

经过修正的层流流动的流动稳定性问题

(I)——基本概念和理论*

周哲玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年12月4日收到)

摘 要

本文提出了经过修正的层流流动的流动稳定性理论, 并在文中给出平行剪切流中平均速度的一类修正剖面, 使这种理论可用于研究平行剪切流的流动稳定性, 指出了流动失稳的一条新的可能途径.

一、前 言

1883年, Reynolds首次通过著名的Reynolds实验指出了流体运动具有层流和湍流两种不同的性态^[1]. 然而欲对此现象作出物理和数学上的解释, 却使最杰出的科学家们都陷入了困境. Reynolds当时曾说过^[2]: “理论本身看起来已足够完全, 也提供了几乎每种流体运动情况下所需结果的计算手段. 虽然很多情况下理论结果同实际得到的相符, 但另外的情况下它们却完全不同.”

经过一百多年来的研究工作, 这种状况并没有得到根本改变. 与问题刚开始提出时的情况相比, 我们有了一些杰出的实验, 显示出某些情况下层流到湍流的转变, 或湍流流动本身的某些重要特性; 多年来的研究总结, 提出了一些理论概念, 其中有一些得到了实验的检验. 但至今为止, 对流动特性本身的观察实验还远未完善; 要对流动的机理提出较完善的理论解释, 则更是还有一段遥远的路程.

湍流的观测向流体力学家提出了两个性质不同的问题: 一个是了解平滑流动着的流体中导致湍流发生的原因, 另一个是了解湍流充分发展时流体的性状. 本文仅涉及第一个问题.

层流流动失去稳定性是湍流发生的第一个阶段, 这个概念是1883年Reynolds提出的, 但他归功于Stokes(1843). Tollmien^[3]曾说过: “可以肯定流体运动形式的这种根本改变可以在层流的不稳定性中找到线索, 因为层流本身总是流体动力学方程可能的解答.” 本文讨论平行剪切流的稳定性问题, 这类流动失去稳定性的物理原因非常难以捉摸. 严格来说, 平行剪切流仅包括管道流动(Hagen-Poiseuille流动, 图1)和两平行边界间的流动(平面Couette

* 钱伟长推荐.

国家自然科学基金资助项目.

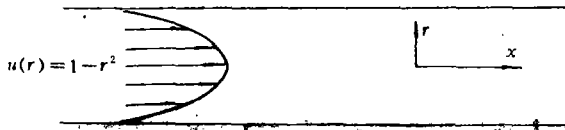


图1 Hagen-Poiseuille 流动

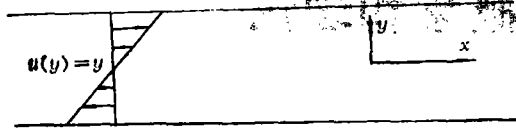


图2 平面 Couette 流动

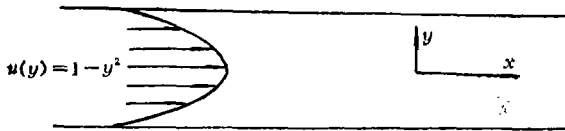


图3 平面 Poiseuille 流动

流动, 图2, 平面Poiseuille流动, 图3)。但在局部平行假设下, 也可将边界层流动作为平行剪切流来研究。本文不考虑边界层流动问题。

Reynolds在作圆管流动实验时, 发现了流体运动的层流和湍流这两种不同性态, 并提出了一无量纲数 $Re=ua/\nu$ 作为从层流到湍流的临界判据, 其中 u 为圆管中心的流速, a 为圆管半径, ν 为运动粘性系数。这个无量纲数被称之为雷诺数, 它是表征流动动力相似性的一个特征数。只要选定有关的特征长度和特征速度, 就可以定义各种不同流动的雷诺数。对于圆管流动, 也有将平均速度和圆管直径选定为特征速度和特征长度的, 本文中采取前一种定义。

对于平面 Poiseuille 流动, 则定义两平行边界间距离的一半为特征长度, 中心流速为特征速度; 对于平面 Couette 流动, 定义两平行边界间距离的一半为特征长度, 两边界相对移动速度的一半为特征速度。

Reynolds对圆管流动所做的一系列实验, 从层流到湍流转换的临界雷诺数为13000^[4], 此后有关圆管流动的实验, 得到的临界雷诺数最低大约为2000左右, 最高可以达到 10^5 。Leite(1959)^[5]首先研究了人工控制条件下的扰动在管流中的发展情况。他的实验装置可以使层流状态一直保持到 $Re=13000$ 。在这个范围内, Leite观察到小扰动总是衰减的, 而且小扰动在向下游的传播过程中, 非轴对称部分的衰减比轴对称部分要快得多, 因此非轴对称的小扰动应比轴对称的小扰动更为稳定。同一实验中, 如对层流流动进行较大的干扰(在管中放入带有攻角的圆环, 圆环可在轴向作周期运动), 当 $Re=4000$ 时, 圆环振动的幅值超过一定程度, 管中即可出现湍流(Kueth(1956)[6])。Fox, Lessen, Bhat(1968)^[7]的实验则观察到周向波数为1的非轴对称扰动是不稳定的。他们的实验装置可以将层流流动保持到 $Re=5000$ 以上, 从得到的临界雷诺数为2130来看, 其扰动似已是有限振幅的。

Davis和White(1928)^[8], Kao和Park(1970)^[9]以及Patel和Head(1969)^[10]的实验说明, 对于有限振幅的扰动, 平面Poiseuille流动在雷诺数为1000左右就变得不稳定了。另一方面, Nishoka, Iida和Ichikawa(1975)^[11]在低湍流度风洞中进行实验, 他们把背景湍流度降低到0.05%以下, 可使平面Poiseuille流直到 $Re=8000$ 还保持层流状态。背景湍流度越大, 不稳定出现时的雷诺数就越低。他们还在实验中观察到了有限扰动的振幅阈值, 从而验证了非线性稳定性理论的合理性。

平面Couette流的实验结果相对较少, Robertson(1959)^[12]和Reichardt(1959)^[13]的实验观察到平面Couette流动在充分大的雷诺数下成为湍流。虽然失去层流状态时雷诺数的准确值难以确定, 但Reichardt的实验说明其值在600到1450之间。

所有这些实验都说明, 观察到的转换雷诺数与流动中初始的二维和三维扰动的振幅和频率有关。根据大量的实验事实, 目前一般认为, 自然条件下层流失去稳定性时最低的临界雷诺数, 对于管流是2000, 对于平面Poiseuille流和平面Couette流则在1000左右。

流动稳定性理论是人们试图解释层流流动失去稳定的机理的一种尝试。虽然目前分岔理论、混沌理论都开始崭露头角,但流动稳定性理论仍然是人们用来研究层流到湍流的转换过程的主要手段。曾有人对Navier-Stokes方程是否足以描述湍流运动提出疑问。但从物理概念上看,Navier-Stokes方程似乎已足够全面地考虑了问题,因此疑问从未得到证实。流动稳定性理论仍基于Navier-Stokes方程,它讨论层流解的稳定性,其失稳的条件也即湍流发生的临界条件。

对于粘性流体的二维平行流动,Squire(1933)^[14]通过考虑在流向和横向都呈周期变化的扰动,证明了二维扰动总是比三维扰动更为不稳定。从而,Orr-Sommerfeld方程的求解成为粘性流体线性稳定性理论的主要任务。这个方程是分别由Orr(1907)和Sommerfeld(1908)给出的,他们假设扰动流函数具有形式

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (1.1)$$

其中 $c = c_r + ic_i$,其虚部 c_i 即决定扰动是放大的($c_i > 0$),衰减的($c_i < 0$)或中性稳定的($c_i = 0$)。这种扰动也就是所谓Tollmien-Schlichting波。

人们最开始将这种理论应用于平面Couette流动,未能得出临界雷诺数,以至于怀疑这种方法是否可以用于研究转换问题。Heisenberg(1924)^[15]在其博士论文中克服了数学上的难题,特别是与临界层(在该处 $u=c$)有关的困难,证明了平面Poiseuille流动在大雷诺数下是不稳定的。这是平行剪切流粘性不稳定性的第一个真正正确的计算。Tollmien(1929)^[16]证明,必须考虑曲线的速度剖面($d^2u/dy^2 \neq 0$)并在壁面附近和临界层(扰动波的传播速度与平均速度相等之处)考虑粘性。他的预计及Schlichting的计算,得到了在边界层流动中第一个被实验所证实的临界雷诺数,Tollmien-Schlichting波的命名也由此而来。林家翘(1945)^[17]在求解Orr-Sommerfeld方程时,从数学上圆满地解决了具转向点的高阶微分方程渐近解问题,给出了平面Poiseuille流动和边界层流动的中性曲线和临界雷诺数,并从物理上解释了粘性对于稳定的双重作用。粘性既能耗散能量,使扰动衰减;又能通过雷诺应力把主流的能量传递给扰动,使扰动增长。后来,又发展了很多利用电子计算机求解Orr-Sommerfeld方程的数值解法,但至此,线性流动稳定性理论有关的数学问题已得到了较好的解决。

线性稳定性理论也有其固有缺陷。首先其结果与初始扰动的幅值无关,在特征值问题中这是一个任意常数。其次,不定常的扰动或永远放大,或永远衰减,与观察到的现象并不相符。所得到的临界雷诺数通常都大于实验观察所得,当实验是在自然条件下进行时尤其如此。而且,线性稳定性理论无法说明平面Couette流动和圆管Poiseuille流动失稳的机理,至今为止,对这两种流动的线性稳定性分析都只能得出稳定的结果。

Reynolds在1883年就指出了有限振幅扰动的重要性,他猜测扰动振幅有一门槛值,超过此门槛值就会引起不稳定。然而非线性流动稳定性理论的基础可以说是Landau在1944年奠定的^[18]。Landau提出了现在称为弱非线性理论的方程。他认为扰动的主要模态的幅值 A 满足方程

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4 \quad (1.2)$$

l 即为所谓Landau常数。当 $l=0$,方程相当于线性理论给出的方程;当 $l \neq 0$,方程右边的第二项考虑了非线性的影响。令方程(1.2)的右边为零,可得到振幅的临界值 A_{cr} 。当 $\sigma < 0$, $l < 0$, A_{cr} 称为振幅门槛值,扰动振幅一旦超过 A_{cr} 就会增长起来,产生所谓亚临界不稳定

(Subcritical instability); 当 $\sigma > 0$, $l > 0$, A_{cr} 称为振幅平衡值, 扰动振幅将会趋于 A_{cr} 值, 得到所谓超临界稳定 (Supercritical stability)。扰动振幅 A 与 A_{cr} 在这两种情况下的相互关系在图4中表示出来。



图4 扰动动振幅临界值

Meksyn和Stuart(1951)^[19]讨论了平面Poiseuille流动中平均流动和扰动通过雷诺应力的相互作用。他们同时求解平均速度的微分方程和Orr-Sommerfeld方程来决定平均流动和扰动, 得到了雷诺数和扰动振幅阈值之间的关系。这种方法没有考虑谐波的产生及其相互作用。Landau通过他的方程预示了非线性扰动发展的特征, 但他并没有讨论方程如何导出。真正从偏微分方程组中导出Landau方程的是Palm^[20](1960, 对Bénard问题), Stuart和Watson^[21](1960, 对于平行流动)。Stuart和Watson的方法是基于Fourier分析和以振幅为小参数的一种渐近方法, 普遍认为这是一种说明偏离中性不远情况下流动稳定性问题的弱非线性理论, 其方法考虑到了谐波的产生和其相互作用对平均流动和基本扰动模态的扭曲。自1960年以后, 许多种流动的Landau方程相继被导出。

Orszag和Patera(1983)^[22]提出了一种二次失稳的概念。他们认为流动的失稳过程分为三个阶段: (1)基本剪切流动的线性失稳; (2)初始不稳定的非线性饱和, 形成第二种流动; (3)第二次失稳, 即第二种流动的线性失稳。林家翘的理论描述了第一个阶段的失稳过程, Stuart和Watson则说明了第二个阶段。Orszag和Patera假定第一次失稳由二维扰动引起, 二维扰动达到平衡, 这时无限小的三维扰动会引起这种平衡体的强烈失稳, 其失稳特征尺度可与实验相比。Herbert(1983)^[23]提出了与此类似的次谐波二次失稳理论, 他所研究的三维扰动的波长是二维扰动平衡体波长的二倍。

在平行剪切流的三种基本流动中, 仅平面Poiseuille流动在进行线性稳定性分析时具有临界雷诺数 $Re = 5772.2$, 而平面Couette流动和圆管Poiseuille流动都是线性稳定的。所有的非线性稳定性理论(包括二次失稳理论)都是建立在线性稳定性分析的基础上的, 因此各种理论对于平面Poiseuille流的结果较为完全和统一, 而对于平面Couette流动和圆管Poiseuille流动只能有某种假定下的结果, 且最后的结论也不一致。对于圆管Poiseuille流轴对称有限振幅扰动的研究, Davey和Nguyen(1971)^[24]以及Itoh(1977)^[25]就得出相反的结果。

非线性系统当参数改变时由已知解的不稳定性所产生的所有解的定性性质可由分岔理论给出, 所以在流动稳定性问题中应用分岔理论有其优越性。目前这种方法在Couette-Taylor流动的研究中应用较多。

平行剪切流中的三种基本流动用分岔理论的概念来解释属于三种类型。也就是说分岔解与基本解的交点位置在概念上可有如图5所示的三种情况。

流动非线性稳定性理论也是一种基于线性理论的摄动方法。线性理论所得出的临界点实际上就是分岔点的位置, 而非线性理论希望找出分岔解实际的临界位置。因此在分岔点位置和实际的临界位置相差较远时就会发生困难, 故人们称之为弱非线性理论。这里实际上也包

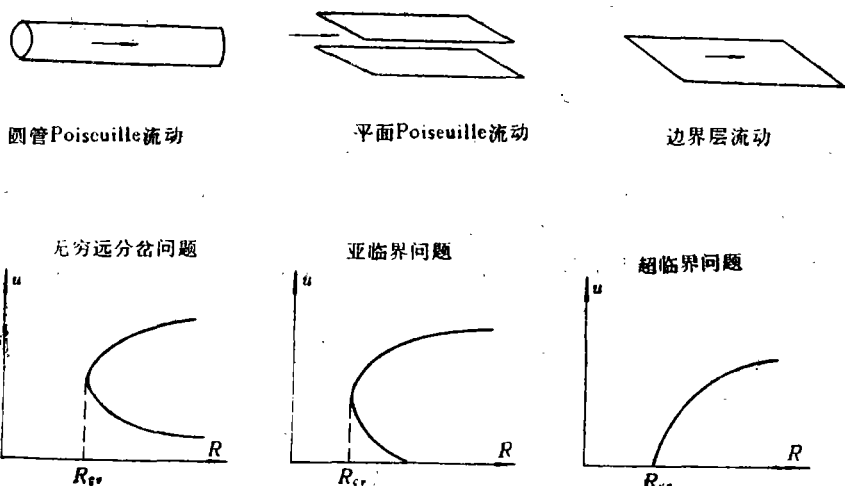


图 5

含了这样一个假定，那就是假定这两个位置的差别是由于非线性的影响而产生的。很多用于平面Poiseuille流动有成功倾向的非线性理论，用于圆管Poiseuille流动时却得不到预想的结果，这显示了无穷远分岔问题和亚临界问题质的区别。而过去很多流体力学家都把这两类问题看作一类问题——亚临界问题。

1979年，Rosenblat和Davis^[20]提出了无穷远分岔的概念，他们通过简单模型方程的分析，指出在无穷远处分岔的那个解分支和线性化方程所确定的特征函数是二类不同性质的函数。

一维非线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 - u^3 \quad 0 < x < 1 \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (1.4)$$

其线性化近似方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad (1.5)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (1.6)$$

的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 t}{\mu}\right] \sin(n\pi x) \quad (1.7)$$

而我们寻求方程(1.3)的非线性定常解

设 $\epsilon = 1/\mu$ (1.8)

$$u = \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (1.9)$$

则决定 u_1, u_2 的方程为

$$u_1'' + u_1^2 = 0, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0 \quad (1.10)$$

$$u_2'' + 2u_1 u_2 = u_1^3, \quad u_2(0) = u_2(1) = 0 \quad (1.11)$$

我们清楚地看到，线性化方程的特征函数是三角函数，而非线性方程无穷远分岔解的特征函数是椭圆函数。这是二类完全不同的函数。然而，在流动稳定性弱非线性理论中却正是

以线性化方程的特征函数为基础来研究非线性扰动的平衡解的, 因此对于无穷远分岔问题这种作法是不合适的。

周恒(1982)^[27]对弱非线性理论作了发展, 他把摄动的起点改在由于非线性作用已经扭曲了的层流速度剖面上, 对平面Poiseuille流动得到了比前人更理想的结果。从分岔理论的观点来看, 可以说周恒的方法是一种扰动分岔理论。在他的方法中, 扰动的基本模态已不再是未变形前Orr-Sommerfeld方程的特征函数了。

Gill(1962)^[28]根据Leite^[5]的实验, 对圆管Poiseuille流动失稳的机理进行了讨论。他认为, 对平均速度值改变很小, 但对其曲率改变有限的扰动是流动失稳的主要原因。

我们可以设想, 平均速度的某种修正对于流动的稳定性性质有着重要意义。即使在困难最大的无穷远分岔问题中, 如引入合理的修正剖面, 线性化特征函数应更接近问题本身的特征函数, 从而有可能得到更好的结果。

为寻求这种合理的修正剖面, 我们可借助于量子场论中的重整化概念^[29]。量子场论在应用于一些物理过程时, 最低阶的近似结果已相当符合实验所得到的结果。但为了求得精确的结果, 作较高阶近似的计算, 得到的结果却总是无穷大。以量子电动力学为例, 计算中所出现的无穷大在物理效应中只表现在两个方面: 一个是电子的自能的改变, 亦即电子的静质量的改变; 另一个是电子电荷的改变, 亦即电子与电磁场之间的相互作用常数的改变。实验所观察到的电子的质量是电子的全部质量, 实验并不能区分在观察到的质量中, 哪一部分是电子固有的质量, 哪一部分是电子的电磁质量, 亦即由于与电磁场相互作用而产生的电子自能。因此, 在理论上应将电子的“固有”质量和电磁质量合并起来, 作为由实验所观察到的电子的质量。实验也无法区分在电子的电荷中, 哪一部分是电子“固有”的电荷, 哪一部分是由于真空极化作用而产生的附加电荷。因此在理论上也应将电子的“固有”电荷和由于真空极化而产生的附加电荷合并起来, 作为由实验所观察到的电子的电荷。这种将电子的质量重新定义的过程叫做电子质量的重整化过程, 将电子的电荷重新定义的过程叫做电子的电荷的重整化过程。经过质量重整化和电荷重整化以后, 量子电动力学中的无穷大都被吸收在质量和电荷之中, 用这样的方法, 就可以计算电子与电磁场相互作用现象中高阶近似的贡献。重整化方法的提出使量子场论取得了重大进展。

流动稳定性理论则是研究扰动与基本层流流动的相互作用问题。众所周知, 由于非线性作用, 扰动在发展过程中必然不断对基本层流流动有所修正。因此, 在扰动的发展过程中, 层流流动始终包含了基本层流流动和扰动所产生的修正这两个部分。我们在流体力学实验中首先观察到的是基本层流流动, 引入扰动之后, 这种速度剖面受到破坏, 如流动变为湍流, 又可以在实验中观察到充分发展的湍流流动的平均速度剖面。在这个转换过程中, 平均速度剖面是不断变化的。借鉴量子场论中重整化的概念, 我们也应该在理论上将基本层流流动和扰动所产生的修正二者合并在一起, 作为真实的平均速度剖面来研究其稳定性性质。

如同在量子场论中, 重整化所引进的部分反映了电子与电磁场的相互作用一样, 修正速度剖面的选择也应正确地反映层流流动与扰动的相互作用。在第二节中, 我们首先研究了平均速度修正剖面可能的形式, 得出一类随时间变化, 但无横向分量, 在流动中不造成掺混的修正剖面。进而在第三节中提出了经过修正的层流流动的流动稳定性理论。在本文的后二个部分中(见随后发表的Ⅰ, Ⅱ), 用我们所得出的修正速度剖面, 对平行剪切流的三种基本流动进行了计算, 指出了一种新的造成流动不稳定的可能途径。

二、平行剪切流中平均速度的一种修正剖面

在流动稳定性理论的分析中,经常假设扰动流函数具有形式

$$\psi = \phi(y) \exp[i\alpha(x-ct)] + C.C. \quad (2.1)$$

其中 α 为实数, C.C.为第一项的复共轭, c 为复数, $c = c_r + ic_i$, 当 $c_i > 0$, 所研究的扰动随时间增长, 层流是不稳定的; 当 $c_i < 0$, 则扰动随时间衰减, 层流是稳定的。

由于流体动力学方程对流项的二次非线性, 在一般分析非线性问题所通常使用的摄动法解答中, 除了包含各高次谐波外, 还包含零波数成分

$$\Phi(y) \exp[2ac_i t] \quad (2.2)$$

这正是对基本层流流动进行修正的部分。我们直接寻求流体动力学方程的这种形式的解答, 在平行剪切流中得到了下列两种修正速度剖面。

在轴对称圆管Poiseuille流动中, 我们得到一种本身流量为零的修正剖面^[30],

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)_{11}]^2} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n+2}}{[(2n+2)_{11}]^2} \right\} \exp[\mu t] \quad (2.3)$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n)_{11}]^2} / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n+2)_{11}]^2} \quad (2.4)$$

其中, $(2n)_{11} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$, 当 $n=0$, $(2n)_{11} = 1$; μ 为实数, R 为雷诺数,
 $\mu R = -26.374614, -70.849999, -135.02071, -218.92019,$
 $-322.55512, -445.92756, -589.03835, -751.88837,$
 $-930.86419, \dots$

这种修正剖面是随时间而衰减的, 其形状见文[30]。非常有趣的是, 这种剖面的拐点数目是同零点的序号一致的。各个剖面拐点的位置见表1。

现在我们直接用 Navier-Stokes 方程来寻求这种解答。

仍设 $u = u(r) \exp[\mu t] \quad (2.5)$

代入轴对称情况下用柱坐标表示的 Navier-Stokes 方程, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad u(0, 0) = 1, \quad u(1, t) = 0 \quad (2.6)$$

将(2.3)式代入方程, 除满足边界条件外, 可知

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \mu R u \right) = -\frac{A}{R} \exp[\mu t] \quad (2.7)$$

A 由(2.4)式给出。

因此, 要维持流量不变, 必须产生一扰动压力梯度, 这个压力梯度是随时间衰减的, 其数量级为 $O(1/R)$ 。

对于二修平面平行流动, 我们可引入流函数

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x \quad (2.8)$$

其中 u 为流向速度, v 为横向速度。

流函数所满足的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi - \frac{1}{R} \nabla^4 \psi = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \text{ 当 } y = \pm 1 \quad (2.10)$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$

同样寻求可随时间变化, 但无横向速度, 在流动过程中不发生掺混的解答, 并要求其引起的流量变化为零。

$$\text{设 } \psi = \phi(y) \exp[-\eta t], \quad \eta > 0 \quad (2.11)$$

将其代入(2.9), (2.10)式, 可得

$$\phi(4) + \eta R \phi'' = 0 \quad (2.12)$$

$$\phi(-1) = \phi(1) = \phi'(-1) = \phi'(1) = 0 \quad (2.13)$$

求解(2.12), (2.13), 可得

$$\phi(y) = C \left[\cos(\sqrt{\eta R}) \cdot y - \frac{1}{\sqrt{\eta R}} \sin(\sqrt{\eta R} y) \right] \quad (2.14)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C [\cos(\sqrt{\eta R}) - \cos(\sqrt{\eta R} y)] \exp[-\eta t] \quad (2.15)$$

$$C = \begin{cases} -1/(\cos\sqrt{\eta R} + 1), & \cos\sqrt{\eta R} > 0 \\ 1/(\cos\sqrt{\eta R} - 1), & \cos\sqrt{\eta R} < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

常数 C 的选择是使 $y=0$ 处, 修正剖面具有流向速度, 并有 $|u_{\max}|=1$, 以便于定义修正剖面对基本层流流动的修正程度。为满足流量为零的条件, 可得

$$\eta R = 20.190729, 59.679515, 118.89988, 197.85781, 296.5544,$$

$$414.98999, 553.16462, 711.07844, 888.73143, \dots$$

同轴对称圆管 Poiseuille 流动修正速度剖面的 μR 值相比, 可知在平面平行流动中, 这种修正剖面维持的时间较长, 其形状见图 6, 其拐点的数目也与零点的序号相同。各个剖面拐

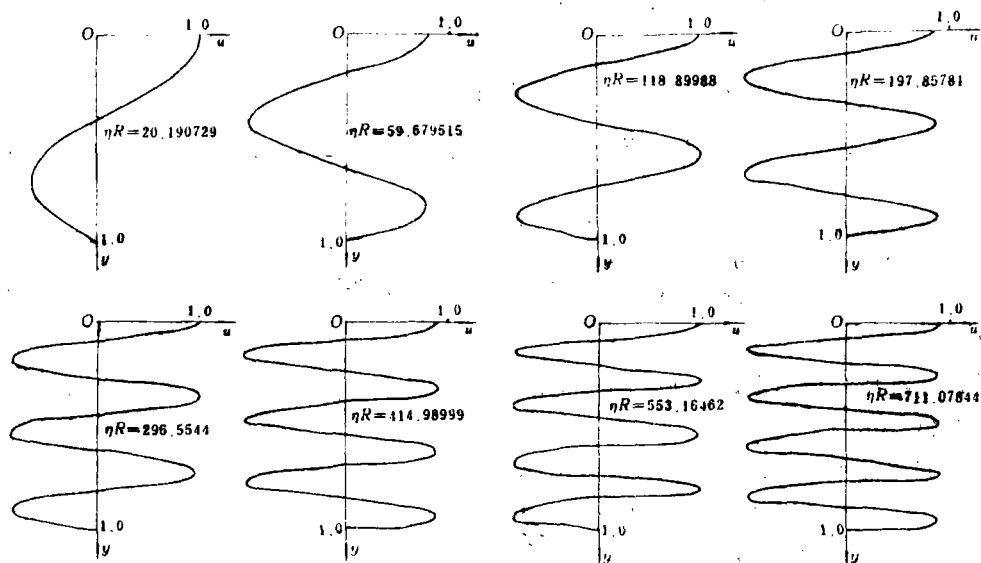


图 6 平面平行流动的修正速度剖面

点的位置见表2。

也设 $u = u(y) \exp[\pm \eta t]$, $\eta > 0$ (2.17)

代入 Navier-Stokes 方程, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(\pm 1, t) = 0 \quad (2.18)$$

由(2.15)式

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C \eta \cos(\sqrt{\eta R}) \exp[-\eta t] \quad (2.19)$$

C仍由(2.16)式定义。扰动压力梯度也是随时间衰减的, 其数量级也为 $O(1/R)$ 。

这里必须指出, 流量为零的条件是一种确定积分常数的条件, 另一种确定积分常数的办法是令 $\partial \bar{p} / \partial x = 0$ 。

这样, 由(2.7)式, 可知(2.3)式成为

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)!!]^2} \exp[\mu t] \quad (2.20)$$

此时 $\mu R = -\gamma^2$, γ 是零阶贝塞尔函数 J_0 的零点。这正是 Davey 和 Nguyen (1971)^[24] 指出的所谓“自由模态”。他们在求解由非线性流动稳定性理论得出的方程时, 发现这种解是确定扰动基波的各级摄动方程相应齐次方程的解。因其与各级方程的右端项无关, Herbert^[31] 称之为“自由模态”。这种“自由模态”也是 Navier-Stokes 方程的解, 在其速度剖面上也有很多拐点, 其位置见表3。

表 1 圆管 Poiseuille 流动修正剖面的拐点位置

μR	r_{inflex}		
- 26.374614	0.35851230		
- 70.849999	0.21873950	0.63339529	
- 135.02071	0.15845172	0.45882234	0.73463279
- 218.92019	0.12443835 0.79116268	0.36033118	0.57693594
- 322.55512	0.10251683 0.65178856	0.29685392 0.82760234	0.47530079
- 445.92756	0.08718966 0.55434041	0.25247164 0.70386848	0.40423912 0.85312925
- 589.03835	0.07586219 0.48232183 0.87203428	0.21967112 0.61242356	0.35172134 0.74229273
- 751.88837	0.06714605 0.42890576 0.77184245	0.19443215 0.54205954 0.88660868	0.31131054 0.88700747
- 930.86419	0.06043676 0.38367680 0.69368480	0.17474373 0.48716998 0.79682968	0.27978688 0.59047815 0.89993119

同理, 由(2.19)式, 当压力梯度为零时, 可知(2.15)式仍为

$$u=C[\cos(\sqrt{\eta R})-\cos(\sqrt{\eta R} y)]\exp[-\eta t] \quad (2.21)$$

但此时

$$\sqrt{\eta R} = (\pi/2)(2n+1), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

这也正是Herbert(1982)^[31]所指出的“自由模态”, 这种速度剖面的拐点位置见表4.

因此, 我们可以认为(2.3)式和(2.15)式是这一类随时间衰减, 但无横向速度, 在流动中不发生掺混的修正速度剖面的一般形式. 当我们规定不同的确定积分常数的方法时, 其常数和 μR (或 ηR) 值将有所不同, 拐点的位置也有所变化. 但我们在以后将会看到, 他们对流动造成失稳的作用是十分类似的.

表 2 平面平行流动修正剖面的拐点位置

ηR	y_{inflex}		
20.190729	0.3495778		
59.679515	0.2033327	0.6099981	
118.89988	0.1440553	0.4321658	0.7202764
197.85761	0.1116717	0.3350162	0.5583587
	0.7817022		
296.5544	0.0912153	0.2736459	0.4560765
	0.6385071	0.8209379	
414.98999	0.0771083	0.2313249	0.3856415
	0.5397580	0.6939746	0.8481912
553.16462	0.0667871	0.2003613	0.3339356
	0.4675098	0.6010840	0.7346583
	0.8682325		
711.07844	0.0689062	0.1767187	0.2946311
	0.4123435	0.5901559	0.6479684
	0.7867808	0.8835932	

表 3 圆管 Poiseuille 流动“自由模态”剖面拐点位置

μR	r_{inflex}		
-30.471504	0.33354111	0.96582413	
-74.886524	0.21276261	0.61608824	0.98643544
-139.03947	0.15614548	0.45214310	0.72393875
	0.99274979		
-222.93177	0.12331314	0.35707474	0.57172165
	0.78401260	0.99649179	
-326.56466	0.10188522	0.29502640	0.47237320
	0.64777451	0.82250595	0.99692459
-449.93197	0.08680038	0.25134506	0.40243607
	0.55166844	0.70072861	0.84932480
	0.9977298		

表 4 平面平行流动“自由模态”剖面的拐点位置

ηR	y_{inflex}		
22.206610	0.3333337		
61.685029	0.2	0.6	
120.90265	0.1428571	0.4285714	0.7142857
199.85949	0.1111111	0.3333333	0.5555556
	0.7777777		
298.55556	0.0909091	0.2727273	0.4545455
	0.6363636	0.8181818	
416.99078	0.0769231	0.2307692	0.3846154
	0.5384615	0.6923077	0.8461539
555.16525	0.0666667	0.2	0.3333333
	0.4666667	0.6	0.7333333
	0.8666667		
713.07894	0.0588235	0.1764706	0.2941177
	0.4117647	0.5294118	0.6470588
	0.7647059	0.8823529	

三、经过修正的层流流动的流动稳定性理论

现在，我们从数学上定义经过修正的层流流动的流动稳定性问题。

在边界为 ∂V 的空间某一区域 V ，Navier-Stokes 方程为

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \nabla \bar{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u} + \bar{G}(\bar{x}, t) \quad \bar{x} \in V \quad (3.1)$$

$\bar{u}(\bar{x}, t)$ 为速度场， p 为压力标量场， ρ 为流体密度， μ 为粘性系数， $\bar{G}(\bar{x}, t)$ 是给定的体力场。其中 \bar{u} 满足

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \bar{x} \in V \quad (3.2)$$

边界条件为 $\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_B(\bar{x}, t) \quad \bar{x} \in \partial V \quad (3.3)$

设 (\bar{u}, p) 和 (\bar{u}_1, p_1) 为两个分别满足Navier-Stokes 方程的层流解，其中 (\bar{u}, p) 为基本层流解，且二者可同时存在于流场之中，即满足

$$\bar{u} \nabla \bar{u}_1 + \bar{u}_1 \nabla \bar{u} = 0 \quad \bar{x} \in V \quad (3.4)$$

设有另一解 (\bar{u}^*, p^*) 也满足 Navier-Stokes 方程，三者初始条件不同，其差别 $(\bar{u}^* - \bar{u} - \bar{u}_1, p^* - p - p_1) = (\bar{u}', p')$ 满足方程

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \bar{u}_1 \nabla \bar{u}' + \bar{u} \nabla \bar{u}' + \bar{u}' \nabla \bar{u}_1 + \bar{u}' \nabla \bar{u} + \bar{u}' \nabla \bar{u}' \right) &= -\nabla p' + \mu \nabla^2 \bar{u}' \quad \bar{x} \in V \\ \nabla \cdot \bar{u}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

边界条件为 $\bar{u}'(\bar{x}, t) = 0 \quad \bar{x} \in \partial V \quad (3.6)$

初始条件为 $\bar{u}'(\bar{x}, 0) = \bar{u}'_0 \quad \bar{x} \in V \quad (3.7)$

经过修正的层流流动的流动稳定性问题即为在条件(3.6)，(3.7)下求解(3.5)式。当扰动 \bar{u}' 的幅值随时间或空间增长时，经过修正的层流流动是不稳定的，当扰动 \bar{u}' 的幅值随时间

或空间衰减时, 经过修正的层流流动是稳定的.

$$\text{如令} \quad \bar{u}^* = \bar{u} + \bar{u}_1 + \varepsilon \bar{u}' \quad (3.8)$$

$$p^* = p + p_1 + \varepsilon p' \quad (3.9)$$

略去 ε 的高阶项, 则可得到方程

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \bar{u}_1 \nabla \bar{u}' + \bar{u} \nabla \bar{u}' + \bar{u}' \nabla \bar{u}_1 + \bar{u}' \nabla \bar{u} \right) &= -\nabla p' + \mu \nabla^2 \bar{u}' \quad x \in V \\ \nabla \cdot \bar{u}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

经过修正的层流流动的线性稳定性问题即为在条件(3.6), (3.7)下求解(3.10)式. 当扰动 \bar{u}' 的幅值随时间或空间增长时, 经过修正的层流流动是线性不稳定的, 当扰动 \bar{u}' 的幅值随时间或空间衰减时, 经过修正的层流流动是线性稳定的.

这里, 我们提出了一个新的概念. 按经典流动稳定性理论的说法, 在基本层流流动上迭加一小扰动, 当这个小扰动随时间或空间增长起来时, 流动也可能变为湍流(如平面 Poiseuille 流动), 也可能变为另一种稳定的层流(如两同心旋转圆柱间流动中所出现的 Taylor 涡环). 我们所指出的是, 流场中有可能同时存在两种层流流动, 其中一种是定常的基本层流流动; 另一种是其他的层流流动. 在这两种流动迭加而成的层流流动中, 或者说经过第二种层流流动(往往为小量)修正的基本层流流动中引入扰动, 当扰动随时间或空间增长起来时, 流动也可能变为湍流, 也可能变为另一种层流. 这个概念与 Orszag 等人的二次失稳概念有所不同. 他们讨论的是在基本层流流动中扰动的发展过程, 其基础仍为经典线性稳定性分析的结果, 他们所引入的第二种层流流动, 也即所谓平衡体, 并不是 Navier-Stokes 方程的准确解, 而只是经典流动稳定性方程的近似解. 我们研究的则是经过修正的层流流动的流动稳定性问题, 这里的线性稳定性分析的对象已与原来有所不同, 平均速度剖面总是包含有基本层流流动和其他因素引起的第二种层流流动这两个部分.

Taylor(1936)^[32]曾对 Tollmien 的工作提出疑问. 实验表明, 层流边界层的失稳与主流中的湍流扰动条件有关, 圆管流动的临界雷诺数也决定于流体进入管中时的平滑程度如何. 因此, Taylor 认为临界雷诺数仅仅与流动中的湍流强度有关. 他假定湍流对边界层的扰动是通过与湍动压力相联系的局部压力梯度作用于边界层的, 当扰动局部压力梯度足够大, 而且与流动方向相反时, 就能使边界层成为湍流. Taylor 由湍流的统计理论导出了局部压力梯度与湍流尺度的一些关系, 根据实验得出了临界雷诺数与流动中湍流强度的关系的一些曲线. Schubauer, Skramstad^[33]在 40 年代进行的平板边界层流动的实验中首次确认了 Tollmien-Schlichting 波的存在, 从而验证了流动稳定性理论的合理性. 但是至今为止, 在流动稳定性理论中还没有考虑过流动中的湍流噪声对流动失稳的影响. 而如前所述, 实验结果已证明这种背景湍流噪声对流动失稳是有所影响的.

我们在第二节中所给出的修正速度剖面, 正是流场中可能与基本层流流动同时存在的第二种层流解, 而且它反映了扰动与基本层流流动的相互作用. 同时, 这种修正速度剖面也可看作是湍流雷诺应力对平均速度作用的体现. 因此, 我们将这种修正速度剖面作为第二种层流流动引入, 在某种程度上类似于 Taylor 所提出的假设, 也是反映了背景湍流噪声的一种影响. 当然我们没有考虑到背景扰动的全部影响, 仅强调了其对平均速度的修正, 修正速度剖面所相应的压力梯度也不一定作用在与流向相反的方向上, 虽然其作用也是引起流动的失稳.

在文章的后两部分中, 我们将用这种修正速度剖面来讨论经过修正的层流流动的流动稳

定性理论在具体流动中的应用。

本文在钱伟长教授和蔡树棠教授的指导下完成,并得到了周恒教授,孙厚钧教授和戴世强教授的关心和帮助,作者在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Reynolds, O., An experiment investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Phil. Trans. R. Soc.*, 174 (1883), 935.
- [2] Reynolds, O., *Papers on Mechanical and Physical Subjects*, Vol. I., Cambridge University Press, Cambridge (1901).
- [3] Tollmien, W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Klasse*, 50 (1935), 79.
- [4] Drazin, P. G. and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1981).
- [5] Leite, R. J., An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 5 (1959), 81.
- [6] Kuethe, A. M., Some features of boundary layers and transition to turbulent flow, *J. Aero. Sci.*, 23 (1956), 446.
- [7] Fox, J. A., M. Lessen and W. V. Bhat, Experimental investigation of the stability of Hagen-Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 11 (1968), 1.
- [8] Davis, S. J. and C. M. White, An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section, *Proc. Roy. Soc.*, A119 (1928), 92.
- [9] Kao, T. W. and C. Park, Experimental investigations of the stability of channel flow: Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel, *J. Fluid Mech.*, 43 (1970), 145.
- [10] Patel, V. C. and M. R. Head, Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows, *J. Fluid Mech.*, 38 (1969), 181.
- [11] Nishoka, M., S. Iida and Y. Ichikawa, An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 72 (1975), 244.
- [12] Robertson, J. M., On turbulent plane-Couette flow, *Proc. 6th Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, University of Texas (1959), 169.
- [13] Reichardt, H., Gesetzmässigkeitne der geradlinigen turbulenten Couetteströmung, *Mitteilungen aus dem Max-Planck Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt*, 22 (1959).
- [14] Squire, H. B., On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls, *Proc. Roy. Soc. London*, A142 (1933), 621.
- [15] Heisenberg, W., Über stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen, *Ann. Phys. Lpz.* 74, 4 (1924), 577.
- [16] Tollmien, W., Über die Entstehung der Turbulenz, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1929), 21.
- [17] Lin, C. C., On the stability of two-dimensional parallel flows, *Quart. Appl.*

- Math.*, 3 (1945), 117—142, 218—234, 277—301.
- [18] Landau, L. D., On the problem of turbulence, *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, 44 (1944), 311.
- [19] Meksyn, D. and J. T. Stuart, Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances, *Proc. Roy. Soc.*, A208 (1951), 517.
- [20] Palm, E., On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.*, 8 (1960), 183.
- [21] Stuart, J. T. and J. Watson, On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1, Part 2, *J. Fluid Mech.*, 9 (1960), 353—370, 371—389.
- [22] Orszag, S. A. and A. T. Patera, Secondary instability of wall-bounded shear flows, *J. Fluid Mech.*, 128 (1983), 347.
- [23] Herbert, T., Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances, *Phys. Fluids*, 26 (1983), 871.
- [24] Davey, A. and H. P. F. Nguyen, Finite-amplitude stability of pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 701.
- [25] Itoh, N., Nonlinear stability of parallel flows with subcritical Reynolds numbers, Part 2, Stability of pipe Poiseuille flow to finite axisymmetric disturbances, *J. Fluid Mech.*, 82 (1977), 469.
- [26] Rosenblat, S. and S. H. Davis, Bifurcation from infinity, *SIAM J. Appl. Math.*, 37, 1 (1979), 1.
- [27] Zhou, H., On the nonlinear theory of plane Poiseuille flow in the subcritical range, *Proc. R. Soc. London*, A381 (1982), 407.
- [28] Gill, A. E., A mechanism for instability of plane Couette flow and of Poiseuille in a pipe, *J. Fluid Mech.*, 21 (1962), 503.
- [29] 朱洪元, 《量子场论》, 科学出版社 (1960).
- [30] 周哲玮, 圆管 Poiseuille 流动中平均速度的一种修正剖面及其稳定性研究, 应用数学和力学, 9, 1 (1988), 73—82.
- [31] Herbert, T., On perturbation methods in nonlinear stability theory, *J. Fluid Mech.*, 126 (1983), 167.
- [32] Taylor, G. I., Statistical theory of turbulence, Part V, Effect of turbulence on boundary layer, Theoretical discussion of relationship between scale of turbulence and critical resistance of spheres, *Proc. Roy. Soc. London*, A156 (1936), 307.
- [33] Schubauer, G. B. and H. K. Skramstad, Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow, National Bureau of Standards Research Paper (1772).

On the Stability of Distorted Laminar Flow(I)----- Basic Ideas and Theory

Zhou Zhe-wei

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

This paper suggests a hydrodynamic stability theory of distorted laminar flow, and presents a kind of distortion profile of mean velocity in parallel shear flow. With such distortion profiles, the new theory can be used to investigate the stability behaviour of parallel shear flow, and thus suggests a new possible approach to instability.