

# 矩形板不对称侧向屈曲中若干问题

成祥生

(同济大学, 1987年7月1日收到)

## 摘 要

本文用能量法研究了矩形板不对称侧向屈曲的几个问题。文中讨论了具有不对称支承的矩形板分别在有集中力, 均布荷载及集中力偶作用之下发生不对称侧向屈曲时的最小的临界荷载。

## 一、引 言

由于要写出板的侧向屈曲的微分方程在数学上有很大的困难, 所以使用能量法来研究板的侧向屈曲问题比较适宜的。为了求出矩形板在发生不对称侧向屈曲时的最小的临界荷载, 我们应用了Rayleigh-Ritz法求出当屈曲系统的总势能为驻值时的最小的荷载。

我们可将薄板的侧屈过程分为两个阶段。设坐标取成如图1所示。在第一阶段中, 薄板在铅直平面内弯曲; 在第二阶段中, 薄板在临界荷载下产生扭转并偏离了原先的铅直平面朝侧向弯曲。显然, 薄板在铅直平面内弯曲的第一阶段中, 它和外荷载处于平面形式的平衡状态; 由于在板的中面内(在铅直面内)的刚度很大, 故可将第一阶段中薄板在铅直平面内弯曲时的总势能近似地看成为零; 于是在分析薄板发生侧向屈曲的全过程中的总势能时, 这部份总势能可被忽略掉, 不需要将它们考虑进去。从而只需研究在第二阶段中薄板的总势能。这如同在研究压杆屈曲时, 不考虑直杆在弯曲前的轴向变形一样。

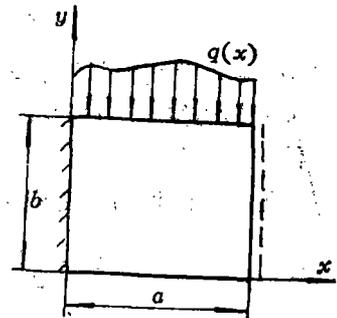


图 1

## 二、方 法

设有一各向同性等厚矩形板, 在弯曲时整个系统的形变势能是<sup>[1]</sup>

$$U = \frac{D}{2} \iint [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}^2] dx dy \quad (2.1)$$

其中  $D$  是板的弯曲刚度, 并且  $D = Gh^3/12(1-\mu^2)$ ,  $G$ ,  $h$ ,  $\mu$  分别为板材料的弹性模量, 厚度和泊松比。  $w$  为挠曲函数;  $w_{xx}$ ,  $w_{yy}$  等为挠曲函数对相应下标的偏导数; 以上二重积分遍及板的中面区域。

• 潘立宙推荐。

若薄板(见图1)在顶边( $y=b$ )受分布的中面荷载作用而屈曲,则外力的势能可表示为

$$V = - \int_0^a q(x) \Delta_y(x) dx \quad (2.2)$$

其中 $q(x)$ 为位于板中面内并沿 $y$ 方向作用而沿 $x$ 轴分布的荷载, $\Delta_y(x)$ 为板发生侧向弯曲时,荷载 $q$ 的作用点在铅直方向(沿 $y$ 轴)的位移,它们都是坐标 $x$ 的函数.上面的积分是沿着荷载作用的边界( $y=b$ )上进行的.

于是系统的总势能为

$$\Pi = U + V \quad (2.3)$$

根据Rayleigh-Ritz法,系统达到稳定平衡的极限时,其总势能应为最小值,即

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.4)$$

从而可确定最小的临界荷载.

在公式(2.1)中的挠曲函数 $w(x,y)$ 应事先选择,使它满足薄板的全部几何边界条件.

### 三、矩形板不对称侧向屈曲的几种情形

**情形A** 设有一矩形板,一边夹支,对边简支,另外两对边自由,在顶边(自由边 $y=b$ )上的中点 $E(a/2,b)$ 有一铅直的集中力 $P$ 作用,如图2所示.今选取如下的挠曲函数

$$w = \left( f_1 + \frac{f_2 - f_1}{b} y \right) \left( \cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a} \right) \quad (3.1)$$

其中 $a$ 和 $b$ 分别为薄板沿 $x$ 轴和 $y$ 轴边的长度,而 $f_1$ 和 $f_2$ 分别为矩形板下面和上面自由边的最大的横向挠度,它们都是未知的参数.容易看出,函数(3.1)能满足该薄板的全部几何边界条件.

先计算薄板的形变势能,为此将函数(3.1)代入(2.1)进行积分可得

$$U = \frac{1}{2} \left[ (A+B)f_1^2 + (A+B)f_2^2 + (A-2B)f_1f_2 \right] \quad (3.2)$$

其中

$$A = \frac{41}{48} \pi^4 \frac{b}{a^3} D, \quad B = \frac{5}{2} \pi^2 \frac{1-\mu}{ab} D \quad (3.3)$$

再计算外力的势能 $V$ ,因为在(2.2)中的 $\Delta_y(x)$ 由几何分析可知

$$\Delta_y(x) = \frac{1}{2} (w \cdot w_y)_E \quad (3.4)$$

其中下标 $E$ 表示该括号中的量应取点 $E(a/2,b)$ 处的值.

由(2.2)计算外力的势能,若注意到(3.4),则得到

$$V = - \frac{1}{2} P (w \cdot w_y)_E$$

将(3.1)代入上式可得

$$V = - \frac{1}{b} P (f_2^2 - f_1 f_2) \quad (3.5)$$

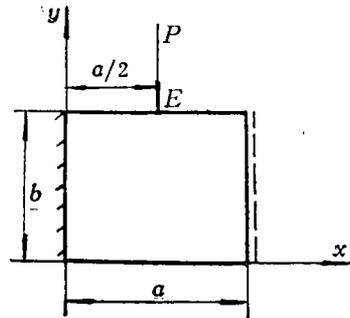


图 2

将(3.2)和(3.5)代入(2.3)并由(2.4)对两个参数 $f_1$ 和 $f_2$ 进行变分,可得到下面关于参数 $f_1$ 和 $f_2$ 的齐次线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} 2(A+B)f_1 + (A-2B+2C)f_2 &= 0 \\ (A-2B+2C)f_1 + 2(A+B-2C)f_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中

$$C = P/b \quad (3.7)$$

求方程组(3.6)的非零解,则必须上式的系数行列式为零,于是得到板的稳定性方程

$$4C^2 + 12AC - 3A(A+4B) = 0 \quad (3.8)$$

由此可求出它的最小的正实根

$$C = \frac{1}{2}(-3A + 2\sqrt{3A(A+B)}) \quad (3.9)$$

注意到(3.3)和(3.7),可得到该矩形板在集中力 $P$ 作用之下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{4a} \left\{ -\frac{41}{8} \pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \pi \frac{b}{a} \sqrt{41 \left[ \frac{41}{48} \pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{5}{2}(1-\mu) \right]} \right\} \quad (3.10)$$

对于方板的情形,于是 $b/a=1$ ,若取 $\mu=0.3$ ,可得

$$P_{cr} = 33.56036D/a \quad (3.11)$$

这个数值正好介于每一对支承边分别都为简支和都为夹支的方板的最小临界荷载值

$18.44293D/a$ 和 $41.80256D/a$ 之间<sup>[2]</sup>。

**情形B** 设有一矩形板,其支承和情形A相同,在顶边(自由边 $y=b$ )上有一均布荷载 $q_0$ 作用,如图3所示。

在这问题中,挠曲函数仍应用(3.1)式,故形变势能也和(3.2)式相同.由(2.2)可计算外力的势能,注意到(3.4)并将(3.1)代入(2.2)进行积分可得

$$V = -\frac{1}{2} \frac{a}{b} q_0 (f_1 - 2f_2) \quad (3.12)$$

类似于情形A的计算,可得到该矩形板在均布荷载 $q_0$ 作用之下发生侧向屈曲时的最小临界荷载

$$(q_0)_{cr} = \frac{\pi^2}{2a^2} D \left\{ -\frac{41}{8} \pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \pi \frac{b}{a} \sqrt{41 \left[ \frac{41}{48} \pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{5}{2}(1-\mu) \right]} \right\} \quad (3.13)$$

对于方板的情形, $b/a=1$ ,若取 $\mu=0.3$ ,可得

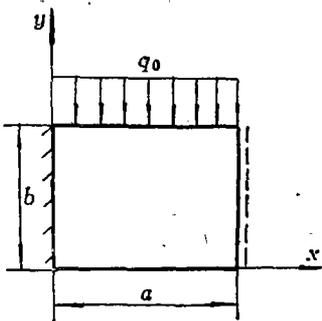


图 3

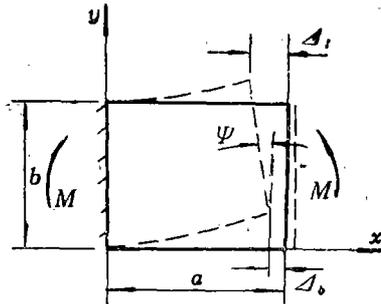


图 4

$$(q_0)_{cr} = 67.12072D/a^2 \quad (3.14)$$

这个数值正好介于每一对支承边分别都为简支和都为夹支的方板的最小临界荷载值  $36.88483D/a^2$  和  $111.47349D/a^2$  之间<sup>[2]</sup>。

如果在前两种情形中将荷载  $P$  或  $q_0$  作用的水平线降低, 例如从  $y=b$  降低到  $y=b/2$  或  $y=0$ , 则矩形薄板发生不对称侧向屈曲时的最小临界荷载将提高。

**情形C** 设有一矩形板, 其支承与上两种情形相同, 在被支承的两端各作用一力偶  $M$ , 如图 4 所示。

在这情形下, 挠曲函数和形变势能仍然分别和 (3.1) 式和 (3.2) 式相同, 外力的势能应用下式来计算

$$V = -M\Psi \quad (3.15)$$

角  $\Psi$  如图中所示, 并且

$$\Psi = (\Delta_1 - \Delta_2)/b \quad (3.16)$$

其中  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  的意义也如图 4 中所示, 其值按如下的公式计算

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \int_0^a (w_1^2)_{y=0} dx, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \int_0^a (w_2^2)_{y=b} dx \quad (3.17)$$

将挠曲函数 (3.1) 代入 (3.17) 进行积分, 并由 (3.16) 和 (3.15) 可得

$$V = -\frac{5}{8} \frac{\pi^2}{ab} M(f_2^2 - f_1^2) \quad (3.18)$$

进行类似于以前的计算, 可得到该矩形板在一对集中力偶  $M$  作用之下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$M_{cr} = \frac{\pi}{10} \frac{b}{a} D \sqrt{41 \left[ \frac{41}{48} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} + 10(1-\mu) \right]} \quad (3.19)$$

对于方板,  $b/a=1$ , 取  $\mu=0.3$ , 则得

$$M_{cr} = 7.90184D \quad (3.20)$$

这个数值也正好介于每一对支承边分别都为简支和都为夹支的方板的最小临界荷载值  $4.68347D$  和  $13.60691D$  之间<sup>[2]</sup>。

## 四、结 束 语

本文给出了为计算具有不对称支承的矩形板在几种受力情形下发生不对称侧向屈曲时的最小临界荷载的方法。所求得各个临界荷载的值都和薄板的弯曲刚度及边长比有关。由于所选用的挠曲函数不是唯一的, 故由不同的挠曲函数所得到的解答一般也不相同, 近似解的好坏主要取决于所选的函数。

## 参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability* (1936).  
 [2] 成祥生, 矩形板的侧屈, 应用数学和力学, 10, 1 (1989), 79—94.

## On Some Problems for Unsymmetrically Lateral Buckling of Rectangular Plates

Cheng Xiang-sheng  
(Tongji University, Shanghai)

### Abstract

The present paper investigates several problems for unsymmetrically lateral instability of rectangular plates by the energy method. In the text we discuss the minimum critical load of rectangular plates which possess the unsymmetrical supporters and to which the lateral buckling occurs unsymmetrically under a concentrated force, uniformly distributed and the concentrated couples respectively.