应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

集值映象的某些重合定理*

丁协平

（四川师范大学数学系，1987年12月7日收到）

摘　要

Browder[1]已得到了Schauder不动点定理的加强形式.许多作者从不同方向推广了Browder的结果.最近 H. M. Ko; K. K. Tan[2] 在放松紧性条件下得到了Browder定理的改进，K.K. Tan[3] 将 Browder 定理推广到了集值映象对的重合定理，在本文中我们得到了集值映象对的某些重合定理，它们分别改进和推广了[1,2,3]中主要结果.

一、预　备　知　识

我们用R表实直线．对非空集X，用2^X表X的一切非空子集的族．设X，Y是拓扑空间．称映射f：$X\to 2^Y$在$x_0\in X$是上半连续的(u.s.c.)，如果对每一开集$G\subset Y$，$f(x_0)\subset G$，存在x_0的邻域U使得$f(y)\subset G$，$\forall y\in U$．如果f在X的每一点处是 u.s.c.，则称f在X上是u.s.c..设$\Omega\subset 2^Y$．称映射p：$X\times\Omega\to R$在点$(x,A)\in X\times\Omega$是终归连续的，如果对每一$\varepsilon>0$，存在x在X中的邻域U和存在开集$G\subset Y$具有$A\subset G$使得对一切$(y,B)\in X\times\Omega$具有$y\in U$和$B\subset G$，有$|p(y,B)-p(x,A)|<\varepsilon$．称$p$在$X\times\Omega$上是终归连续的，如果$p$在每一点$(x,A)\in X\times\Omega$是终归连续的．我们注意到，如果$\Omega=\{\{y\}:\ y\in Y\}$则$p$的终归连续性和连续性概念一致．

现在设E是一矢量空间．$K\subset E$是一非空集和$x\in K$．分别定义集$I_K(x)$和$O_K(x)$如下：

$$I_K(x)=\{y\in E:\ 存在u\in K和r>0使y=x+r(u-x)\},$$

$$O_K(x)=\{y\in E:\ 存在u\in K和r>0使y=x-r(u-x)\}.$$

分别称$I_K(x)$和$O_K(x)$为K在x点的内向集和外向集．称2^E的子集Ω是凸的，如果对$A,B\in\Omega$，$t\in[0,1]$有$tA+(1-t)B\in\Omega$．如果E是拓扑矢量空间，我们用$\mathscr{K}(E)$表2^E内一切紧凸子集的族．

我们需要下列引理．

引理1.1[3]　设E是一拓扑矢量空间，$K\subset E$是一非空集，令f,g：$K\to 2^E$是u.s.c.，使得对每一$x\in K$，$f(x)$和$g(x)$都是紧集和$\alpha\in R$．则$f+g$和αf都是u.s.c.．

引理1.2[2]　令E是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间，$K\subset E$是一非空仿紧凸集.$L\subset K$是一非空紧凸集，如果S：$K\to 2^K$满足：

（i）　对每一$x\in K$，$S(x)$是凸集，

---

* 中国科学院科学基金资助的课题．

(ii)　对每一$y\in K$，$S^{-1}(y)$是开集，

(iii)　对每一$x\in K\backslash L$，$S(x)\subset L$。

则S有一不动点。

引理1.3[4]　令K是 Hausdorff 拓扑矢量空间E的一闭凸子集，设T: $K\to 2^K$使得对每一$x\in K$，$T(x)$是凸集和对每一$y\in K$，$T^{-1}(y)$是开集。如果存在紧集$L\subset K$和$y_0\in K$使得对每一$x\in K\backslash L$，有$y_0\in T(x)$，则T在K内有一不动点。

二、重　合　定　理

定理2.1　设K是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间E的一非空仿紧凸子集。$L\subset K$是一非空紧凸集。设f,g: $K\to\mathscr{K}(E)$是u.s.c.，$\Omega\subset 2^E$是凸的使得对$x,y\in K$，$x-f(x)\in\Omega$，$y-x+g(x)-f(x)\in\Omega$。假设p: $K\times\Omega\to R$在Ω上是终归连续的使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$在Ω上是凸函数，如果下列条件成立：

(i)　$p(x,x-f(x))\leqslant p(x,g(x)-f(x))$　　$(\forall x\in L)$

(ii)　$p(x,x-f(x))\leqslant p(x,y-x+g(x)-f(x))$　　$(\forall x,y\in K\backslash L)$

(iii)　对每一$x\in K$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，存在$y\in K$

使得 $p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$。

则存在$x_0\in K$使 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

证明　对每一$x\in K$，定义

$$m(x)=x+f(x)-g(x),\qquad n(x)=x-f(x)$$

则 $m(x)$ 和 $n(x)$ 是紧集且由引理1.1，映射m,n: $K\to 2^E$是u.s.c.。假设对每一$x\in K$，$f(x)\cap g(x)=\phi$。则由假设(iii)，集$S(x)=\{y\in K: p(x,y-m(x))<p(x,n(x))\}$是非空的。因此$S$: $K\to 2^K$。令y_1，$y_2\in S(x)$和$t\in[0,1]$，则 $p(x,y_i-m(x))<p(x,n(x))\ (i=1,2)$。因为$p(x,\cdot)$是$\Omega$上的凸函数。故有

$$\begin{aligned}p(x,ty_1+(1-t)y_2-m(x))&=p(x,t(y_1-m(x))+(1-t)(y_2-m(x)))\\&\leqslant tp(x,y_1-m(x))+(1-t)p(x,y_2-m(x))<p(x,n(x))\end{aligned}$$

所以 $ty_1+(1-t)y_2\in S(x)$。从而对每一$x\in K$，$S(x)$是凸集。

现在证明对每一$y\in K$，$S^{-1}(y)$是开集。设$x\in S^{-1}(y)$，则$y\in S(x)$。因此$p(x,y-m(x))<p(x,n(x))$。令 $\varepsilon=[p(x,n(x))-p(x,y-m(x))]/2$。因为$p$在点$(x,n(x))\in K\times\Omega$是终归连续的，故存在$x$的开邻域$U_1\subset K$和一开集$G\subset E$具有$n(x)\subset G$，使得对每一$(z,A)\in K\times\Omega$具有$z\in U_1$和$A\subset G$，有$|p(z,A)-p(x,n(x))|<\varepsilon$。又因$n$在$x$点u.s.c.，故存在$x$的开邻域$U_2\subset K$，使得对每一$z\in U_2$，有$n(z)\subset G$。令$V_1=U_1\cap U_2$，则对一切$z\in V_1$，有

$$|p(z,n(z))-p(x,n(x))|<\varepsilon \tag{2.1}$$

其次对固定的$y\in K$，p在点$(x,y-m(x))\in K\times\Omega$是终归连续的。故存在$x$的开邻域$U_3$和开集$G_1\subset E$具有$y-m(x)\subset G_1$使得对每一$(z,A)\in K\times\Omega$具有$z\in U_3$和$A\subset G_1$，有$|p(z,A)-p(x,y-m(x))|<\varepsilon$。因为$m(x)\subset y-G_1$和$m$在$x$点u.s.c.，故存在$x$的开邻域$U_4$使得对每一$z\in U_4$，有$m(z)\subset y-G_1$。令$V_2=U_3\cap U_4$，则对每一$z\in V_2$有$z\in U_3$和$y-m(z)\subset G_1$，故有

$$|p(z,y-m(z))-p(x,y-m(x))|<\varepsilon \tag{2.2}$$

令$V=V_1\cap V_2$。则V为x的一开邻域。由(2.1)和(2.2)式及ε的定义推得对一切$z\in V$有

$$p(z,y-m(z))<p(x,y-m(x))+\varepsilon$$

$$=p(x,n(x))-\varepsilon$$
$$<p(z,n(z)).$$

从而有 $y\in S(z)$。故对一切$z\in V$，有$z\in S^{-1}(y)$。所以对每一$y\in K$，$S^{-1}(y)$是开集。

本定理的条件(ii)蕴含对每一$x\in K\backslash L$有$S(x)\subset L$。因此由引理1.2存在$x_0\in K$使$x_0\in S(x_0)$。因此我们有$x_0\in L$和

$$p(x_0,g(x_0)-f(x_0))=p(x_0,x_0-m(x_0))<p(x_0,n(x_0))$$
$$=p(x_0,x_0-f(x_0)).$$

这与条件(i)矛盾，故存在$x_0\in K$使得$f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

系2.1 令E是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间，$K\subset E$ 是一非空仿紧凸集，$L\subset K$ 是一非空紧凸集和 f,g: $K\to E$ 是连续的，假设 p: $K\times E\to R$ 是连续函数使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$是E上的凸函数，如果下列条件成立：

(i) $p(x,x-f(x))\leqslant p(x,g(x)-f(x))$ $(\forall x\in L)$

(ii) $p(x,x-f(x))\leqslant p(x,y-x+g(x)-f(x))$ $(\forall x,y\in K\backslash L)$

(iii) 对每一$x\in K$具有$f(x)\neq g(x)$，存在$y\in K$使得

$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$

则存在 $x_0\in K$ 使$f(x_0)=g(x_0)$。

注2.1 如果在系2.1中令$g(x)=x(\forall x\in K)$，则系2.1的条件(i)自然满足，故系2.1是[2]中定理3.3的推广，自然更是[1]中命题2的推广。从而定理2.1是[1]和[2]中相应结果推广到集值映象对的重合定理的情形。

定理2.2 令K是 Hausdorff 拓扑矢量空间E的一闭凸子集。$L\subset K$ 是一非空紧集，设f,g: $K\to\mathscr{K}(E)$是u. s. c.，$\Omega\subset 2^E$是凸集使得对一切$x,y\in K$，$x-f(x)\in\Omega$和$y-x+g(x)-f(x)\in\Omega$。假设p: $K\times\Omega\to R$在Ω上是终归连续的使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$是Ω上的凸函数。如果下列条件成立：

(i) $p(x,x-f(x))\leqslant p(x,g(x)-f(x))$ $(\forall x\in K)$，

(ii) 对一切$x\in K\backslash L$具有$g(x)\cap f(x)=\phi$，存在$y_0\in K$使得

$p(x,y_0-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$，

(iii) 对每一$x\in L$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，存在$y\in K$使得

$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$。

则存在 $x_0\in K$ 使 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

证明 对每一$x\in K$，定义

$$m(x)=x+f(x)-g(x),\quad n(x)=x-f(x).$$

假设对每一$x\in K$，$f(x)\cap g(x)=\phi$。定义映射S: $K\to 2^K$如下：

$$S(x)=\{y\in K;\ p(x,y-m(x))<p(x,n(x))\}.$$

则由定理2.1的证明知对每一$x\in K$，$S(x)\neq\phi$和$S(x)$是凸集且对每一$y\in K$，$S^{-1}(y)$是开集，条件(ii)蕴含对一切$x\in K\backslash L$有$y_0\in S(x)$。因此由引理1.3，存在$x_0\in K$，使$x_0\in S(x_0)$。因此我们有

$$p(x_0,g(x_0)-f(x_0))=p(x_0,\ x_0-m(x_0))$$
$$<p(x_0,n(x_0))=p(x_0,x_0-f(x_0)$$

这与条件(i)矛盾，所以存在$x_0\in K$使$f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

注2.2 在定理2.2中如果令$L=K$，作为特殊情形我们得到[3]的定理2.4，而且我们的证明更为简单。

定理2.3 设K是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间E的一非空仿紧凸子集。$L\subset K$是一非空紧凸集，设f,g: $K\to\mathscr{K}(E)$ 是u.s.c.，$\Omega\subset 2^E$ 是凸集使得对一切$x,y\in K$，$x-f(x)\in\Omega$，$y-x+g(x)-f(x)\in\Omega$。假设p: $K\times\Omega\to R$在Ω上是终归连续的使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$是Ω上的凸函数，如果下列条件成立：

(i) $p(x,x-f(x))=p(x,g(x)-f(x))\qquad(\forall x\in K)$

(ii) $p(x,x-f(x))\leqslant p(x,y-x+g(x)-f(x))\qquad(\forall x,y\in K\backslash L)$

(iii) 对每一$x\in K$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，存在$y\in I_K(x)$使得

$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$。

则存在 $x_0\in K$使 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

证明 对每一$x\in K$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，由条件(iii)，存在$y\in I_K(x)$使$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$。如果$y\in K$，则由定理2.1知存在$x_0\in K$，使$f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$，

若$y\notin K$，则由$I_K(x)$的定义，存在$u\in K$和$\beta\in(0,1)$使$u=(1-\beta)x+\beta y$，由 $p(x,\cdot)$ 的凸性有

$$\begin{aligned}p(x,u-x+g(x)-f(x))&=p(x,\ (1-\beta)x+\beta y-x+g(x)-f(x))\\&=p(x,(1-\beta)(g(x)-f(x))+\beta(y-x+g(x)-f(x)))\\&\leqslant(1-\beta)p(x,g(x)-f(x))+\beta\, p(x,y-x+g(x)-f(x)).\end{aligned}$$

由条件(i)和(iii)得

$$p(x,u-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x)).$$

再由定理2.1知存在$x_0\in K$使$f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$。

系2.2 设K是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间 E 的一非空仿紧凸子集。$L\subset K$ 是一非空紧凸集。设 f: $K\to\mathscr{K}(E)$是 u.s.c.，$\Omega\subset 2^E$ 是凸集使得对一切 $x,y\in K$有 $x-f(x)\in\Omega$，$y-f(x)\in\Omega$。假设p: $K\times\Omega\to R$在Ω上是终归连续的使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$是Ω上的凸函数。如果下列条件成立：

(i) $p(x,x-f(x))\leqslant p(x,y-f(x))\qquad(\forall\ x,y\in K\backslash L)$，

(ii) 对每一$x\in K$具有$x\notin f(x)$，存在$y\in I_K(x)$使得 $p(x,y-f(x))<p(x,x-f(x))$。

则存在$x_0\in K$使得$x_0\in f(x_0)$。

证明 由具有$g(x)=\{x\}\ \forall x\in K$ 的定理2.3知本系成立。

注2.3 系2.2是[2]中系3.5的集值推广，当然[1]中定理1更是系2.2的特殊情形。

定理2.4 设K是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间E的一非空仿紧凸子集。$L\subset K$是一非空紧凸集。设f,g: $K\to\mathscr{K}(E)$是u.s.c.，$\Omega\subset 2^E$是凸集使得对一切$A\in\Omega$有$-A\in\Omega$和对一切$x,y\in K$，$x-f(x)\in\Omega$，$y-x+g(x)-f(x)\in\Omega$。假设p: $K\times\Omega\to R$在 Ω 上是终归连续的使得对每一$x\in K$，$p(x,\cdot)$是Ω上的凸函数，如果下列条件成立：

(i) $p(x,x-f(x))=p(x,g(x)-f(x))\qquad(\forall x\in K)$。

(ii) $p(x,x-f(x))\leqslant\min\{p(x,y-x+g(x)-f(x)),\ p(x,x-y+g(x)-f(x))\}$

$(\forall x, y \in K \backslash L)$.

(iii) 对每一$x \in K$具有$f(x) \cap g(x) = \phi$，存在$y \in O_K(x)$使得

$$p(x, y-x+g(x)-f(x)) < p(x, x-f(x)).$$

则存在$x_0 \in K$使$f(x_0) \cap g(x_0) \neq \phi$.

证明 令$h(x) = 2x - f(x)$，$r(x) = 2x - g(x)$ $(\forall x \in K)$，则对每一$x \in K$有

$$f(x) \cap g(x) \neq \phi \Leftrightarrow h(x) \cap r(x) \neq \phi.$$

现在对一切$(x, A) \in K \times \Omega$，定义$q$: $K \times \Omega \to R$如下:

$$q(x, A) = p(x, -A).$$

在本定理的假设下，不难验证h，r和q满足定理2.3内条件，因此由定理2.3知存在$x_0 \in K$使得$h(x_0) \cap r(x_0) \neq \phi$。从而$f(x_0) \cap g(x_0) \neq \phi$.

系2.3 设K是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间E的非空仿紧凸子集。$L \subset K$是一非空紧凸集。设f: $K \to E$连续和p: $K \times E \to R$连续使得对每一$x \in K$，$p(x, \cdot)$是E上的凸函数，如果下列条件成立:

(i) $p(x, x-f(x)) \leqslant \min\{p(x, y-f(x)),\ p(x, 2x-y-f(x))\}$ $(\forall x, y \in K \backslash L)$

(ii) 对每一$x \in K$具有$x \neq f(x)$，存在$y \in O_K(x)$使得

$$p(x, y-f(x)) < p(x, x-f(x))$$

则f在K内有一不动点。

证明 在定理2.4中设f, g为单值映射且有$g(x) = x$ $(\forall x \in K)$。则由定理2.4知本系成立。

系2.4 设K是赋范线性空间E的非空凸子集，$L \subset K$是一非空紧凸集。和f: $K \to E$连续。假设下列条件成立

(i) $\|x-f(x)\| \leqslant \min\{\|y-f(x)\|,\ \|2x-y-f(x)\|\}$ $(\forall x, y \in K \backslash L)$

(ii) 对每一$x \in K$具有$x \neq f(x)$，存在$y \in O_K(x)$使得

$$\|y-f(x)\| < \|x-f(x)\|.$$

则f在K内有一不动点。

证明 显然K是仿紧的，定义p: $K \times E \to R$为$p(x, y) = \|y\|$ $(\forall (x, y) \in K \times E)$。则由系2.3知本系成立。

系2.5 设K是赋范线性空间E的非空凸子集。$L \subset K$是一非空紧凸集。f: $K \to E$连续。假设

(i) $\|x-f(x)\| \leqslant \min\{\|y-f(x)\|,\ \|2x-y-f(x)\|\}$ $(\forall x, y \in K \backslash L)$,

(ii) 对每一$x \in K$具有$x \neq f(x)$，有$f(x) \in \overline{O_K(x)}$.

则f在K内有一不动点。

证明 设$x \in K$具有$x \neq f(x)$，则$\|x-f(x)\| > 0$。因为$f(x) \in \overline{O_K(x)}$，故存在$y \in O_K(x)$使得$\|y-f(x)\| < \|x-f(x)\|$。由系2.4知本系成立。

注 2.4 系2.3, 2.4和2.5 解答了Ko和Tan[2]提出的公开问题。

定理2.5 设K是 Hausdorff 拓扑矢量空间E的一闭凸集。$L \subset K$是一非空紧集。设f, g: $K \to \mathscr{K}(E)$是u.s.c.，$\Omega \subset 2^E$是凸集使得对一切$x, y \in K$，$x - f(x) \in \Omega$和$y - x + g(x) - f(x) \in \Omega$。假设$p$: $K \times \Omega \to R$在Ω上是终归连续的使得对每一$x \in K$，$p(x, \cdot)$是Ω上的凸函数，如果下列条件成立:

（i） $p(x,x-f(x))=p(x,g(x)-f(x)) \quad (\forall x\in K)$，

（ii） 对一切具有$f(x)\cap g(x)=\phi$的$x\in K\backslash L$，存在$y_0\in K$使

$$p(x,y_0-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x)),$$

（iii） 对每一$x\in L$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，存在$y\in I_K(x)$使得

$$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x)).$$

则存在 $x_0\in K$使得 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$.

证明 对每一$x\in L$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，由条件(iii)存在$y\in I_K(x)$使得 $p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$。如果$y\in K$，则由定理2.2知存在 $x_0\in K$ 使 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$. 如果$y\notin K$，由$I_K(x)$的定义必存在$u\in K$，$\beta\in(0,1)$使得 $u=(1-\beta)x+\beta y$。由$p(x,\cdot)$的凸性有

$$p(x,u-x+g(x)-f(x))=p(x,(1-\beta)(g(x)-f(x))+\beta(y-x+g(x)-f(x)))$$
$$\leqslant(1-\beta)p(x,g(x)-f(x))+\beta p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x))$$

又由定理2.2知存在$x_0\in K$ 使 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$.

注2.5 在定理2.5中，当$K=L$时作为特殊情形得到[3]的系2.5. 当然定理2.5又从又一角度推广了[1]的定理1.

定理2.6 在定理2.5中，如果条件(iii)由下列条件代替：

(iii)′ 对每一$x\in L$具有$f(x)\cap g(x)=\phi$，存在$y\in O_K(x)$使得

$$p(x,y-x+g(x)-f(x))<p(x,x-f(x)).$$

则仍存在 $x_0\in K$ 使得 $f(x_0)\cap g(x_0)\neq\phi$.

证明 利用定理2.5和定理2.4中的证明方法易证本定理成立.

注2.6 定理2.6推广了[3]的系2.6和[1]的定理2.

由定理2.5和定理2.6我们容易得到下面的推论.

系2.6 设K是赋范线性空间E的非空闭凸集. $L\subset K$是一非空紧集和f: $K\to E$连续. 假设

（i） 对一切使$x\neq f(x)$的$x\in K\backslash L$，存在$y_0\in K$使

$$\|y_0-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

（ii） 对每一$x\in L$具有$x\neq f(x)$，存在$y\in I_K(x)$使得

$$\|y-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

则f在K中有一不动点.

证明 在定理2.5中令f,g为单值映射且 $g(x)=x$ $(\forall x\in K)$. 进一步假设 $p(x,y)=\|y\|$ $(\forall (x,y)\in K\times E)$. 则由定理2.5知本系成立.

系2.7 设K是赋范线性空间E的非空闭凸集，$L\subset E$是一非空紧集和f: $K\to E$连续. 假设

（i） 对一切使$x\neq f(x)$的$x\in K\backslash L$，存在$y_0\in K$使

$$\|y_0-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

（ii） 对每一$x\in L$具有$x\neq f(x)$，有$f(x)\in\overline{I_K(x)}$，

则f在K内有一不动点.

证明 假设$x\in L$ $(x\neq f(x))$ 则$\|x-f(x)\|>0$。因$f(x)\in\overline{I_K(x)}$，故存在$y\in I_K(x)$使$\|y-f(x)\|<\|x-f(x)\|$。由系2.6知本系成立。

系2.8 设K是赋范线性空间E的非空闭凸集，$L\subset K$是非空紧集和f: $K\to E$连续。假设

(i) 对一切使$x\neq f(x)$的$x\in K\setminus L$，存在$y_0\in K$使

$$\|y_0-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

(ii) 对每一$x\in L$具有$x\neq f(x)$，存在$y\in O_K(x)$使

$$\|y-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

则f在K内有一不动点。

证明 利用定理2.6和系2.6中证明方法易证本系结论成立。

系2.9 设K是赋范线性空间E的非空闭凸集，$L\subset K$是非空紧集和f: $K\to E$连续，假设

(i) 对一切使$x\neq f(x)$的$x\in K\setminus L$，存在$y_0\in K$使

$$\|y_0-f(x)\|<\|x-f(x)\|$$

(ii) 对每一$x\in L$具有$x\neq f(x)$，有$f(x)\in\overline{O_K(x)}$

则f在K内有一不动点。

证明 与系2.7的证明类似。

注2.7 系2.6至系2.9 均从不同方向上推广了 Schauder 不动点定理。

参 考 文 献

[1] Browder, F. E., On a sharpened form of the Schauder fixed point theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., **74** (1977), 4749—4751.

[2] Ko, H. M. and K. K. Tan, A coincidence theorem with applications to minimax inequalities and fixed point theorems, *Tamkang J. Math.*, **17** (1986), 37—45.

[3] Tan, K. K., Generalizations of F. E. Browder's sharpened form of the Schauder fixed point theorem, *J. Austral. Math. Soc.*, **42** (1987).

[4] Browder, F. E., Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities, *Contemp. Math.*, **26** (1984), 67—80.

Some Coincidence Theorems of Set-Valued Mappings

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

Browder[1] obtained the sharpened forms of the Schauder fixed point theorem. Many authors generalized Browder's results in several aspects. Recently, H. M. Ko and K. K. Tan[2,3] generalized Browder's theorems to the coincidence theorems of set-valued mappings. In this paper, we also show some coincidence theorems of set-valued mappings. They improve and generalize the important results in [1,2,3].