

论拖带坐标系中应力的客观速率

尚 勇 陈至达

(中国矿业大学北京研究生部, 1987年11月28日收到)

摘 要

应力客观速率是有限变形力学中一个十分重要的问题, 本文利用非线性几何场论方法, 推导出拖带坐标系中应力客观速率公式, 并应用新公式计算了拉伸、拉伸与转动复合、简单剪切大变形问题。通过将计算结果与用 Jaumann 等其它应力速率计算的结果进行比较, 说明了本文所得结果是合理的。

一、引 言

应力客观速率在有限变形力学中占有相当重要之地位。近年来, 就应力客观速率的表达式引起许多争论, 这些争论之起因主要在于对有限变形的参考系存在着不同的观点所致。有关应力客观速率, 目前已有几种不同形式的定义, 但常用的是 Jaumann 应力客观速率。另外, Green-Naghdi 应力速率^[4]和 Truesdell 应力速率^[5]也在文献中经常出现。尽管这些客观速率的表示形式不同, 但其意图皆在保持变形过程中应力速率的客观性。近期, Atluri^[2]对此问题进行了较详细的评述, 并提出了他的观点, 企图解决这些争论。

在本文中, 作者应用拖带坐标系描述法和变形梯度和分解定理(速率形式)^[1], 推导出了拖带坐标系中应力客观速率的表达式, 并应用新公式求解了拉伸、拉伸与转动复合、简单剪切大变形问题, 最后将本文结果同各家理论所得结果进行了比较。

二、现有应力客观速率的简评

令 \mathbf{F} 指形变梯度, \mathbf{L} 指速度梯度。 \mathbf{L} 可分解为两部分: \mathbf{D} 为对称部分, \mathbf{W} 为反对称部分, 对称部分为形变速率张量, 反对称部分为转动速率张量。

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.1)$$

根据极分解定理, 可以定义另一种形式的转动速率张量:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.2)$$

设 σ 为变形后位形上定义的 Cauchy 应力。应力的 Jaumann (J) 速率, Green-Naghdi (GN) 速率和 Truesdell (T) 速率可分别定义为:

$$\mathbf{v}^J = \dot{\sigma} - \mathbf{W}\sigma + \sigma\mathbf{W} \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^{GN} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega} \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^T = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\sigma}\text{tr}(\mathbf{D}) \quad (2.5)$$

应力的 (J), (GN), (T) 客观速率表达形式虽异, 但其间有相互联系, 它们分别依据 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$, 无转动 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 和 Piola-Kirchhoff 应力 \mathbf{S} 来定义的, 这三种应力定义的关系为:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1/J)\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\tau} = (1/J)\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} \quad (2.7)$$

其中: $J = \det(\mathbf{F}) > 0$. 以上三种形式的应力速率定义, 都是建立在同一假定基础上, 即通过施加一刚性转动, 可得从一个位形到另一位形的变换, 设 \mathbf{X} , \mathbf{X}^* 表示两相邻位形中对应点位置则:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{a}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{X} \quad (2.8)$$

其中 $\mathbf{a}(t)$ 代表刚性平移, $\mathbf{R}(t)$ 是表示刚性转动的正交张量. 显然, 在变形体上施加刚性转动是欠合理的, 它并不能真实地体现客观存在于变形过程中的变形转动^[11].

以上三种应力客观速率哪种表示更为合理? 如何选择使用? 对此许多研究者从理论上和通过实例验证进行了讨论、分析. Bazant^[8]指出: Jaumann 速率是客观的, 但没有同它相耦合的有限应变和有限应变速率. 而 Johnson 和 Banmann^[6]则强调: 由于 Jaumann 应力速率的不稳定性, 它是不能被接受的. 最近, Molenkamp 在文[7]中专门讨论了“Jaumann 应力速率的使用界限”问题, 指出: 对于应变偏量大于 10% 的中等变形, Jaumann 速率是不精确的, 而由极分解定理得到的应力客观速率 (GN) 在此情况下更好一些. W. C. Moss^[8]通过简单剪切大变形问题的分析得出结论: 这三种应力速率都存在有解的非单调性与非稳定性问题, 对于物理问题所获解的不稳定性, 主要在于描述物理模型所用的数学结构上的不合理性.

用拖带坐标描述连续介质变形场, 是当今被认为是一种合理、正确的方法, 我们将抛弃以上用假定附加刚性转动来推导应力客观速率的方法, 直接利用拖带坐标系中应力的定义来导出应力的客观速率公式.

三、拖带坐标系下应力客观速率的推导

在实时 (当前) 位形上, 当地拖带系 x^i 的坐标面包围的微元面 ABC , 其面积为:

$$d\mathbf{A} = da_i \mathbf{g}^i \quad (3.1)$$

$$da_i = \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} dx^j dx^k$$

da_i 为面积的一阶协变分量, \mathbf{g}^i 为基矢量, ϵ_{ijk} 为置换张量.

在该面上作用的内力 (合力) 矢量为 \mathbf{T} , 应力矢量为 $\boldsymbol{\sigma}^i$, 应力张量的分量为 σ^{ij} , σ^i_j , 沿拖带坐标系应力可定义为:

$$\mathbf{T} = t d\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma}^i da_i = \sigma^{ij} da_i \mathbf{g}_j = \sigma^i_j da_i \mathbf{g}^j \quad (3.2)$$

以拖带系现以实时位形为基准, 来考察内

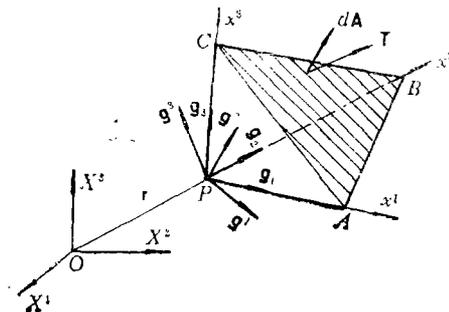


图 1

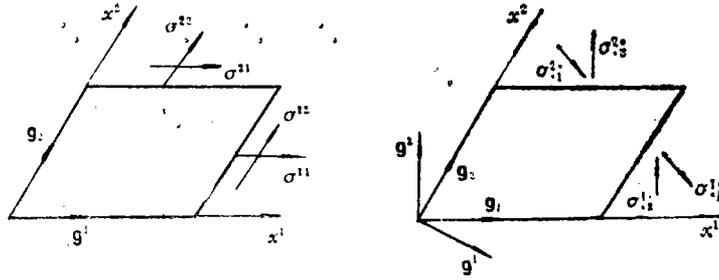


图 2

力矢量 \mathbf{T} 对时间的变化率:

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\sigma}^i_j da_i g^j + \sigma^i_j da_i \dot{g}^j + \sigma^i_j da_i g^j + \sigma^i_j d\dot{a}_i g^j \quad (3.3)$$

上标“ \cdot ”表示“ $\partial/\partial t$ ”。

又因为:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j \quad (3.4)$$

两边相对 t 求导数得:

$$\dot{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j = -\mathbf{g}^i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j$$

又

$$\dot{\mathbf{g}}_j = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} = V^i \parallel_j \mathbf{g}_i \quad (3.5)$$

(\parallel_j)表示相对于 \mathbf{g}_i 的协变导数。由以上关系有:

$$\dot{\mathbf{g}}^j = -V^j \parallel_i \mathbf{g}^i \quad (3.6)$$

求 $d\dot{a}_i$ 可通过以下途径,据(3.1)式,将两边求 t 的导数得:

$$d\dot{a}_i = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk}) dx^j dx^k = \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}) dx^j dx^k \quad (3.7)$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)] = V^i \parallel_i \sqrt{g} \quad (3.8)$$

故

$$d\dot{a}_i = V^i \parallel_i da_i \quad (3.9)$$

将(3.6)和(3.8)式代入(3.3)中,即得:

$$\dot{\mathbf{T}} = (\dot{\sigma}^i_j + \sigma^i_j V^i \parallel_i - \sigma^i_j V^i \parallel_j) da_i g^j \quad (3.10)$$

据 S-R 定理的速率形式^[1]:

$$V^i \parallel_j = L^i_j \dot{\vartheta} + \dot{S}^i_j, \quad V^i \parallel_i = \dot{S}^i_i \quad (3.11)$$

其中: \dot{S}^i_j 为以实时位形为基准的有限应变率, $L^i_j \dot{\vartheta}$ 为以实时位形为基准的转动速率,代入到(3.10)式得到:

$$\dot{\mathbf{T}} = [\dot{\sigma}^i_j - \sigma^i_j \dot{S}^i_i + \sigma^i_j \dot{S}^j_j] da_i g^j - \sigma^i_j L^i_k \dot{\vartheta} da_i g^j \quad (3.12)$$

上式最后一项表示整体转动的影响。注意拖带坐标系的一个重要性质是以实时位形为基准,整体转动对 \mathbf{T} 的影响成分系非本质部分,应消除。设 $PABC$ 微元体作整体转动(如图3), ABC 面上的力矢量 \mathbf{T} 相对 $PABC$ 不变,则 \mathbf{T} 因整体转动改变的成分为:

$$\dot{\mathbf{T}}_e = \mathbf{L} \dot{\vartheta} \times \mathbf{T} = \mathbf{L} \dot{\vartheta} \times \sigma^i_j da_i g^j \quad (3.13)$$

不难证明:

$$\dot{\mathbf{T}}_e = \sigma^i_j L^i_k \dot{\vartheta} da_i g^j = -\sigma^i_j L^j_k \dot{\vartheta} da_i g^j \quad (3.14)$$

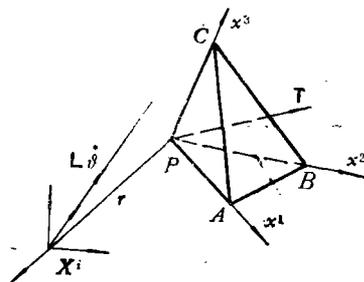


图 3

消去整体转动影响项后, 找出真应力速率为

$$\nabla_i^j \equiv \dot{\sigma}_i^j - \sigma_i^k \dot{S}_k^j + \sigma_i^j \dot{S}_k^k \quad (3.15)$$

∇_i^j 由下式定义

$$\dot{\mathbf{T}}_i = \dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_s = \nabla_i^j \dot{a}_j \mathbf{g}^j \quad (3.16)$$

同理, 若利用应力二阶逆变分量的表达式, 则有

$$\nabla^{ij} \equiv \dot{\sigma}^{ij} + \sigma^{ik} \dot{S}_k^j + \sigma^{ij} \dot{S}_k^k \quad (3.17)$$

考虑到拖带坐标系的基矢一般非单位无量纲矢量,

若保证应力速率正确的物理量纲, 需将(3.15)、(3.17)

式化成物理分量的形式 (有关应力物理分量定义见文[9]), 最后得客观应力速率的物理分量公式:

$$\hat{\nabla}_i^j \equiv \hat{\sigma}_i^j - \hat{\sigma}_i^k \hat{S}_k^j + \hat{\sigma}_i^j \hat{S}_k^k \quad (3.18)$$

$$\hat{\nabla}^{ij} \equiv \hat{\sigma}^{ij} + \hat{\sigma}^{ik} \hat{S}_k^j + \hat{\sigma}^{ij} \hat{S}_k^k \quad (3.19)$$

从以上公式及推导过程可见, 影响应力速率的因素有三部分: 一是应力自身的变化率, 二是由于位形的改变 (即基矢变化) 而引起的应力的变化, 三是因为作用面面积的变化而对应力变化率产生的影响。为了更清楚地理解本文关于应力客观速率的定义, 这里还应就以下两点加以说明: 其一是在拖带坐标系中的应力客观速率的定义中应排除整体转动项的影响, (即张量形式应采用(3.15)、(3.17)式而不采用(3.10)式, 其二是采用物理分量形式而不采用张量形式, 这在物理意义上是合理的。拉伸与转动复合大变形问题是验证以上两点的典型算例, 只有应用(3.18)或(3.19)式, 才能得到正确结果。

在实际应用中, 对应力率求积分时, 应采用应力的普通 (物质) 速率, 即:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{\sigma}_i^j &= \int_t^{t+\Delta t} \hat{\sigma}_i^j dt \\ \Delta \hat{\sigma}^{ij} &= \int_t^{t+\Delta t} \hat{\sigma}^{ij} dt \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Δt 表示时间增量。

而对于非线性弹性力学, 构成物性方程的是应力的客观速率 $\hat{\mathbf{v}}$, 即

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{C} : \hat{\mathbf{S}} \\ \hat{\nabla}_i^j &= C_i^j k \hat{S}_k^l, \hat{\nabla}^{ij} = C^{ijkl} \hat{S}_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

二者不可混淆。

四、实例验证

1. 单向拉伸大变形 (平面形变)

设运动变换函数为:

$$X^1 = (1 + \phi)x^1, \quad X^2 = x^2, \quad X^3 = x^3$$

其中 X^i 为固定坐标, x^i 为拖带坐标, $t=0$, $x^i = X^i$ 。

变形梯度,

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(1+\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

度规张量:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (1+\phi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

速度梯度:

$$[V^i_{,j}] = [\dot{F}] = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [V^i_{||j}] = [F]^{-1}[\dot{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}}{1+\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

物理分量:

$$[\hat{V}^i_{||j}] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}}{1+\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\hat{S}^i_{||j}]$$

由物性方程:

$$\hat{V}^i_{||j} = 2G \left(\delta^i_{||j} \delta^k_{||k} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta^i_{||j} \delta^k_{||k} \right) \hat{S}^k_{||k}$$

上式中 G 是弹性剪切模量, ν 是泊松比. 结合应力客观速率公式 (3.18), 可得:

$$\hat{V}^1_{||1} = \frac{\partial \hat{\sigma}^1_{||1}}{\partial t} = (2G + \lambda) \dot{\phi} / (1 + \phi) \quad \left(\lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \right)$$

$$\hat{V}^2_{||2} = \frac{\partial \hat{\sigma}^2_{||2}}{\partial t} + \hat{\sigma}^2_{||2} \dot{\phi} / (1 + \phi) = \lambda \dot{\phi} / (1 + \phi)$$

$$\hat{V}^3_{||3} = \frac{\partial \hat{\sigma}^3_{||3}}{\partial t} + \hat{\sigma}^3_{||3} \dot{\phi} / (1 + \phi) = \lambda \dot{\phi} / (1 + \phi)$$

$$\hat{V}^i_{||j} = 0 \quad i \neq j$$

解以上微分方程并考虑初始条件:

$$\hat{\sigma}^i_{||i} |_{t=0} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3)$$

得到该问题的解为:

$$\hat{\sigma}^1_{||1} = (2G + \lambda) \ln(1 + \phi), \quad \hat{\sigma}^2_{||2} = \hat{\sigma}^3_{||3} = \lambda \frac{\phi}{1 + \phi}, \quad \hat{\sigma}^i_{||j} = 0 \quad i \neq j$$

简单拉伸是大变形问题中最简单一例, 但该例可较清楚地说明应力客观速率的意义. 从 $t=t^0$ 位形变形到 $t=t'$ 位形, $\hat{\sigma}^1_{||1}$ 的作用面未变, 而 $\hat{\sigma}^2_{||2}$ 和 $\hat{\sigma}^3_{||3}$ 的作用面增大, 即:

$$A^2_{||2} = (1 + \phi) A^2_{||2}, \quad A^3_{||3} = (1 + \phi) A^3_{||3}, \quad A^1_{||1} = A^1_{||1}$$

大变形理论是一个准确理论, 它将微元体几何形状的变化对应力度量的影响已自动计入. 当变形微小, $\phi \ll 1$, 上面应力公式化为小变形结果.

严格说来, 小变形弹性理论的虎克定律, 因不考虑在实际受力条件下本身几何形状的改变, 变量仅是定义在形变前位形上, 所以全量形式的应力-应变关系并不完全适合于大变形. 增量形式定律以瞬时位形为基准, 便可以适当应用于大变形过程. 但仍有一些理论问题需要更深入探讨.

2. 伸长与转动复合大变形问题 (平面形变)

设运动变换函数为:

$$X^1 = [1 + \phi(t)] \cos \theta(t) x^1 - \sin \theta(t) x^2$$

$$X^2 = [1 + \phi(t)] \sin\theta(t) x^1 + \cos\theta(t) x^2$$

$$X^3 = x^3$$

其中: $\phi = \phi(t)$ 为 x^1 方向伸长量, $\theta = \theta(t)$ 为转动角。

变形梯度:

$$[F] = \begin{bmatrix} (1+\phi)\cos\theta & -\sin\theta \\ (1+\phi)\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta}{1+\phi} & \frac{\sin\theta}{1+\phi} \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

度规张量:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (1+\phi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

速度梯度:

$$[V^i_j] = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}(1+\phi)\sin\theta + \dot{\phi}\cos\theta & -\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\theta}(1+\phi)\cos\theta + \dot{\phi}\sin\theta & -\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$[V^i_{||j}] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}}{1+\phi} & -\frac{\dot{\theta}}{1+\phi} \\ (1+\phi)\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

化成物理分量:

$$[\hat{V}^i_j] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}}{1+\phi} & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

应变率物理分量可表示成:

$$[\hat{S}^i_j] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}}{1+\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

到此不必继续求解即可看出, 该问题可得到与单纯拉伸大变形例同样的结果, 整体转动对拖带坐标系中的解无影响。

从以上二个基本例已看出客观应力速率公式导出和经验符合的结果。

3. 简单剪切大变形 (弹性解)

验证不同形式的应力客观速率公式, 基本上都采用简单剪切大变形这一典型算例。不同

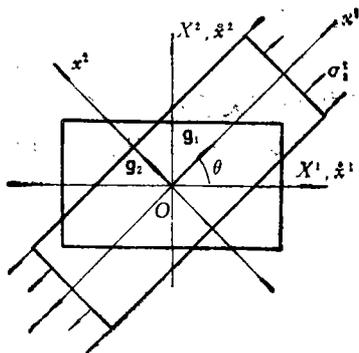


图 4

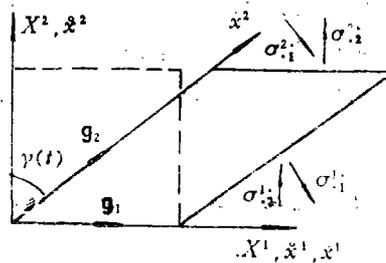


图 5

的应力客观速率定义, 得到不同的结果.

设变换函数为: (平面形变)

$$X^1 = x^1 + k(t)x^2, \quad X^2 = x^2, \quad X^3 = x^3$$

其中:

$$k(t) = \operatorname{tg} \gamma(t)$$

变形梯度:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & k(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

度规张量:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1+k^2 \end{bmatrix}$$

速度梯度:

$$[V^i_{;j}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[V^i \parallel_j] = [F]^{-1} [V^i_{;j}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化成物理分量为:

$$[\hat{V}^i \parallel_j] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/\sqrt{1+k^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

应变率物理分量为:

$$[\hat{S}^i_j] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{k}}{\sqrt{1+k^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\dot{k}}{\sqrt{1+k^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

利用公式 (3.18) 整理得到:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_1^1}{\partial t} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_1^1 \dot{k} / \sqrt{1+k^2}, \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_2^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_2^2 \dot{k} / \sqrt{1+k^2}$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_1^2}{\partial t} = G \dot{k} / \sqrt{1+k^2} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_1^2 \dot{k} / \sqrt{1+k^2}$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_2^1}{\partial t} = G \dot{k} / \sqrt{1+k^2} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_2^1 \dot{k} / \sqrt{1+k^2}$$

令 $d\tilde{k} = dk / \sqrt{1+k^2}$, 求解以上微分方程组, 并利用初始条件: $\hat{\sigma}_i^j|_{t=0} = 0$, 可得

$$\hat{\sigma}_1^1 = \hat{\sigma}_2^2 = G(\exp[\tilde{k}/2] - \exp[-\tilde{k}/2])$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^1 = G(\exp[\tilde{k}/2] + \exp[-\tilde{k}/2]) - 2G$$

将 $\tilde{k} = \ln(k + \sqrt{1+k^2})$ 代换, 最后得到:

$$\hat{\sigma}_1^1 = \hat{\sigma}_2^2 = G[(k + \sqrt{1+k^2})^{\frac{1}{2}} + (k + \sqrt{1+k^2})^{-\frac{1}{2}} - 2]$$

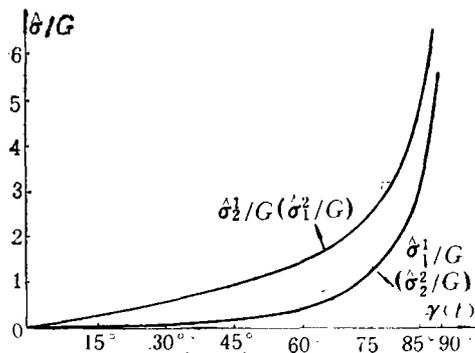
$$\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^1 = G[(k + \sqrt{1+k^2})^{\frac{1}{2}} - (k + \sqrt{1+k^2})^{-\frac{1}{2}}]$$

$\hat{\sigma}_i^j$ 在 $\gamma(t)$ 几个特殊点的值及 $\hat{\sigma}_i^j$ 随 $\gamma(t)$ 的变化规律曲线如下, 由此可看出, $\hat{\sigma}_1^1$ 和 $\hat{\sigma}_2^2$ 在 $\gamma(t)$ 小时, 相对于 $\hat{\sigma}_1^2$ 和 $\hat{\sigma}_2^1$ 呈高阶效应, 随着 $\gamma(t)$ 增大, $\hat{\sigma}_1^1$, $\hat{\sigma}_2^2$ 逐渐和 $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^1$ 同阶. 并且, 本文利用应力客观速率新定义所求该问题的解是单调的、稳定的. 结果是合理的.

表 1

 $\bar{\sigma}-\gamma(t)$ 值

$\gamma(t)$	15°	30°	45°	60°	75°	86°
$\bar{\sigma}_1^1/G$	0.017	0.076	0.197	0.449	1.119	2.995
$\bar{\sigma}_2^1/G$	0.288	0.588	0.910	1.414	2.393	4.577

图6 $\bar{\sigma}-\gamma(t)$ 曲线

五、结果比较

在本文之前，许多研究者曾经提出一些不同的应力客观速率表达式。但这些表达式不能合理地描述客观速率。为了得到正确结果，应注意二个要点：

(1) 合理选择变形体运动的描述。在本文中，应力是定义在拖带（嵌合）系，使我们可以描述其本质改变量。

(2) 刚体转动的概念实际上不能物体发生变形时。讨论变形体的非经典性转动概念可参考文献[11]。

附表列出文献中所见一些应力客观速率的表示式以供比较（表2）。

表 2

序号	定义分类	应力客观速率公式	弹性剪切大变形问题的解	备注
1	本文	$\mathbf{V} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \cdot \dot{\mathbf{S}} + \sigma \text{tr}(\mathbf{e})$ (在拖带系)	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = G [(k + \sqrt{1+k^2})^{1/2} + (k + \sqrt{1+k^2})^{-1/2} - 2]$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = G [(k + \sqrt{1+k^2})^{1/2} - (k + \sqrt{1+k^2})^{-1/2}]$ $k \equiv \text{tg} \psi(t) \quad (\text{物理分量})$	$\mathbf{T} = \sigma_i^j d\alpha_i g^j$ $= \sigma_i^j d\alpha_i g^j$ $\hat{\mathbf{S}}^j = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{V}}_{ j} + \hat{\mathbf{V}}_{ j}^T)$
2	Jaumann	$\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}$	$\tau_{11} = -\tau_{22} = G[1 - \cos k(t)]$ $\tau_{12} = \tau_{21} = G \sin k(t)$	$\mathbf{e} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{L} + \mathbf{W}$ (下同)
3	Truesdell	$\mathbf{V}_1 = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T + \mathbf{T} \text{tr}(\mathbf{e})$	$\tau_{11} = 4Gk^2, \quad \tau_{22} = 0$ $\tau_{12} = \tau_{21} = Gk$	$\mathbf{V}_1 = \frac{D\mathbf{V}_{T,MN}}{Dt} - \mathbf{g}^M \mathbf{g}^N$
4	Green-Naghdı	$\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}$	$\tau_{11} = -\tau_{22} = 4G(\cos 2\beta \ln(\cos \beta) + \beta \sin 2\beta - \sin^2 \beta)$ $\tau_{12} = \tau_{21} = 2G \cos 2\beta (2\beta - 2 \text{tg} 2\beta \ln(\cos \beta) - \text{tg} \beta)$ $\beta = \text{tg}^{-1}(k/2)$	$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T$ $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$
5	Cotter-Rivlin	$\mathbf{V}_2 = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}$	$\tau_{11} = 0, \quad \tau_{22} = -Gk^2$ $\tau_{12} = \tau_{21} = Gk$	$\mathbf{V}_2 = \frac{D\mathbf{V}_{T,MN}}{Dt} - \mathbf{g}^M \mathbf{g}^N$
6	混合-杂交 I	$\mathbf{V}_3 = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}$	$\tau_{11} = G(1 - \cos k), \quad \tau_{22} = 0$ $\tau_{12} = G \sin k, \quad \tau_{21} = Gk$	$\mathbf{V}_3 = \frac{D\mathbf{V}_{T,MN}}{Dt} - \mathbf{g}^M \mathbf{g}^N$
7	混合-杂交 II	$\mathbf{V}_4 = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^T$	$\tau_{11} = G(1 - \cos k), \quad \tau_{22} = 0$ $\tau_{12} = Gk, \quad \tau_{21} = G \sin k$	$\mathbf{V}_4 = \frac{D\mathbf{V}_{T,MN}}{Dt} - \mathbf{g}^M \mathbf{g}^N$

参 考 文 献

- [1] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿业大学出版社(1988).
- [2] Atluri, S. N., On the constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **43** (1984), 137—171.
- [3] Bazant, Z. P., A correlation study of formulations of incremental deformations and stability of continuous bodies, *J. Appl. Mech.*, **39** (1971), 918.
- [4] Green, A. E. and P. M. Naghdi, A general theory of elastic-plastic continuous media, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **18** (1965), 251.
- [5] Truesdell, C. and W. Noll, The nonlinear field theories of mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer-Verlag (1965).
- [6] Johnson, G. C. and J. Bammann, A discussion of stress rate in finite deformation problems, *Int. J. Solid Structures*, **20** (1983), 725—737.
- [7] Molenkamp, F., Limits to the Jaumann stress rate, *Int. J. Num. Ana. Maths. Geomech.*, **10** (1986), 151—176.
- [8] Moss, W. C., On the instabilities in large deformation simple shear loading, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **36** (1984), 329—338.
- [9] 尚勇, 带有接触摩擦边界弹塑性大变形问题的理论和有限元分析, 中国矿业大学博士学位论文(1987).
- [10] 陈至达, 连续体力学有限变形几何场论, 力学学报, **2** (1979), 107—117.
- [11] 陈至达, 论连续体力学非线性场论中有限转动的表现, 应用数学和力学, **7**, **11** (1986), 959—968.

On the Objective Stress Rate in Co-Moving Coordinate System

Shang Yong Chen Zhi-da

(Beijing Graduate School, China Institute of Mining, Beijing)

Abstract

The objective stress rate is a rather important problem in mechanics of finite deformation. In this paper, the objective stress rate in co-moving coordinate is derived by applying nonlinear geometric field theory of deformation. Problems, such as large extension coupled with rotation, and large shear deformation, are exemplified by using the new formula. Compared with Jaumann's stress rate and other formulae presented in current literature, the new result appears to be the reasonable one in co-moving coordinate system.