应用数学和力学，第10卷第4期(1989年4月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

控制系统的广义传递函数和运动稳定性判定方法的改进*

叶寿桢　　沙万乾

（温州师院）　　（上海柴油机厂）

（钱伟长推荐，1987年2月25日收到）

摘　要

本文给出了控制系统的广义传递函数和它的连续性的定义．利用广义传递函数作为工具，建立了一组判定运动稳定性的定理，从而把对一个控制动力学系统特性的了解建立在这个系统的被观测过程之中，简化了运动稳定性问题的判定方法．

一、引　　言

运动稳定性的判定，目前主要是采用李亚普诺夫方法[1]．从本质上来说，李氏方法也只是一种试探性方法．这种试探的成功与否，取决于能否找到一个合适的李亚普诺夫函数．由于许多自然现象和物理过程的数学模型都很复杂，甚至很难建立（自动控制系统[2]往往就是这样），这时候，这个缺乏规律的李亚普诺夫函数就几乎无法找到，甚至根本找不到．所以李氏方法在实际应用中受到很大的限制．为此，出于实际需要，对运动稳定性问题，就有必要建立一套简便可行的工程处理方法．

在处理实际问题中，我们常常看到：系统的不稳定性不总是由“初始条件”的微小扰动而引起的，一般说来，都是由输入量的扰动所引起的．从实际情况出发，我们认为把运动的稳定性建立在输出量对输入量的连续依赖性的基础上将会更合理一点．如果一个系统是由若干个已被我们所认识的基本组成环节组合而成的整体，那么我们就可以把系统的运动稳定性建立在每个环节的输出量对输入量的连续依赖性的基础上．这样处理，我们就可以把对一个复杂控制动力学系统特性的了解建立在这个系统的被观测过程之中，而毋需去建立很复杂，甚至很难建立的严格的数学模型，然后再利用被建立的数学模型去考察系统的稳定性和品质动态问题．本文的工作就是上面这种考虑的具体化．在本文中，我们所用到的数学工具也始终没有超出古典控制理论所需要的数学知识范围．

现代科学技术的进步，特别是电子技术和计算机技术的进步，使得对控制系统的输入量和输出量的快速检测和数据处理提供了可予实现的条件．所以我们建立的工程处理方法，不但简单方便，而且也是切实可行的．

二、基本假设和定义

基本假设1　任何控制系统都只能是由具有感受、传递、变换、检测、反馈、放大、校正、执行等功能的为数有限的基本组成环节（简称环节）和被控对象（简称对象）按信息传递次序通过串联、并联、反馈三种方式连接而成的整体。

基本假设2　系统、环节和对象都具有可予观察的输入量和输出量。人们可以通过，也只能通过对输入量和输出量的观测来认识它们的动力学运行特性。一个有m个输入量和n个输出量的环节、对象或系统，其输入量存在一个允控域$\mathscr{F}$，输出量存在一个可获域$\mathscr{X}$。对于任一组给定的输入量$F(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t))\in\mathscr{F}$，都有一组唯一的输出量$X(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))\in\mathscr{X}$与之相对应。

令$X\in\mathscr{X}$是环节、对象或系统一组可获得的输出量，则一定存在一个输入量的值域$\mathscr{F}^*\subset\mathscr{F}$，只要选用输入量$F\in\mathscr{F}^*$，就可以获得所需要的输出量$X$。如果$\mathscr{F}^*$只包含一个唯一的元$F$，则称该环节、对象或系统为可观测的。

利用基本假设1，2，大大简化了对控制系统的可控性和可观测性问题的讨论。

定义1　对于具有m个输入量和n个输出量的环节或对象，它在一组幅值有限的输入量$F(f_1(t), f_2(t),\cdots, f_m(t))\in\mathscr{F}$作用下，可以获得唯一的一组幅值有限的输出量$X(x_1(t), x_2(t),\cdots, x_n(t))\in\mathscr{X}$，且当输入量$F$有增量$\Delta F$时，输出量有增量$\Delta X$。如果对任给的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$，使当$\|\Delta F\|<\delta$时，恒有$\|\Delta X\|<\varepsilon$成立，则称该环节或对象在输入量$F$的作用下是稳定的。否则，就称为是不稳定的。

对于一个具有m个输入量和n个输出量的系统，如果它的每一个组成环节或对象都是稳定的，则我们说这个系统是稳定的。

例1　设$x=\varphi'(f)$是一个非线性环节，如果$\varphi'(f)$存在且有界，则该环节按定义1是稳定的。

证　令$M=\max|\varphi'(f)|$。因为当输入量$f(t)$伴随有微小的扰动$\Delta f(t)$时

$$\Delta x(t)=\varphi'(f)\Delta f(t)$$

所以

$$|\Delta x(t)|\leqslant M\cdot|\Delta f(t)|$$

故按定义1该环节是稳定的。

例2　比例微分环节，即传递函数为$W(p)=p+1$的环节是不稳定的。

证　令$x(t)$为输出量，$f(t)$为输入量，则

$$x(t)=\frac{df}{dt}+f(t)$$

显然$f=0$时，$x(t)=0$。

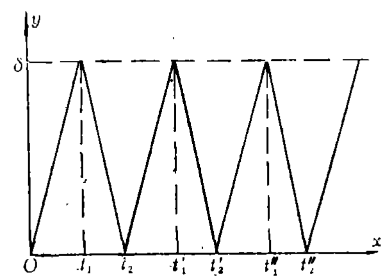

图 1

取$f(t)$为锯齿波（如图1所示）。对任给的$\varepsilon>0$，则不论δ多么小，只要选取足够小的前沿t_1和后沿t_2-t_1，

使

$$\min\left(\left|\frac{\delta}{t_1}\right|,\ \left|\frac{\delta}{t_2-t_1}\right|\right)>2\varepsilon$$

就可使$|x(t)|\nless\varepsilon$，所以这个环节按定义1是不稳定的。

为了简化讨论和便于叙述，下文中，我们只考虑单变量（只有一个输入量和一个输出量

的可观测）环节和对象按串联、并联、反馈三种基本耦合方式连结而成的单变量或多变量系统的稳定性问题，但文中所用的方法可用来处理一般系统的稳定性问题。

三、广义传递函数和它的连续性

定义2 单变量环节、对象或系统在输入量$f(t)$的作用下有输出量$x(t)$，并且$f(t)$，$x(t)$具有拉氏变换式$F(p)$，$X(p)$[3]，则称

$$W(p)=\frac{X(p)}{F(p)} \tag{3.1}$$

为该环节、对象或者系统在输入量$f(t)$作用下的广义传递函数。

传递函数是古典控制理论中非常熟悉的基本概念。通常这个概念只适用于环节、对象或系统的运行特性是用常系数线性微分方程来描绘的情形。传递函数的数学表达式是一个和输入量无关的算子p的半纯函数。而广义传递函数在通常的情况下是一个和输入量相关的算子p的半纯函数。这是它与传递函数最主要，也是最根本的区别。只有当环节、对象或系统的数学模型是用常系数线性微分方程来描述的时候，广义传递函数才能和传递函数有相同的含义。

下面给出广义传递函数连续性的定义。

如图2所示，设某环节、对象或系统在输入量$f(t)$的作用下，广义传递函数为$W(p)$，净输入量为$\varepsilon(t)$，输出量为$x(t)$。当输入量伴随有微小的扰动而变成$f(t)+\Delta f(t)$时，净输入量、输出量也随之变成了$\varepsilon(t)+\Delta\varepsilon(t)$和$x(t)+\Delta x(t)$。用$\Delta E(p)$，$\Delta X(p)$分别表示$\Delta\varepsilon(t)$和$\Delta x(t)$的拉氏变换式

令
$$W_{\Delta\varepsilon}(p)=\left.\frac{\Delta X(p)}{\Delta E(p)}\right|_{f=f(t)} \tag{3.2}$$

则$W_{\Delta\varepsilon}(p)$是一个与输入量$f(t)$，扰动量$\Delta f(t)$相关的半纯函数。当$f(t)$取定时，显然$W_{\Delta\varepsilon}(p)$只与$\Delta f(t)$有关。取$\Delta f(t)=r$（r为小常数），令

$$W_\varepsilon^*(p)=\lim_{r\to 0}W_{\Delta\varepsilon}(p)$$

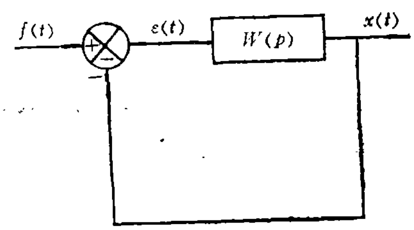

图 2

引用$W_\varepsilon^*(p)$，将(3.2)式改写成

$$W_{\Delta\varepsilon}(p)=W_\varepsilon^*(p)+\frac{\Delta X(p)-W_\varepsilon^*(p)\Delta E(p)}{\Delta E(p)}=W_\varepsilon^*(p)+\frac{\Lambda(p)}{\Delta E(p)}$$

则
$$\Delta X(p)=W_\varepsilon^*(p)\Delta E(p)+\Lambda(p) \tag{3.3}$$

定义3 如图2所示，设某环节、对象或系统在输入量$f(t)$的作用下，广义传递函数为$W(p)$，净输入量为$\varepsilon(t)$，输出量为$x(t)$。并且当输入量伴随有微小的扰动$\Delta f(t)$时，输出量的增量可用相应于(3.3)式的公式

$$\Delta x(t)=w_\varepsilon^*(t)*\Delta\varepsilon(t)+\lambda(t) \tag{3.4}$$

来计算。这里$\Delta\varepsilon(t)$，$\Delta x(t)$，$w_\varepsilon^*(t)$，$\lambda(t)$分别表示$\Delta E(p)$，$\Delta X(p)$，$W_\varepsilon^*(p)$，$\Lambda(p)$的像原函数。如果对任给的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$，使当$|\Delta f(t)|<\delta$时，恒有$|\lambda(t)|<\varepsilon$成立，则称广义传递函数$W(p)$对净输入量$\varepsilon(t)$而言是连续的。

当给定的系统没有反馈时，则$\varepsilon(t)=f(t)$，所以此时(3.3)式就为下式

$$\Delta X(p)=W_f^*(p)\Delta F(p)+\Lambda(p) \tag{3.5}$$

此时，如果$\lambda(t)$满足定义 3 的要求，则按定义3，这时$W(p)$对$f(t)$而言是连续的。

根据定义 3，显然数学模型可以用常系数线性微分方程来描绘的环节、对象或系统必具有连续的广义传递函数。在一般情况下，我们总可以把控制系统看作是具有连续广义传递函数的环节、对象，按串联、并联、反馈三种方式耦连而成的整体。即使系统中包含有继电器这样不具有连续广义传递函数的环节，由于系统的功率执行环节和控制对象总具有明显的惯性，所以允许对这类环节的工作特性作适当的修改，使之具有连续的广义传递函数。

四、利用广义传递函数处理控制系统运动稳定性的一般方法

定理1 设单变量系统在输入量$f(t)$的作用下，具有连续的广义传递函数$W(p)$，则当$W_f^*(p)$的极点全在左半平面，且$W_f^*(p)$在无穷远点解析时，系统是稳定的。

证明 写出(3.5)式

$$\Delta X(p)=W_f^*(p)\Delta F(p)+\Lambda(p) \tag{3.5}$$

由于系统的广义传递函数是连续的，所以$\lambda(t)$满足定义 3 所要求的条件。

令$\lim\limits_{p\to\infty}W_f^*(p)=A$，则可以把$W_f^*(p)$表成

$$W_f^*(p)=A+W^*(p)$$

这里$\lim\limits_{p\to\infty}W^*(p)=0$。显然$W^*(p)$与$W_f^*(p)$具有相同的极点分布。

由设$W_f^*(p)$在无穷远点解析，所以$W^*(p)$的极点只能落在一个不包含无穷远点在内的有限区域内。由 Weierstrass 致密性定理知，$W^*(p)$在左半平面内只有有限个极点。设这些极点为a_1，a_2，…，a_n。它们的级分别为P_1，P_2，…，P_n。

今以原点为中心，以充分大之R为半径在左半平面作半圆C'，使$W^*(p)$的极点全部落在由C'和虚轴上的一段AB所围成的闭围线C内（如图 3 所示）。由复变积分的 Jordan 定理[3]知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'}W^*(p)\exp[pt]dp=0 \qquad t>0$$

所以

$$w^*(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_C W^*(p)\exp[pt]dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(a_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(P_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\frac{d^{P_k-1}}{dp^{P_k-1}}[(p-a_k)^{P_k}W^*(p)\exp[pt]]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(b_0+b_1t+\cdots+b_{P_k-1}t^{P_k-1})\exp[a_kt] \tag{4.1}$$

因为a_k有负实部，故由(4.1)式可知

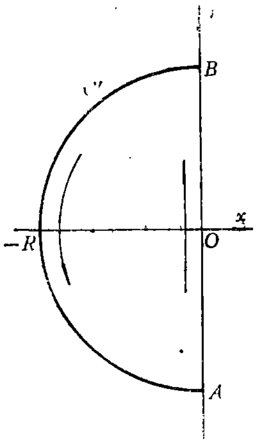

图　3

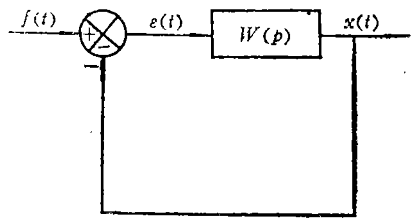

图　4

$$\int_0^{\infty}|w^*(t)|dt=M \qquad (M\text{为常数}) \tag{4.2}$$

因为
$$W_f^*(p)\Delta F(p)=A\Delta F(p)+W^*(p)\Delta F(p)$$
所以
$$|w_f^*(t)*\Delta f(t)|=\left|A\Delta f(t)+\int_0^t w^*(\tau)\Delta f(t-\tau)d\tau\right|$$
$$\leqslant(|A|+M)\max|\Delta f(t)| \tag{4.3}$$

从而由(3.5)式得
$$|\Delta x(t)|=|w_f^*(t)*\Delta f(t)+\lambda(t)|\leqslant(|A|+M)\max|\Delta f(t)|+|\lambda(t)| \tag{4.4}$$
上式说明，在定理1的条件下，系统是稳定的。

附注　定理1可以推广到$W_f^*(p)$在虚轴上有极点的情形（这种情形就是所谓临界稳定性问题）。只是因为工程控制系统对系统的稳定性有很高的要求，不允许出现临界稳定现象，所以这里也就不去考虑临界稳定问题。当$W_f^*(p)$具有位于右半平面的极点或无穷远极点时，我们就不能用定理1来确定系统的稳定性。例如，微分环节以无穷远点为它的极点，它在阶跃输入量的作用下有脉冲函数式输出。故按照定义1，微分环节是不稳定的。

根据定义1，注意到
$$W_f^*(p)=\lim_{r\to 0}\frac{\Delta X(p)}{\Delta F(p)}=\lim_{r\to 0}\frac{p\Delta X(p)}{r}$$
容易证得

定理2　若单变量环节、对象或系统按定义1稳定，则它的$W_f^*(p)$的极点必全部落在左半平面。

定理2可以用来判定环节、对象或系统的不稳定性。如果环节、对象或系统的$W_f^*(p)$具有位于右半平面的极点，则由定理2知，该环节、对象或系统一定是不稳定的。

定理3　如图4所示，设反馈自动控制系统在有界输入量$f(t)$的作用下，有净输入量$\varepsilon(t)$和输出量$x(t)$。对$\varepsilon(t)$而言，广义传递函数$W(p)$是连续的。如果$W_\varepsilon^*(\infty)$之值确定，且$\neq -1$，则当$1+W_\varepsilon^*(p)$的零点全部落在左半平面时，该系统是稳定的。

证明　令$f(t)$伴随有扰动$\Delta f(t)$而变成$f(t)+\Delta f(t)$时，净输入量和输出量分别变成了$\varepsilon(t)+\Delta\varepsilon(t)$和$x(t)+\Delta x(t)$。

由于广义传递函数对$\varepsilon(t)$而言是连续的，所以写出(3.3)式时，$A(p)$的像原函数$\lambda(t)$满足：

$$\max|\lambda(t)|\to 0 \qquad (\max|\Delta f(t)|\to 0)$$

因系统的反馈系数为−1，所以(3.3)式可写成：

$$\Delta X(p)=\frac{W_{\varepsilon}^{*}(p)}{1+W_{\varepsilon}^{*}(p)}\Delta F(p)+\frac{1}{1+W_{\varepsilon}^{*}(p)}\Lambda(p)$$
$$=H_1(p)\Delta F(p)+H_2(p)\Lambda(p) \tag{4.5}$$

由设$1+W_{\varepsilon}^{*}(p)$的零点全在左半平面，所以$H_1(p)=W_{\varepsilon}(p)/(1+W_{\varepsilon}^{*}(p))$和$H_2(p)=1/(1+W_{\varepsilon}^{*}(p))$的极点也都全在左半平面．又因$W_{\varepsilon}^{*}(\infty)$之值确定，且$\neq -1$，所以$H_1(p)$，$H_2(p)$都在无穷远点解析．仿照定理1的证明，可以证得

$$|h_1(t)*\Delta f(t)|\leqslant M_1\max|\Delta f(t)|$$
$$|h_2(t)*\lambda(t)|\leqslant M_2\max|\lambda(t)|$$

这里$h_i(t)\ (i=1,\ 2)$为$H_i(p)$之像原函数，M_1，M_2为正常数．

于是由(4.5)式，得

$$|\Delta x(t)|\leqslant|h_1(t)*\Delta f(t)|+|h_2(t)*\lambda(t)|$$
$$\leqslant M_1\max|\Delta f(t)|+M_2\max|\lambda(t)|$$

上式说明，按定义1，给定的系统是稳定的．

附注 当$1+W_{\varepsilon}^{*}(p)$具有位于右半平面的零点时，因为$W_{\varepsilon}^{*}(p)\Delta F(p)+\Lambda(p)$（随输入信号而变）不可能永远以$1+W_{\varepsilon}^{*}(p)$的位于右半平面的零点为零点，所以由(4.5)式知，系统是不稳定．与定理1附注中指出的原因一样，这里也不考虑$1+W_{\varepsilon}^{*}(p)$在虚轴上有零点的情形．

下面我们来考虑由有限个具有连续广义传递函数的环节和对象根据信息的传递关系，按串联、并联、反馈三种耦合方式构成的单变量或多变量自动控制系统．为此，先引入记号：

$$\boldsymbol{W}(p)=\begin{Vmatrix}1-W_{11}(p) & -W_{21}(p) & \cdots & -W_{n1}(p)\\ -W_{12}(p) & 1-W_{22}(p) & \cdots & -W_{n2}(p)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -W_{1n}(p) & -W_{2n}(p) & \cdots & 1-W_{nn}(p)\end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(p)=\begin{Vmatrix}X_1(p)\\ X_2(p)\\ \vdots\\ X_n(p)\end{Vmatrix},\qquad \boldsymbol{F}(p)=\begin{Vmatrix}F_1(p)\\ F_2(p)\\ \vdots\\ F_n(p)\end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}^{*}(p)=\begin{Vmatrix}1-W_{11}^{*}(p) & -W_{21}^{*}(p) & \cdots & -W_{n1}^{*}(p)\\ -W_{12}^{*}(p) & 1-W_{22}^{*}(p) & \cdots & -W_{n2}^{*}(p)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -W_{1n}^{*}(p) & -W_{2n}^{*}(p) & \cdots & 1-W_{nn}^{*}(p)\end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta X}(p)=\begin{Vmatrix}\Delta X_1(p)\\ \Delta X_2(p)\\ \vdots\\ \Delta X_n(p)\end{Vmatrix}$$

$$\Delta F'(p)=\begin{bmatrix} \Delta F_1(p)+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i1}(p) \\ \Delta F_2(p)+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i2}(p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta F_n(p)+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{in}(p) \end{bmatrix}$$

定理 4 一个由有限个具有连续广义传递函数的环节和对象根据信息的传递关系，按串联、并联、反馈三种耦合方式构成的单变量或多变量自动控制系统，如果它在一组给定的输入量的作用下，其信号流图具有 n 个节点，从节点 i 到节点 j 连结有广义传递函数为$W_{ij}(p)$的环节或对象（可为零）。对于每一个节点 k，有一个输入量f_k，输出量x_k，则有

$$X_k(p)=F_k(p)+\sum_{i=1}^{n}W_{ik}(p)X_i(p) \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

亦即 $$\boldsymbol{W}(p)\boldsymbol{X}(p)=\boldsymbol{F}(p)$$

当$\boldsymbol{F}(p)$伴随有微小的扰动而变成$\boldsymbol{F}(p)+\boldsymbol{\Delta F}(p)$时，$\boldsymbol{X}(p)$随之变成了$\boldsymbol{X}(p)+\boldsymbol{\Delta X}(p)$。根据连续广义传递函数的定义，可以写出

$$\Delta X_k(p)=\Delta F_k(p)+\sum_{i=1}^{n}[W^*_{ik}(p)\Delta X_i(p)+\Lambda_{ik}(p)]$$

亦即 $$\boldsymbol{W}^*(p)\boldsymbol{\Delta X}(p)=\boldsymbol{\Delta F}'(p).$$

这里$\Lambda_{ik}(p)$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的像原函数 $\lambda_{ik}(t)$都满足：

$$\max_{t\geqslant 0}|\lambda_{ik}(t)|\to 0 \qquad (\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ t\geqslant 0}}|\Delta f_k(t)|\to 0)$$

如果$\boldsymbol{W}^{*-1}(p)$阵存在，且其组成元的极点全部落在左半平面，且都在无穷远点解析，则该系统在输入量$\boldsymbol{F}(p)$的作用下，是稳定的。

定理 4 的证明和定理 3 相仿，从略。

定理5 设一个由有限个具有连续广义传递函数的环节和对象根据信息的传递关系，按串联、并联、反馈三种耦合方式构成的单变量自动控制系统，在给定工作条件附近的零解数学模型为

$$f(t,\ x,\ x',\ \cdots,\ x^{(n)})=g(t) \tag{4.6}$$

其中$g(t)$是输入量，$x(t)$是输出量。取$x(t)=\alpha k(t)$作为系统可能获得的一个输出量。其中α是小参数，$k(t)$是 n 阶可导的有界函数。将$x(t)=\alpha k(t)$代入(4.6)式算出对应的输入量$g(t)$。如果能够选取一个$k(t)$，使 α 充分小时，$G(p)$的零点全部落在左半平面，且有

$$0\leqslant\left|\lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{g(t)}\right|=\left|\frac{x(0)}{g(0)}\right|<1$$

则该系统是稳定的。否则，系统是不稳定的。

证明

1° 如果这个系统是由一个环节组成，则写出(3.5)式

$$\Delta X(p)=W_i^*(p)\Delta F(p)+\Lambda(p) \tag{3.5}$$

时，式中$\Lambda(p)$的像原函数$\lambda(t)$满足定义 3 的要求。在这里注意到$\Delta X(p)=X(p)$，$\Delta F(p)=G(p)$，由(3.5)式，得

$$W_i^*(p)=\frac{X(p)-\Lambda(p)}{G(p)}$$

由上式可知，若$G(p)$满足定理给定的条件，则$W_i^*(p)$的极点全部落在左半平面，且$W_i^*(\infty)=0$。故由定理1，给定的系统是稳定的。

2° 如果系统具有图 4 所示的反馈结构，注意到$\Delta X(p)=X(p)$，$\Delta F(p)=G(p)$，(4.5)式可以写成

$$X(p)=\frac{W_i^*(p)G(p)+\Lambda(p)}{1+W_i^*(p)} \tag{4.7}$$

或

$$W_i^*(p)=\frac{X(p)-\Lambda(p)}{G(p)-X(p)} \tag{4.8}$$

如果$G(p)$满足定理给定的条件，分别由(4.7)和(4.8)可知，$1+W_i^*(p)$的零点全部落在左半平面，且$W_i^*(\infty)=0$。故由定理3，给定的系统是稳定的。

3° 如果系统由有限多个具有连续广义传递函数的环节和对象，根据信息的传递关系按串联、并联、反馈三种耦合方式组合而成的，那末仿照上述的证明，根据定理 4 可以证明系统是稳定的。

4° 如果找不到满足上述条件的$k(t)$，这至少说明了系统在输入量$g(t)$（$|g(t)|=r<\delta$）的作用下，$X(p)/G(p)$具有位于右半平面的极点。所以根据定理2，系统是不稳定的。

附注 定理5中提出的系统的零解稳定性问题，当然可以用定理4来判定，但是用定理5来判定将会使问题变得更简便。

五、例　　题

例3 判定图 5 上图所示系统的稳定性。

解 由系统的信号流图 5 下图可知

$$\boldsymbol{W}^*(p)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -(p+1) & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{p+1} & 1 \end{vmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{W}^{*-1}(p)=\begin{vmatrix} \frac{1}{1+k} & -\frac{k}{1+k}\cdot\frac{1}{p+1} & -\frac{1}{1+k} \\ \frac{p+1}{1+k} & \frac{1}{1+k} & -\frac{p+1}{1+k} \\ \frac{k}{1+k} & \frac{k}{1+k}\cdot\frac{1}{p+1} & \frac{1}{1+k} \end{vmatrix}$$

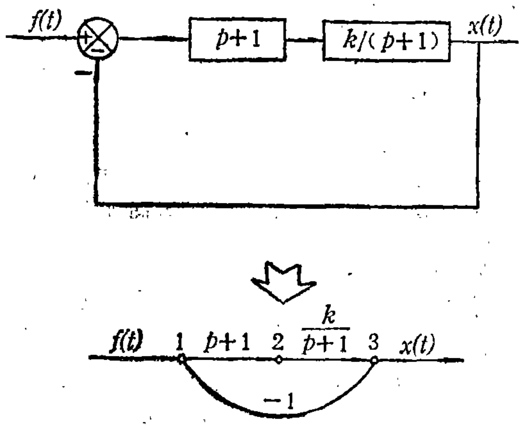

图 5

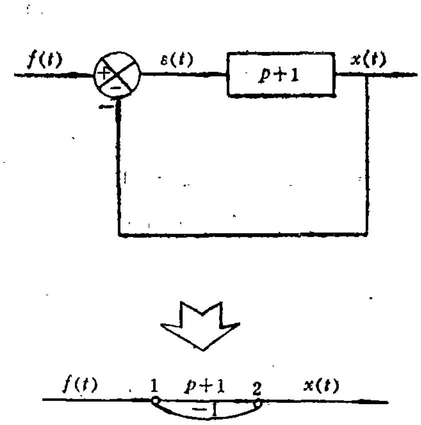

图 6

由于$W^{*-1}(p)$的第二行中有两个组成元分别为$(p+1)/(1+k)$和$-(p+1)/(1+k)$，所以由例2和定义1知，这个系统是不稳定的。

附注　例3是一个很重要的例题。由此可引证线性系统的绝对不变性系统是不稳定系统。亦即是不可能有的系统。

例4　判定图6上图所示系统的稳定性。

解　由系统的信号流图6下图可知

$$W^*(p)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -(p+1) & 1 \end{Vmatrix}$$

所以

$$W^{*-1}(p)=\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{p+2} & -\dfrac{1}{p+2} \\ \dfrac{p+1}{p+2} & \dfrac{1}{p+2} \end{Vmatrix}$$

根据定理4，该系统是稳定的。

例5　已知某非线性单变量控制系统的数学模型为

$$y'=-2[x^3(t)+y^5(t)]+g(t),\quad x'=y(t)-x^3(t) \tag{5.1}$$

其中$g(t)$是输入量，$x(t)$是输出量，$y(t)$是状态变量，试判定该系统的稳定性。

解　一般来说，系统总能够满足定理5所需要的条件，所以可以利用定理5来判定本例中系统的稳定性问题。

在(5.1)式中消去$y(t)$，得

$$x''+3x^2x'+2x^3(t)+2[x'+x^3(t)]^5=g(t) \tag{5.2}$$

令$x(t)=\alpha\sin^2 t$。将它代入(5.2)式，得

$$g(t)=2\alpha\cos 2t+3\alpha^3\sin^4 t\sin 2t+2\alpha^3\sin^6 t+o(\alpha^3) \tag{5.3}$$

显然

$$\frac{x(0)}{g(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{g(t)}=0$$

由于α是小参数，如果取$g(t)\approx g_1(t)=2\alpha\cos 2t$，则这时$G(p)$就具有位于虚轴上的零点，这是不允许的。为了进一步考察这个系统的稳定性问题，我们把(5.3)式中的含α^3的项计入，取

$$g(t)\approx g_2(t)=2\alpha\cos 2t+2\alpha^3\sin^6 t+\alpha^3(\sin^6 t)'$$

由此算得

$$G(p)\approx\frac{2\alpha p^2+720\alpha^3\beta+1440\alpha^3}{p(p^2+4)}$$

由于$G(p)$的零点全部落在左半平面，所以根据定理5，例中所给的系统是稳定的。

例 5 说明了本文介绍的方法在处理具体的非线性系统的稳定性问题时的方便性。

六、小 结

本文给运动稳定性问题的工程处理方法提供了一个非常简单、方便的方法。如果被考虑的系统的数学模型已经被建立，那末我们就可以采用定理 5 来判定系统的稳定性。定理 5 完全可以推广到多变量系统中去。所以只要系统的数学模型已经建立，那么系统的稳定性问题总是可以解决的。如果系统的数学模型未能建立，只要知道系统在给定工作状态附近的运行特性——即每个组成环节和对象在给定工作状态附近的$W^*_\tau(p)$，那末我们也可以利用定理 1～定理 4 来判定系统的运动稳定性。一般来说，环节和对象的$W^*_\tau(p)$可由式子

$$W^*_\tau(p)=\lim_{\tau\to 0}W_{\Delta s}(p)$$

通过实测很方便地加以确定。所以本文提供的控制系统的运动稳定性判定方法是一种普遍适用的简便方法。

参 考 文 献

[1] 许淞庆编著，《常微分方程稳定性理论》，上海科学技术出版社（1962）.

[2] 绪方胜彦著，卢伯英等译，《现代控制工程》，科学出版社（1976）.

[3] M· A· 拉甫仑捷夫，Б· A· 沙巴特著，施祥林、夏定中译，《复变函数论方法》，高等教育出版社（1956）.

Generalized Transfer Function of Control System and an Improvement on the Decision Method of Movement Stability

Ye Shou-zhen

(*Wenzhou Teachers College, Zhejiang*)

Sha Wan-qian

(*Shanghai Diesel Engine Factory, Shanghai*)

Abstract

In this paper the definitions of generalized transfer function of control system and its continuity are presented. Using generalized transfer function as a tool, a set of theorems for deciding movement stability have been constructed. Thus basing our understanding of the characteristics of a control dynamics system on its measured procedure will simplify the decision method of movement stability problems.