学报，**4** (1984)，345—354.

[5] Бриш Н. И., О краевых задачах для уравнения $\varepsilon y''=f(x, y, y')$ при малых ε, *ДАН*, **95**, 3 (1954), 429—432.

Diagonalization Method for a Singularly Perturbed Vector Robin Problem

Ni Shou-ping

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper the method and technique of the diagonalization are employed to transform a vector second-order nonlinear system into two first-order approximate diagonalized systems. The existence and the asymptotic behavior of the solutions are obtained for a vector second-order nonlinear Robin problem of singular perturbation type.