

# 复合材料层合板的弯曲与振动\*

邓 梁 波

(西北工业大学, 1988年 1 月 21 日收到)

## 摘 要

本文应用应力杂交有限元方法分析了复合材料层合板的弯曲与振动。在本文中, 首先根据修正的余能变分原理, 构造了一个适合于复合材料层合板特点的矩形应力杂交板弯曲单元。在单元内, 分层假设应力参数, 在单元的边界上, 根据 YNS 理论的假设确定边界位移场。这样使得构造出来的单元不仅能够考虑横向剪切变形的影响和局部扭曲效应, 而且具有较少的自由度。其次, 用此单元求解了层合板的弯曲与振动问题, 并将计算结果与精确解进行了比较, 比较表明二者非常接近。这说明了在计算方面本文单元具有较高的精确度。

## 一、引 言

由于应力杂交有限元方法在复合材料层合板的分析中具有独特的优点, 因此, 许多文献([1~4])都应用此方法求解层合板的弯曲问题。在文[1]构造的单元中, 把层间节点位移取作为自由度, 虽然能较好地适用于层合板的分析, 但使得单元的自由度数随层数的增加而迅速的增加, 因而, 对于多层板, 其应用要受到很大的限制。由于此原因, 文[2]提出了一个单元, 在单元内, 假设了一个连续的应变场, 由这个应变场来确定每层的应力场, 这相当于在无论多少层数的单元中只假设了一套应力参数。由于所假设的应变场只是各坐标的线性函数, 因此, 所构造的单元不能考虑局部扭曲效应, 尤其在计算层合板的应力方面, 会带来较大的误差。

针对这些情况, 本文构造了一个单元, 在单元内部, 分层假设应力参数, 单元的自由度取在板的中面上, 单元的自由度数不随层数而变。因而, 与其他单元比较, 本文单元具有较少的自由度, 而且又能比较精确地描述层合板的特性。在单元数目相同的情况下, 其计算工作量与文[2]中单元的计算工作量相差不多, 但计算精度比文[2]单元的计算精度要高, 特别在应力计算方面。在单元数目比文[2]所用单元数目少一些的情况下, 也可获得比文[2]较为精确的结果。

\*叶开沅推荐。

## 二、理 论 部 分

在有限元分析中,修正的余能泛函可表达为如下的形式:

$$\Pi_m = \sum_n \left( \int_{V_n} \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} dV - \int_{\partial V_n} \{P\}^T \{u\} dS + \int_{S_{\sigma_n}} \{\bar{P}\}^T \{u\} dS \right) \quad (2.1)$$

在层合板分析中,根据每一层不同的材料特性,进一步将每个单元划分为 $m$ 个子区域,则泛函(2.1)可写为:

$$\begin{aligned} \Pi_{mc} = \sum_n \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \int_{V_{ni}} \frac{1}{2} \{\sigma^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma^{(i)}\} dV - \int_{\partial V_{ni}} \{P^{(i)}\}^T \{u^{(i)}\} dS \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{S_{\sigma_{ni}}} \{\bar{P}^{(i)}\}^T \{u^{(i)}\} dS \right) \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

式中,  $\{\sigma^{(i)}\}$  为第 $i$ 子区域的应力列矢量;  $[S^{(i)}]$  为第 $i$ 子区域的弹性柔度矩阵;  $\{u^{(i)}\}$  为第 $i$ 子区域的边界位移列矢量;  $\{P^{(i)}\}$  为第 $i$ 子区域的边界力矢量;  $\{\bar{P}^{(i)}\}$  为第 $i$ 子区域规定的边界力矢量;  $\partial V_{ni}$  为第 $n$ 个单元第 $i$ 子区域的边界  $\partial V_{ni} = S_{u_{ni}} + S_{n_i} + S_{\sigma_{ni}}$ ;  $S_{\sigma_{ni}}$  为第 $n$ 个单元第 $i$ 子区域边界力被规定的边界;  $S_{u_{ni}}$  为第 $n$ 个单元第 $i$ 子区域位移被规定的边界;  $S_{n_i}$  为第 $n$ 个单元第 $i$ 子区域与其他单元相邻的边界。

在使用泛函(2.2)时,若不计体力,所设的应力矢量应满足每一子区域中的齐次平衡方程,并且在边界  $S_{u_{ni}}$  上,必须满足  $\{u^{(i)}\} = \{\bar{u}^{(i)}\}$ , 其中  $\{\bar{u}^{(i)}\}$  是边界上已知的位移矢量。

假设每层的应力场为:

$$\{\sigma^{(i)}\} = [A^{(i)}] \{\beta^{(i)}\} \quad (2.3)$$

式中  $[A^{(i)}]$  系应力参数系数矩阵,是  $x, y, z$  的函数;  $\{\beta^{(i)}\}$  系第 $i$ 层的应力参数。

单元边界力矢量可由应力参数表为:

$$\{P^{(i)}\} = [R^{(i)}] \{\beta^{(i)}\} \quad (2.4)$$

式中  $[R^{(i)}]$  是由矩阵  $[A^{(i)}]$  的边界值所构成,满足边界力方程  $P_i = \sigma_{ij} n_j$ 。

第 $i$ 层的边界位移假设为:

$$\{u^{(i)}\} = [L^{(i)}] \{\delta^{(i)}\} \quad (2.5)$$

式中  $\{\delta^{(i)}\}$  系第 $i$ 层的广义节点位移。边界位移场(2.5)应满足单元之间的位移协调条件。

将(2.3)、(2.4)和(2.5)式代入(2.2),便得:

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{2} \{\beta^{(i)}\}^T [H^{(i)}] \{\beta^{(i)}\} - \{\beta^{(i)}\}^T [G^{(i)}] \{\delta^{(i)}\} + \{Q^{(i)}\}^T \{\delta^{(i)}\} \right) \right\} \quad (2.6)$$

式中

$$[H^{(i)}] = \int_{V_{ni}} [A^{(i)}]^T [S^{(i)}] [A^{(i)}] dV$$

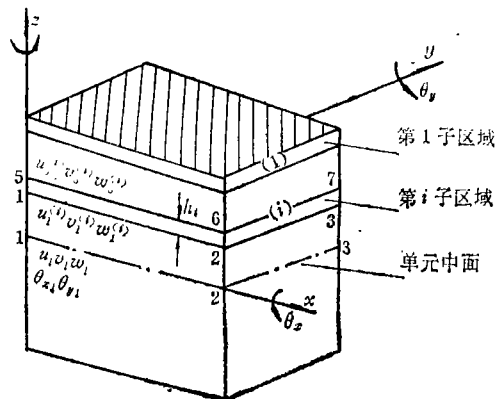


图 1

$$[G^{(i)}] = \int_{\partial V_{ni}} [R^{(i)}]^T [L^{(i)}] dS, \{Q^{(i)}\}^T = \int_{S_{\sigma_{ni}}} \{\bar{P}^{(i)}\}^T [L^{(i)}] dS$$

由泛函 (2.6) 在单元内部对各个子区域进行叠加后得:

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left( \frac{1}{2} \{\beta^e\}^T [H^e] \{\beta^e\} - \{\beta^e\}^T [G^e] \{\delta^e\} + \{Q_0\}^T \{\delta^e\} \right) \quad (2.7)$$

式中  $[H^e]$ ,  $[G^e]$ ,  $\{Q_0\}$  分别由  $[H^{(i)}]$ ,  $[G^{(i)}]$ ,  $\{Q^{(i)}\}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 按照其特定的位置组合而得.  $\{\beta^e\}$ ,  $\{\delta^e\}$  系整个单元的应力参数和广义节点位移矢量, 并分别由  $\{\beta^{(i)}\}$ ,  $\{\delta^{(i)}\}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 组合而成.

应力  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_z$  在层间应该是协调的, 此协调条件可以表达为:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{zz}^{(1)} \quad \sigma_{yz}^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)}] &= [0 \quad 0 \quad 0] \\ [\sigma_{zz}^{(i+1)} \quad \sigma_{yz}^{(i+1)} \quad \sigma_z^{(i+1)}] - [\sigma_{zz}^{(i)} \quad \sigma_{yz}^{(i)} \quad \sigma_z^{(i)}] &= [0 \quad 0 \quad 0] \\ [\sigma_{zz}^{(m)} \quad \sigma_{yz}^{(m)} \quad \sigma_z^{(m)}] &= [0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

将 (2.3) 式代入 (2.8) 式, 可将此协调条件用应力参数表示为:

$$[B] \{\beta^e\} = 0 \quad (2.9)$$

用拉格朗日乘子将 (2.9) 式引入泛函 (2.7) 中, 通过变分, 整理得:

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left( \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K_0] \{\delta^e\} - \{Q_0\}^T \{\delta^e\} \right) \quad (2.10)$$

$$\{\beta^e\} = [[H^e]^{-1} [G^e] - [H^e]^{-1} [B]^T ([B] [H^e]^{-1} [B]^T)^{-1} [B] [H^e]^{-1} [G^e]] \{\delta^e\} \quad (2.11)$$

式中

$$[K_0] = [G^e]^T [H^e]^{-1} [G^e] - [G^e]^T [H^e]^{-1} [B]^T ([B] [H^e]^{-1} [B]^T)^{-1} [B] [H^e]^{-1} [G^e]$$

在单元边界上根据 YNS 理论的假设, 每层广义节点位移  $\{\delta^e\}$  可由中面上的广义节点位移  $\{q^e\}$  表示如下:

$$\{\delta^e\} = [W] \{q^e\} \quad (2.12)$$

将上式代入 (2.10) 式, 便得:

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left( \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\} - \{Q^e\}^T \{q^e\} \right) \quad (2.13)$$

式中

$$[K^e] = [W]^T [K_0] [W] \text{——单元刚度矩阵} \quad (2.14)$$

$$\{Q^e\} = \{Q_0\}^T [W] \text{——单元节点力矢量} \quad (2.15)$$

从推导过程中可以看到, 同时使用了每层的广义节点位移矢量  $\{\delta^{(i)}\}$  和几何中面上的广义节点位移矢量  $\{q^e\}$ , 但最后作为单元自由度的是几何中面上的广义节点位移矢量. 矢量  $\{\delta^{(i)}\}$  可以不用, 只要把各层的量按照矢量  $\{q^e\}$  的位置分别组合就可. 本文引用  $\{\delta^{(i)}\}$  只是为了计算上的方便, 因而, 在计算方面, 不会增加多少工作量, 用本文的单元计算时其工作量与文 [2] 的计算工作量相差不多.

在动力分析时, 利用 Hamilton 原理, 可推导出适合于层合板动力分析的泛函如下:

$$\begin{aligned} \Pi_{mD} = & \int_{t_1}^{t_2} \sum_n \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \int_{V_{ni}} \frac{1}{2} \{\dot{u}_i^{(i)}\}^T \rho^{(i)} \{\dot{u}_i^{(i)}\} dV + \int_{V_{ni}} \frac{1}{2} \{\sigma^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma^{(i)}\} dV \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\partial V_{ni}} \{P^{(i)}\}^T \{u^{(i)}\} dS + \int_{S_{\sigma_{ni}}} \{\bar{P}^{(i)}\} \{u^{(i)}\} dS \right) \right\} dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

式中  $\rho^{(i)}$  系第  $i$  子区域的质量密度;  $\{\dot{u}_i^{(i)}\}$  系第  $i$  子区域内部位移矢量对时间的导数。

在 (2.16) 式中, 内部位移场  $\{u_i^{(i)}\}$  与单元边界位移场原则上可以独立假设, 但为了方便起见, 在本文中采用了与边界位移场相协调的内部位移场, 内部位移场假设为:

$$\{u_i^{(i)}\} = [N^{(i)}] \{\delta^{(i)}\} \quad (2.17)$$

将 (2.3)、(2.4)、(2.5) 和 (2.17) 式代入 (2.16) 式, 经过整理得:

$$\Pi_{mD} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_n \left( \frac{1}{2} \{\dot{q}^e\}^T [M^e] \{\dot{q}^e\} - \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\} \right) dt \quad (2.18)$$

式中  $[M^e]$  系单元的质量矩阵, 由每层的质量矩阵

$$[M^{(i)}] = \int_{V_{ni}} \rho^{(i)} [N^{(i)}]^T [N^{(i)}] dV \quad (2.19)$$

组成。组成之方法与组成刚度矩阵的方法相同。在自由振动分析中, 力矢量等于零, 故泛函 (2.18) 式中不包含载荷项。

利用初始条件, 由 (2.18) 式, 可以得到求动力固有特性的特征方程:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (2.20)$$

式中  $[K]$  系总体刚度矩阵,  $[M]$  系总体质量矩阵。

### 三、各个场变量的假设

(1) 单元中每层应力场的假设:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \beta_1^{(i)} + \beta_4^{(i)} x + \beta_7^{(i)} y + \beta_{10}^{(i)} z + \beta_{13}^{(i)} xz + \beta_{16}^{(i)} yz \\ \sigma_y^{(i)} &= \beta_2^{(i)} + \beta_5^{(i)} x + \beta_8^{(i)} y + \beta_{11}^{(i)} z + \beta_{14}^{(i)} xz + \beta_{17}^{(i)} yz \\ \sigma_{xy}^{(i)} &= \beta_3^{(i)} + \beta_6^{(i)} x + \beta_9^{(i)} y + \beta_{12}^{(i)} z + \beta_{15}^{(i)} xz + \beta_{18}^{(i)} yz \\ \sigma_{yz}^{(i)} &= -\beta_8^{(i)} z - \beta_9^{(i)} z - \frac{z^2}{2} (\beta_{15}^{(i)} + \beta_{17}^{(i)}) + \beta_{20}^{(i)} \\ \sigma_{zx}^{(i)} &= -\beta_4^{(i)} z - \beta_7^{(i)} z - \frac{z^2}{2} (\beta_{13}^{(i)} + \beta_{18}^{(i)}) + \beta_{19}^{(i)} \\ \sigma_z^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

显然, (3.1) 式满足应力齐次平衡方程。

(2) 单元中每层边界位移场的假设:

在假设单元边界位移时, 我们取层间的  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的位移  $u$ ,  $v$  和  $w$  作为广义节点位

移 (如图 1 所示)。本文假设横向位移  $w$  沿整个单元厚度方向是不变的, 以便与  $\sigma_z=0$  相一致。对于边界  $AB$ , 可以写出其边界位移为:

$$\left. \begin{aligned} u_{AB}^{(i)} &= \frac{1}{2} (u_1^{(i)} + u_5^{(i)}) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} (u_2^{(i)} + u_6^{(i)}) \frac{x}{a} \\ &\quad + \frac{z}{h_i} \left[ (u_5^{(i)} - u_1^{(i)}) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + (u_6^{(i)} - u_2^{(i)}) \frac{x}{a} \right] \\ v_{AB}^{(i)} &= \frac{1}{2} (v_1^{(i)} + v_5^{(i)}) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} (v_2^{(i)} + v_6^{(i)}) \frac{x}{a} \\ &\quad + \frac{z}{h_i} \left[ (v_5^{(i)} - v_1^{(i)}) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + (v_6^{(i)} - v_2^{(i)}) \frac{x}{a} \right] \\ w_{AB}^{(i)} &= w_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + w_2 \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

同理, 仿照 (3.2) 式, 可写出其他边界的位移。

(3) 转换矩阵  $[W]$ :

取几何中面上四个角点为节点, 每个节点取五个自由度, 三个位移自由度, 即  $x, y, z$  方向的中面位移  $u, v, w$ ; 二个转角自由度, 即绕  $x$  轴的转角  $\theta_x$ , 绕  $y$  轴的转角  $\theta_y$  (如图 1 所示)。

在单元边界上, 根据 YNS 理论的假设, 可用几何中面上的广义节点位移将每层的广义节点位移表示为:

$$u_i^{(i)} = u_1 + d_i \theta_{y1}, \quad v_i^{(i)} = v_1 + d_i \theta_{x1}, \quad w_i^{(i)} = w_1 \quad (3.3)$$

式中  $d_i$  为所求节点位移之点到几何中面的距离。同理, 其他每层的广义节点位移可类似地用几何中面上的广义节点位移表出。由关系式 (3.3) 就可获得转换矩阵  $[W]$ 。

(4) 内部位移场假设为:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{(i)} &= \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) u_1 + \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{y1} \\ &\quad + \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) u_2 + \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{y2} + \frac{xy}{ab} u_3 \\ &\quad + \frac{xy}{ab} (z + l_i) \theta_{y3} + \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) u_4 + \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{y4} \\ v_i^{(i)} &= \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) v_1 + \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{x1} \\ &\quad + \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) v_2 + \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{x2} + \frac{xy}{ab} v_3 \\ &\quad + \frac{xy}{ab} (z + l_i) \theta_{x3} + \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) v_4 + \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) (z + l_i) \theta_{x4} \\ w_i^{(i)} &= \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) w_1 + \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) w_2 + \frac{xy}{ab} w_3 + \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) w_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式中  $l_i$  系第  $i$  层中面到几何中面的距离。可以证明 (3.4) 式在边界上与边界位移协调。

由(3.2)和(3.3)式可知,在单元边界上,变形后的法线是一条不再垂直于中面的直线。而在单元内部,由于每层的应力场分别独立假设,即每层的应力矢量 $\{\sigma^{(k)}\}$ 是不一样的,并且每层的弹性柔度矩阵 $[S^{(k)}]$ 一般也不相同,所以,每层的应变场 $\{e^{(k)}\}=[S^{(k)}]\{\sigma^{(k)}\}$ 随层而异。根据几何方程可知,每层中单元内的位移(除横向位移 $w$ 外)随坐标的变化关系也不相同。因而,在单元内部变形后的法线是按层分段的折线。所以,这样构造出来的单元不仅能考虑横向剪切变形的影响,而且还可考虑局部扭曲效应。

#### 四、数值算例

##### (1) 2层简支角铺设层合板的弯曲<sup>[2]</sup>:

在这数值算例中,所考虑的是一个方板,边长为 $a$ ,承受均布压力 $q_0$ ,板的总厚度为 $h$ ,每层的厚度为 $h/2$ ,其弹性数据为:

$$E_{11}=40 \times 10^9 (\text{psi}), E_{22}=10^9 (\text{psi}), G_{12}=G_{23}=0.5 \times 10^9 (\text{psi}), \\ \nu_{12}=\nu_{23}=0.25, a=10'', h=0.2'', q_0=100 (\text{psi})$$

本文计算了 $\pm\theta=5^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 35^\circ$ 和 $45^\circ$ 时板的平面位移 $u^*$ ,  $v^*$ 和横向位移 $w^*$ 的值,结果列在表1中。由此表可以清楚地看到,本文用 $8 \times 8$ 网络所算得的结果比文[2]用 $10 \times 1$ 网络算得的结果还要好。同时,也可看到本文用 $10 \times 10$ 网络所算得的结果几乎与精确解一样。<sup>0</sup>

##### (2) 层合板的应力分析<sup>[2]</sup>:

此算例中的层合板是三层 $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 的板条。板厚为 $h$ ,  $y$ 方向的宽度为 $l$ ,  $x$ 方向为无限长,外表面的纤维平行于 $y$ 轴。在 $y=0$ 和 $y=l$ 处,板条具有简支边界条件。板条承受正弦载荷 $q(x, y)=q_0 \sin(\pi y/l)$ ,其中 $q_0=100$ 。板条的弹性常数及尺寸的数值如下:

$$E_{11}=25 \times 10^9 (\text{psi}), E_{22}=10^9 (\text{psi}), G_{12}=0.5 \times 10^9 (\text{psi}), \\ G_{23}=0.2 \times 10^9 (\text{psi}), \nu_{12}=\nu_{23}=0.25, l=24, h=6, S=l/h=4$$

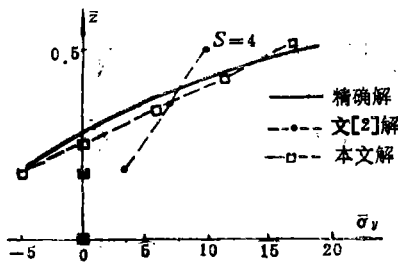


图2 正应力 $\bar{\sigma}_y$

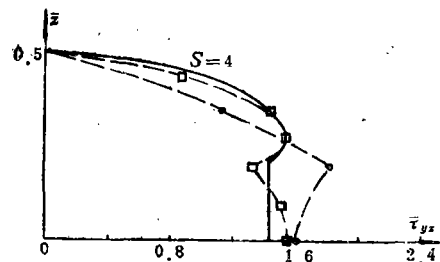


图3 剪应力 $\bar{\tau}_{yz}$

图2、图3中描出了用本文单元计算所得的应力 $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$ 的数值结果及精确解[6]和文[2]所获得的有限元解。图中无量纲参数为 $\bar{\sigma}_y=\sigma_y/q_0$ ,  $\bar{\tau}_{yz}=\tau_{yz}/q_0$ ,  $z=z/h$ 。从这两个图上可以显见,本文结果与精确解吻合得很好。在计算应力方面,本文单元的计算结果比文[2]单元的计算结果要精确得多。

##### (3) 层合板动力固有特性分析:

角铺设层合板的边界条件如图4所示。板的铺设角为 $[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ 。材料弹

性常数为:

$$E_1/E_2=40, G_{12}/E_2=0.6, G_{13}/E_2=G_{23}/E_2=0.5, \nu_{12}=0.25$$

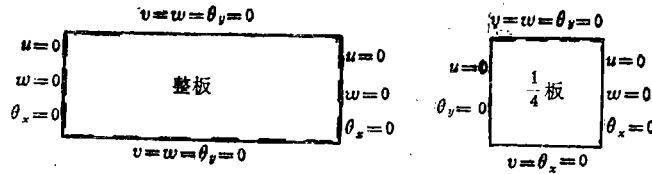


图4 板的边界条件

在此例中, 我们计算了不同长宽比( $a/b$ )和不同长厚比( $a/h$ )的层合板的无量纲频率  $\lambda = \omega a^2 (\rho/E_2 h^2)^{1/2}$ , 其中 $\omega$ 是层合板振动频率,  $\rho$ 系板的质量密度. 层合板的基频的数值结果见表2.

### 五、结 论

本文所构造的单元既能考虑横向剪切变形的影响又能考虑局部扭曲效应. 为了适合层合

表 1

		$\pm 5^\circ$	$\pm 15^\circ$	$\pm 25^\circ$	$\pm 35^\circ$	$\pm 45^\circ$
平面位移 $v^*$ $x=0, y=\frac{a}{2}$	精确解	0.01871	0.03281	0.02502	0.01610	0.01481
	文 [2]*	0.0186	0.0326	0.0249	0.0160	0.0148
	本文1**	0.01865	0.0327	0.02493	0.01607	0.0148
	本文2*	0.0187	0.0328	0.02501	0.01610	0.01481
平面位移 $u^*$ $x=\frac{a}{2}, y=0$	精确解	$0.2649 \times 10^{-2}$	$0.7710 \times 10^{-2}$	0.01135	0.01465	0.01481
	文 [2]	$0.258 \times 10^{-2}$	$0.753 \times 10^{-2}$	0.0112	0.0146	0.0148
	本文1	$0.261 \times 10^{-2}$	$0.762 \times 10^{-2}$	0.0113	0.01461	0.0148
	本文2	$0.2646 \times 10^{-2}$	$0.7704 \times 10^{-2}$	0.01134	0.01465	0.01481
横向位移 $w^*$ $x=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}$	精确解	0.5920	0.8927	0.9838	0.9451	0.9152
	文 [2]	0.609	0.909	0.999	0.960	0.938
	本文1	0.601	0.9001	0.990	0.950	0.926
	本文2	0.595	0.8931	0.9840	0.9455	0.9165

\*用 $10 \times 10$ 的网络计算; \*\*用 $8 \times 8$ 的网络计算

表 2

$a/h$	$a/b$		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
10	本文		8.676	10.494	12.746	15.554	18.385
	文 [8]		8.724	10.535	12.965	15.712	18.609
	文 [7]		8.664	10.42	12.82	15.54	18.46
20	本文		9.384	11.589	14.489	17.948	21.794
	文 [8]		9.475	11.767	14.896	18.557	22.584
	文 [7]		9.300	11.46	14.45	17.97	21.87
50	本文		9.629	12.045	15.207	19.048	23.413
	文 [8]		9.816	12.28	15.689	19.759	24.484
	文 [7]		9.507	11.82	15.04	18.89	23.24

板的特点, 应力参数必须分层取, 而在单元边界上可采用 YNS 理论的假设, 这样可以构造出精度较高的单元而且自由度数少。

从本文的数值算例中可以看到, 本文单元用于层合板计算可以得到精度高的结果, 并且, 工作量不大, 应用方便, 计算简单。

### 参 考 文 献

- [1] Mau, S. T., P. Tong and T. H. H. Pian, Finite element solutions for laminated thick plate, *J. Compos. Mater.*, 6 (1972), 304.
- [2] Spilker, R. L., S. C. Chou and O. Orringer, Alternate hybrid stress element for analysis of multilayer composite plates, *J. Compos. Mater.*, 11 (1977), 51.
- [3] Spilker, R. L., Evaluation of a hybrid-stress formulation for thick multilayer laminates, *Fibrous Composite in Structural Design*, New York, Plenum Press (1980), 399.
- [4] Spilker, R. L., Invariant 8-node hybrid-stress element for thin and moderately thick plates, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 18 (1982), 1153.
- [5] Pian, T. H. H. and P. Tong, Basis of finite element methods for solid continua, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1 (1963), 3.
- [6] Pagano, N. J., Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, 4 (1970), 20.
- [7] Bert, C. W. and T. C. C. Chen, Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates, *Int. J. Solid Struct.*, 14 (1978), 465.
- [8] Reddy, J. N., Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method, *J. Sound Vib.*, 66 (1979), 565.

## Bending and Vibration of Composite Laminated Plates

Deng Liang-bo

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

### Abstract

Hybrid-stress finite element method is applied for analysis of bending and vibration of composite laminated plates in this paper. Firstly, based on the modified complementary principle, a rectangular hybrid-stress plate bending element is presented which applies to analysis of laminates. Inside the element, different stress parameters are assumed according to different layers. The boundary displacements are determined by means of the assumption of YNS theory on the boundary of elements. The element formed in this way not only can take effects of transverse shear deformation and local warping into account, but also has less degrees of freedom. Then, problems of bending and vibration of laminates are solved by using this element, and the numerical results are compared with the exact solutions. This shows that the results obtained in the paper are very close to the exact results.