

# 空泡溃灭时的流场\*

黄景泉

(西北工业大学, 1984年11月26日收到)

## 摘 要

本文在 Rayleigh 方法的基础上, 对具有表面张力含汽型空泡的溃灭进行了分析. 导出空泡溃灭时空泡半径、泡壁速度及溃灭压力与时间的函数关系, 并由此给出速度场及压力场的数值解.

## 一、空泡的溃灭过程

考虑无穷域静止状态, 无粘性、不可压缩流体中孤立球形空泡的溃灭. 设空泡的初始半径为  $R_0$ , 在时刻  $t$  半径为  $R$ , 泡壁速度为  $U$ , 从空泡中心计起流场中任意点处的径向距离为  $r$ . 流场中任一点的速度  $u$  和速度势函数  $\phi$  可表为<sup>[1]</sup>

$$\phi = \frac{UR^2}{r}, \quad u = \frac{UR^2}{r^2} \quad (1.1)$$

整个流体在时刻  $t$  的动能为

$$(KE) = \frac{\rho}{2} \int_R^\infty u^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho U^2 R^3 \quad (1.2)$$

式中  $\rho$  为流体密度.

在空泡由初始半径  $R_0$  溃灭到  $R$  的过程中, 外力所做的功计有无穷远处压力  $p_\infty$  所做的功

$$W_{\infty} = \frac{4\pi}{3} (R_0^3 - R^3) p_\infty \quad (1.3)$$

空泡内压力  $p$  所做的功  $W_p = \int_R^{R_0} 4\pi R^2 p dR \quad (1.4)$

空泡的溃灭非常迅速, 空泡体积的变化可视为绝热压缩过程, 因而有

$$p = p_1 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{R} \quad (1.5)$$

其中,  $p_1$  为初始时刻 ( $R=R_0$ ,  $\dot{R}=0$ ) 空泡内的空气压力;  $p_v = p_v(T)$  为空泡内的蒸汽压力;  $\sigma = \sigma(T)$  为流体的表面张力;  $\gamma$  为空气绝热系数;  $T$  为流体温度.

将式(1.5)代入式(1.4), 并积分之得空泡内压力  $p$  所做的功为

$$W_p = \frac{4\pi p_1}{3(1-\gamma)} \left[ R_0^3 - R^3 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \right] + \frac{4\pi p_v}{3} (R_0^3 - R^3) - 4\pi\sigma(R_0^2 - R^2) \quad (1.6)$$

\* 钱伟长推荐.

对于无粘性、不可压缩流体，外力所做的功表现为动能。因此，由式(1.2)，(1.3)及(1.6)有

$$2\pi\rho U^2 R^3 = -\frac{4\pi p_\infty}{3}(R_0^3 - R^3) - \frac{4\pi p_1}{3(1-\gamma)} \left[ R_0^3 - R^3 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \right] - \frac{4\pi p_v}{3}(R_0^3 - R^3) + 4\pi\sigma(R_0^2 - R^2) \quad (1.7)$$

依上式，解得泡壁速度为

$$U = \left\{ \frac{2}{3\rho} (p_\infty - p_v) \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] - \frac{2p_1}{3(1-\gamma)\rho} \cdot \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \right] + \frac{2\sigma}{\rho R} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (1.8)$$

给定初始半径 $R_0$ ，温度 $T$ 和压力 $p_\infty$ ，利用式(1.8)即可求出不同半径 $R$ 时的泡壁速度 $U$ 值，如图1所示（电算结果见附表1）。

由图1可见，泡壁速度随着 $R$ 的减小而迅速增大。当 $R=0.1$ 毫米时，泡壁速度可达 $10^5$ 米/秒的数量级。在整个空泡溃灭的过程中，增大压力 $p_\infty$ ，溃灭速度亦将显著增大。

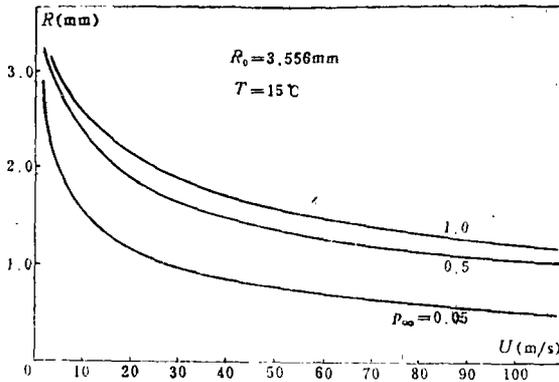


图1  $U-R$ 曲线

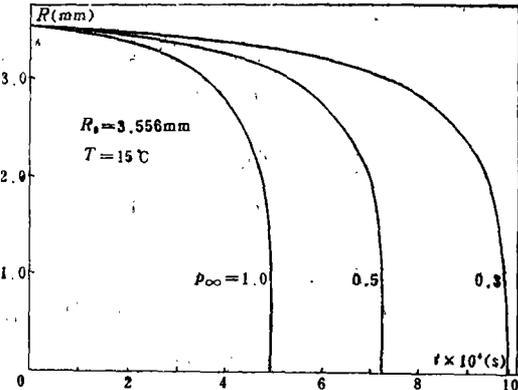


图2  $R-t$ 曲线

在式(1.8)中，令 $U=dR/dt$ ，得出空泡由初始半径 $R_0$ 溃灭至 $R$ 所需的时间

$$t = \int_R^{R_0} \left\{ \frac{2}{3\rho} (p_\infty - p_v) \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] - \frac{2p_1}{3(1-\gamma)\rho} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \right] + \frac{2\sigma}{\rho R} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{-1/2} dR \quad (1.9)$$

对式(1.9)进行数值积分，即可得出不同 $p_\infty$ 下，空泡半径随时间的变化关系，如图2所示（电算结果见附表2）。

当 $p_\infty$ 增大时，溃灭速度亦将增大，因而在图2中溃灭所需的时间也随之减小。由附表2可以看出，在通常的压力下，空泡完全溃灭（溃灭到自由气核状态）所需的时间约为 $10^{-3}$ 秒，因而可以说，空泡的溃灭是瞬时的。

图3给出当 $p_\infty=0.5$ 大气压时，实测数据、本文所述方法及Rayleigh方法所得的计算结果。

图3表明，与Rayleigh方法相比，本文所述方法的结果与实测结果较为一致，Rayleigh

法视空泡为中空空泡，略去空泡内的压力和表面张力的影响，因而与实际结果偏离较大。

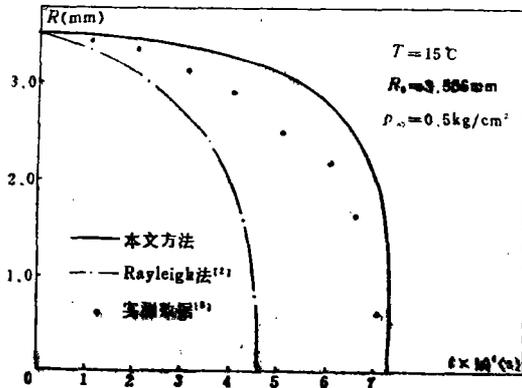


图3 R-t曲线的比较

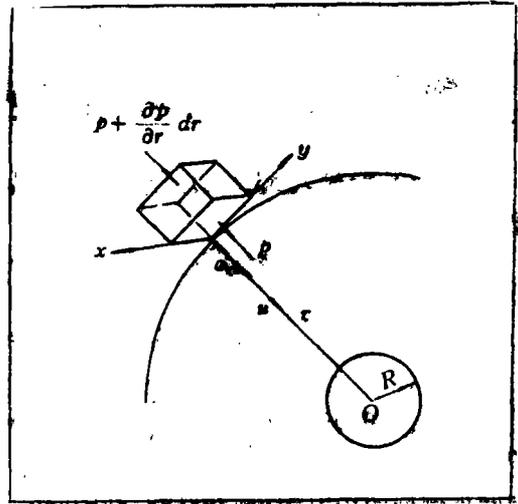


图 4

## 二、速度场和压力场的确定

### 1. 速度场的确定

由图 1 及图 2 可以得出空泡溃灭过程中，任意时刻的空泡半径  $R$  和泡壁速度  $U$ ；代入式 (1.1) 即可得出该瞬时流场中任意点（径向距离为  $r$ ）处的速度

$$u = \frac{R^2 U}{r^2} \quad (2.1)$$

对于空泡群，可以应用毕奥-萨利文定理类似于确定涡线诱导速度的方法来确定任意点处的速度。

### 2. 压力场的确定

考虑径向距离为  $r$  的流体元体积，该处的压力为  $p$ ，速度为  $u$ ，加速度为  $a_r$ 。（参见图 4）。

$$\therefore a_r = -\frac{du}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial r}$$

在元体积上有

$$\rho dx dy dr \cdot a_r = \left( p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right) dx dy - p dx dy$$

$$\therefore a_r = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.2)$$

再由式 (1.1) 有  $u = UR^2/r^2$ ，代入上式得

$$\frac{\rho_\infty R_0^3}{\rho r^3 R^3} + \frac{2U^2 R^4}{r^5} - \frac{2RU^3}{r^3} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.3)$$

对上式由无穷远至  $r$  处进行积分，最后得到

$$p = \left( \frac{2R}{r} - \frac{R^4}{2r^4} \right) U^2 \rho - \frac{p_\infty R_0^3}{r R^2} + p_\infty \quad (2.4)$$

令  $R=R_0$  (开始溃灭的瞬间) 有

$$p = p_\infty \left( 1 - \frac{R_0}{r} \right) \quad (2.5)$$

将式(1.8)代入式(2.4), 给定  $p_\infty$ ,  $R_0$  和  $T$ , 即可求得不同时刻流场中任意点处的压力值。

对于空泡泡壁外侧处 (该处  $r=R$ ), 式(2.4)可简化为

$$p = \left( 2 - \frac{1}{2} \right) U^2 \rho - \frac{p_\infty R_0^3}{R^3} + p_\infty \quad (2.6)$$

当  $p_\infty=0.05 \text{ kg/cm}^2$ ,  $T=15^\circ\text{C}$ ,  $R_0=3.556 \text{ mm}$ ,  $r=R=0.1 \text{ mm}$  时, 由附表 i 查得  $U^2=1.77 \times 10^{13} \text{ mm}^2/\text{s}^2$ , 代入式(2.5)得出在所述情况下, 当空泡溃灭到  $R=0.1 \text{ mm}$  时, 泡壁外侧处的压力为  $p=268668.8 \text{ kg/cm}^2$ 。

本文在讨论中略去了液体粘性的影响。计算表明, 只有比水大得多的粘性才对空泡的发育和溃灭有明显的影晌<sup>[4]</sup>。

表1 泡壁速度  $U$  的计算结果 ( $R_0=3.556 \text{ mm}$ ,  $T=15^\circ\text{C}$ )

	$p_\infty=0.03$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.05$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.3$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.5$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.7$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=1.0$ ( $\text{kg/cm}^2$ )
$R(\text{mm})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$	$U(\text{m/s})$
3.50	0.103	0.092	0.057	0.132	0.196	0.243	0.301
3.00	0.238	0.647	1.151	2.226	2.929	3.494	4.201
2.50	1.041	1.895	3.140	5.911	7.748	9.226	11.079
2.00	2.564	4.348	7.053	13.157	17.218	20.490	24.594
1.50	6.110	10.054	16.139	29.968	39.188	46.618	55.944
1.00	17.184	27.776	44.313	82.051	107.243	127.554	153.046
0.50	83.833	134.273	213.384	394.395	515.327	612.843	735.254
0.10	2640.57	4208.02	6674.16	12324.47	16100.9	19446.5	22969.7

表2 溃灭时间  $t$  的计算结果 ( $R_0=3.556 \text{ mm}$ ,  $T=15^\circ\text{C}$ )

	$p_\infty=0.03$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.05$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.3$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.5$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=0.7$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$p_\infty=1.0$ ( $\text{kg/cm}^2$ )
$R(\text{mm})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$	$t(\text{s})$
3.40	$7.5673 \times 10^{-4}$	$1.0365 \times 10^{-3}$	$1.6043 \times 10^{-3}$	$3.7761 \times 10^{-4}$	$2.6982 \times 10^{-4}$	$2.2121 \times 10^{-4}$	$1.8114 \times 10^{-4}$
3.00	$3.9455 \times 10^{-3}$	$3.5365 \times 10^{-3}$	$2.3821 \times 10^{-3}$	$7.5042 \times 10^{-4}$	$5.5021 \times 10^{-4}$	$4.5634 \times 10^{-4}$	$3.7530 \times 10^{-4}$
2.50	$4.9154 \times 10^{-3}$	$3.9904 \times 10^{-3}$	$2.6474 \times 10^{-3}$	$8.8959 \times 10^{-4}$	$6.5619 \times 10^{-4}$	$5.4428 \times 10^{-4}$	$4.4931 \times 10^{-4}$
2.00	$5.2279 \times 10^{-3}$	$4.1684 \times 10^{-3}$	$2.7660 \times 10^{-3}$	$9.4755 \times 10^{-4}$	$7.0045 \times 10^{-4}$	$5.8145 \times 10^{-4}$	$4.8028 \times 10^{-4}$
1.50	$5.3589 \times 10^{-3}$	$4.2468 \times 10^{-3}$	$2.8045 \times 10^{-3}$	$9.7365 \times 10^{-4}$	$7.2039 \times 10^{-4}$	$5.9821 \times 10^{-4}$	$4.9424 \times 10^{-4}$
1.00	$5.4111 \times 10^{-3}$	$4.2788 \times 10^{-3}$	$2.8245 \times 10^{-3}$	$9.8441 \times 10^{-4}$	$7.2863 \times 10^{-4}$	$6.0513 \times 10^{-4}$	$5.0001 \times 10^{-4}$
0.50	$5.4268 \times 10^{-3}$	$4.2885 \times 10^{-3}$	$2.8306 \times 10^{-3}$	$9.8773 \times 10^{-4}$	$7.3116 \times 10^{-4}$	$6.0727 \times 10^{-4}$	$5.0179 \times 10^{-4}$
1.10	$5.4287 \times 10^{-3}$	$4.2897 \times 10^{-3}$	$2.8314 \times 10^{-3}$	$9.8813 \times 10^{-4}$	$7.3147 \times 10^{-4}$	$6.0752 \times 10^{-4}$	$5.0200 \times 10^{-4}$
0.001	$5.4287 \times 10^{-3}$	$4.2897 \times 10^{-3}$	$2.8314 \times 10^{-3}$	$9.8813 \times 10^{-4}$	$7.3147 \times 10^{-4}$	$6.0752 \times 10^{-4}$	$5.0200 \times 10^{-4}$

## 参 考 文 献

- [1] Knapp, R. T., J. W. Daily and F. G. Hammitt, *Cavitation*, McGraw-Hill, New York (1970).
- [2] Rayleigh, Lord., On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity, *Phil. Mag.*, 34, August (1917), 94—98.
- [3] Knapp, R. T and A. Hollander, Laboratory investigations of the mechanism of cavitation, *Trans. ASME*, 70 (1948), 419—436.
- [4] Poritsky, H., The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid, *Proc. First U. S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, (ASME)(1952), 813—821.

## Flow Field at Collapse of a Cavity

Huang Jing-chuan

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

### Abstract

Employing the Rayleigh's method, the collapse of a vaporous bubble in an incompressible liquid with surface tension is analysed. The expressions of time versus radius, bubble-wall velocity and pressure developed at collapse are thus introduced.

Finally, the numerical solution of velocity and pressure field in the liquid surrounding the cavity is also given.