应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

自共轭常微分方程奇异摄动问题一致收敛的差分格式*

林鹏程　郭雯

(福州大学计算机科学系，1987年6月3日收到)

摘　要

本文对自共轭常微分方程奇异摄动问题，构造一族带拟合因子的差分格式，用不同于[1]的方法，通过对格式截断误差的分析，给出差分格式解一致收敛于微分方程解的充分条件，由此提出几个具体的差分格式，在较弱的条件下，给出较高的一致收敛阶，并将它们应用于例子，给出数值结果。

一、引　言

考虑自共轭常微分方程奇异摄动问题

$$\begin{cases} Lu(x)\equiv-\varepsilon(p(x)u'(x))'+q(x)u(x) \\ \qquad =f(x) \qquad (x\in(0,1)) \\ u(0)=A,\ u(1)=B \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$是跟ε无关的光滑函数，$p(x)$和$q(x)$满足

$$p(x)\geqslant\alpha>0,\ q(x)\geqslant\beta>0 \qquad (x\in[0,1]) \tag{1.2}$$

$\varepsilon>0$是小参数。

Doolan，Miller，Schilders 在他们的著作[1]中，对问题(1.1) 提出一个指数型拟合差分格式：

$$\begin{cases} L^h u_i\equiv-\varepsilon\sigma_i\delta(p(x_i)\delta u_i)+q(x_i)u_i \\ \qquad =f(x_i) \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1) \\ u_0=A,\ u_N=B \end{cases} \tag{1.3}$$

其中

$$\sigma_i=\frac{r_i\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r_i}\,\rho}{2},\quad r_i=\frac{q(x_i)}{p(x_i)},\quad \rho=\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{1.4}$$

在条件(1.2)和$p'(x)\geqslant0$的假设下，通过对$u(x_i)-u_i$的“古典估计”和“非古典估计”，得到了一阶一致敛性。但他们没有讨论误差与系数函数之间的关系。

本文用不同于[1]的方法讨论(1.1)和(1.3)，我们的证明基于(1.1)解的一个分解

---

* 林宗池推荐。

式，这一技巧类似于 Kellogg 和 Tsan 所用的技巧。构造形如（1.3）的差分格式（其中σ_i为待定的），去掉$p'(x)\geqslant 0$的条件，通过误差分析，导出σ_i所要满足的充分条件，使得相应的格式一致收敛。从而给出几个指数型拟合差分格式，其中包含了格式(1.3)、(1.4)。证明此时差分格式解一阶一致收敛，且当$p(x)$和$q(x)$满足条件(Ⅰ)时，一致收敛阶为二阶，改进了 Doolan 等人[1]的结果。

二、（1.1）解的分解式

首先我们叙述（1.1）的解满足极值原理。

引理2.1 设$v(x)$是$[0,1]$上的光滑函数，算子L由（1.1）和（1.2）所定义，则

（i） 对满足$v(0)\geqslant 0$，$v(1)\geqslant 0$，$Lv(x)\geqslant 0$ $x\in(0,1)$的$v(x)$有$v(x)\geqslant 0$ $x\in[0,1]$。

（ii） $|v(x)|\leqslant \dfrac{1}{\beta}\max\limits_{0<y<1}|Lv(y)|+|v(0)|+|v(1)| \qquad (x\in[0,1])$。

证明 第一个结论的证明见 Protter 和 Weinberger[4]。

为证第二个结论，只需将结论（i）用于函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta}\max_{0<y<1}|Lv(y)|+|v(0)|+|v(1)|\pm v(x)$$

定理2.1 设$u(x)$是（1.1）的解，则

$$u(x)=v_0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+w_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+Z(x) \tag{2.1}$$

其中v_0，w_0分别为$x=0$，$x=1$两端的边界层函数

$$v_0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\bar{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$w_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\bar{q}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(1)}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

这里$r(x)=q(x)/p(x)$，$|\bar{p}|\leqslant C$，$|\bar{q}|\leqslant C$，而$Z(x)$满足

$$|Z^{(i)}(x)|\leqslant C\left\{1+\varepsilon^{-\frac{i}{2}+\mu}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\right\} \qquad (x\in[0,1]) \tag{2.2}$$

其中 $0<\sigma<\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}q(x)/p(x)$，而$\mu$由下式确定

$$\mu=\begin{cases}1 & \text{当} p'(0)=q'(0)=p'(1)=q'(1)=0\text{时}\\ \dfrac{1}{2} & \text{当上述条件不成立时}\end{cases} \tag{2.3}$$

为方便起见，以下简称条件$p'(0)=q'(0)=p'(1)=q'(1)=0$为条件(Ⅰ)。

这个定理的证明可参阅[2]。

三、一致收敛的充分条件

把区间$[0,1]$分成N个均匀的网格，步长$h=N^{-1}$，网格点$x_i=ih$，$0\leqslant i\leqslant N$。对自共轭微

分方程(1.1)，我们构造带拟合因子σ_i的差分格式：

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv -\varepsilon\sigma_i(\rho)\delta(p(x_i)\delta u_i)+q(x_i)u_i \\ \quad =f(x_i) \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1) \\ u_0=A,\ u_N=B,\ \rho=h/\sqrt{\varepsilon} \end{cases} \tag{3.1}$$

其中$\sigma_i(\rho)$为待定的拟合因子，本节我们讨论的就是$\sigma_i(\rho)$应满足什么条件，才使差分格式(3.1)一致收敛？

当然，我们希望（3.1）具有正型，或者说它满足离散的最大值原理。

引理3.1 如果（3.1）中的$\sigma_i(\rho)$满足$\sigma_i>0$，则对满足$v_0\geqslant 0$，$v_N\geqslant 0$，$L^h v_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant N-1$的$v_i$有$v_i\geqslant 0$，$0\leqslant i\leqslant N$。

证明 见[1]的第Ⅱ部分第8节。

我们将（3.1）的解分解为

$$u_i=v_i+w_i+Z_i \tag{3.2}$$

对光滑的函数$u(x)$，定义截断误差为

$$\tau_i(u)=L^h u(x_i)-L^h u_i \tag{3.3}$$

因为τ_i是线性的，故由（2.1）有

$$\tau_i(u)=\tau_i(v)+\tau_i(w)+\tau_i(Z) \tag{3.4}$$

于是估计$\tau_i(u)$就转化为分别估计$\tau_i(v)$，$\tau_i(w)$和$\tau_i(Z)$。

我们从估计$\tau_i(Z)$入手

$$\begin{aligned}\tau_i(Z)=&\varepsilon(1-\sigma_i)\delta(p(x_i)\delta u_i)\\ &+\varepsilon[(p(x_i)Z'(x_i))'-\delta(p(x_i)\delta Z(x_i))]\end{aligned} \tag{3.5}$$

通过 Taylor 展开，我们得到

$$\delta(p(x)\delta Z(x))=(pZ')'+\frac{h^2}{48}p^{(3)}(\xi_3)Z'(x)+\frac{h^2}{16}p''(\xi_4)Z''(x)$$

$$+\frac{h}{6}\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)Z^{(3)}(\xi_1)+p\left(x-\frac{h}{2}\right)Z^{(3)}(\xi_2)\right]$$

其中$\xi_1\in(x,x+h)$，$\xi_2\in(x-h,x)$，$\xi_3,\xi_4\in(x-h/2,x+h/2)$。因此我们得到

$$\begin{aligned}&|\delta(p(x_i)\delta Z(x_i))-(p(x_i)Z'(x_i))'|\\ &\leqslant C[h^2(\max|Z'|+\max|Z''|)+h\max|Z^{(3)}|] \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1)\end{aligned} \tag{3.6a}$$

若将其展开到$Z^{(4)}$项，则

$$\delta(p(x)\delta Z(x))=(pZ')'+\frac{h^2}{48}p^{(3)}(\xi_3)Z'(x)$$

$$+\frac{h^2}{16}p''(\xi_4)Z''(x)+\frac{h^2}{6}p'(\xi_5)Z^{(3)}(x)$$

$$+\frac{h^2}{24}\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)Z^{(4)}(\xi_1)+p\left(x-\frac{h}{2}\right)Z^{(4)}(\xi_2)\right]$$

其中$\xi_1\in(x,x+h)$，$\xi_2\in(x-h,x)$，ξ_3，ξ_4，$\xi_5\in(x-h/2,x+h/2)$。故我们得到另一估计

$$\begin{aligned}&|\delta(p(x_i)\delta Z(x_i))-(p(x_i)Z'(x_i))'|\\ &\leqslant Ch^2\sum_{j=1}^{4}\max|Z^{(j)}(x)| \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1)\end{aligned} \tag{3.6b}$$

当条件（Ⅰ）满足时用(3.6b)，否则用(3.6a)。利用（2.2），我们得到

$$|\delta(p(x_i)\delta Z(x_i))-(p(x_i)Z'(x_i))'|\leqslant C\varepsilon^{-1}h^{2\mu} \tag{3.7}$$

利用恒等式

$$\delta(g(x)\delta K(x))=g\left(x+\frac{h}{2}\right)\delta^2K(x)+\frac{K(x)-K(x-h)}{h^2}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}g'(t)dt$$

和

$$|\delta^2 Z(x_i)|\leqslant h^{-1}\int_{x_i-h}^{x_i+h}|Z''(s)|ds$$

以及(2.2)，立即得出

$$|\delta(p(x_i)\delta Z(x_i))|\leqslant Ch^{-1}\int_{x_i-h}^{x_i+h}|Z''(s)|ds+\max|Z'|$$

$$\leqslant\begin{cases} C & \text{当（Ⅰ）成立时}\\ Ch^{-1} & \text{当（Ⅰ）不成立时}\end{cases} \tag{3.8}$$

将（3.7），（3.8）代入(3.5)，得到

$$|\tau_i(Z)|\leqslant\begin{cases} C\varepsilon|1-\sigma_i(\rho)|+Ch^2 & \text{当（Ⅰ）成立时}\\ C\varepsilon h^{-1}|1-\sigma_i(\rho)|+Ch & \text{当（Ⅰ）不成立时}\end{cases} \tag{3.9}$$

因此，容易得到

定理3.1 如果（3.1）中的σ_i满足

$$\varepsilon|1-\sigma_i|\leqslant Ch^2 \tag{3.10}$$

则 $$|\tau_i(Z)|\leqslant Ch^{2\mu}$$

其中μ由（2.3）确定。

下面我们讨论$\tau_i(v)$，有

定理3.2 如果（3.1）中的σ_i满足

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_i(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant Ch^{2\mu} \tag{3.11}$$

则 $$|\tau_i(v)|\leqslant Ch^{2\mu}$$

其中μ由（2.3）确定。

证明 由$\tau_i(v)$的定义，知

$$\tau_i(v)=-\varepsilon\sigma_i(\rho)\delta\left(p(x_i)\delta v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)+\varepsilon\left(p(x_i)v_0'\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)' \tag{3.12}$$

经计算，有

$$\left(p(x_i)v_0'\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)'=[p(x_i)r(0)\varepsilon^{-1}-p'(x_i)\sqrt{r(0)}\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{3.13}$$

$$\delta\left(p(x_i)\delta v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)=\left[4p(x_i)h^{-2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right.$$

$$\left.+hp'(x_i)\,\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\bar{r} \tag{3.14}$$

其中

$$\bar{r}=\frac{h^2}{8}p''(x_i)D_+D_-v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{h^2}{48}\left[p^{(3)}(\xi_1)D_+v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+p^{(3)}(\xi_2)D_-v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] \tag{3.15}$$

$\xi_1\in\left(x_i,\ x_i+\frac{h}{2}\right),\xi_2\in\left(x_i-\frac{h}{2},\ x_i\right)$。故

$$\tau_i(v)=p(x_i)\left\{r(0)-4\rho^{-2}\sigma_i(\rho)\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$+p'(x_i)\sqrt{\varepsilon}\left\{-\sqrt{r(0)}+\frac{\sigma_i}{\rho}\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-\varepsilon\sigma_i(\rho)\bar{r}$$

$$\triangleq F_1+F_2+F_3 \tag{3.16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&F_1=p(x_i)\left\{r(0)-4\rho^{-2}\sigma_i(\rho)\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\&F_2=p'(x_i)\sqrt{\varepsilon}\left\{-\sqrt{r(0)}+\frac{\sigma_i(\rho)}{\rho}\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\&F_3=-\varepsilon\sigma_i(\rho)\bar{r}\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

由 (3.11) 有

$$|F_1|\leqslant Ch^{2\mu}$$

又

$$|F_2|\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\left\{\left|\frac{\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\left(4\frac{\sigma_i}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}-r(0)\right)\right|\right.$$

$$\left.+\sqrt{r(0)}\left|\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}-1\right|\right\}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant C\sqrt{\varepsilon}h^{2\mu}(1+\rho^k)+C\sqrt{\varepsilon}\rho^k\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right| \tag{3.18}$$

这里用到[1]

$$|Z\coth Z-1|\leqslant CZ^k\quad(1\leqslant k\leqslant 2,\ Z>0) \tag{3.19}$$

当 $\mu=1/2$时 (3.18) 的右端k取 1 得

$$|F_2|\leqslant C\sqrt{\varepsilon}h\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+C\sqrt{\varepsilon}\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\leqslant Ch$$

当$\mu=1$时，由于$p'(0)=0$，所以$p'(x_i)=x_ip''(\xi_i)$，$\xi_i\in(0,x_i)$，把(3.18)右端第 1 项k取1，第2项k取2得

$$|F_2|\leqslant Cx_i\left[\sqrt{\varepsilon}h^2\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\sqrt{\varepsilon}\frac{h^2}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]$$

$$\leqslant Ch^2+Ch^2\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leqslant Ch^2$$

因此

$$|F_2|\leqslant Ch^{2\mu} \tag{3.20}$$

由 (3.15) 有

$$|F_3|\leqslant C\varepsilon\left[4\sigma_i\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}+h\sigma_i\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right]\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant C\varepsilon\left\{\rho^2\left|4\sigma_i\rho^{-2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}-r(0)\right|+r(0)\rho^2\right.$$

$$\left.+h\rho\left|\frac{\sigma_i}{\rho}\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho-\sqrt{r(0)}\right|+\sqrt{r(0)}h\rho\right\}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant Ch^2$$

于是我们证明了

$$|\tau_i(v)|\leqslant Ch^{2\mu}$$

用完全类似的证明，可得到

定理3.3　如果（3.1）中的σ_i满足

$$\left|r(1)-4\frac{\sigma_i(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(1)}\rho}{2}\right|\left|\omega_0\left(\frac{1-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant Ch^{2\mu} \tag{3.21}$$

则　$|\tau_i(\omega)|\leqslant Ch^{2\mu}$。

将定理3.1～3.3和引理3.1结合起来，得到下列的

定理3.4　如果（3.1）中的$\sigma_i>0$且满足（3.10），（3.11），（3.21），则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant Ch^{2\mu}$$

其中$u(x_i)$和u_i分别为（1.1）和（3.1）的解，而μ由（2.3）确定。

四、指数型拟合因子

根据第三节的讨论，我们可以构造几个特定的拟合因子，使得相应的数值解一致收敛于微分问题（1.1）的解。

1. 变数拟合因子

首先我们考虑

$$\sigma_i(\rho)=\frac{r(x_i)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(x_i)}\,\rho}{2} \tag{4.1}$$

[1]曾讨论过这种拟合因子，他们在条件（1.2）及$p'(x)\geqslant 0$的假设下，证明了含（4.1）拟合因子的差分格式（3.1）的解一阶一致收敛于（1.1）的解。他们用的方法是“古典估计”和“非古典估计”的二次估计法。现在我们去掉$p'(x)\geqslant 0$的条件，通过验证（4.1）满足定理3.1～3.3的条件(3.10)、(3.11)和（3.21）来证明同样的结论。进而我们还可以得到误差阶与系数函数之间的关系。由

$$|1-Z^2\mathrm{sh}^{-2}Z|\leqslant CZ^2\qquad(Z>0) \tag{4.2}$$

立即得出（4.1）满足(3.10)。为了检验（3.11）和(3.21)，引入函数

$$S(x)=\frac{r(x)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2} \tag{4.3}$$

则　$S(x_i)=\sigma_i(\rho)$，我们有

$$S'(x)=\frac{r'(x)}{r(x)}S(x)\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right] \tag{4.4}$$

$$S''(x)=S(x)\left\{\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]^2\right.$$

$$-\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\left[S(x)-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]$$
$$+\frac{r''(x)}{r(x)}\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\coth\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]\Bigg\} \tag{4.5}$$

利用（3.19）和(4.2)，得到

$$|S'(x)|\leqslant C\rho^k S(x)\quad(1\leqslant k\leqslant 2)$$
$$|S''(x)|\leqslant C\rho^2 S(x)$$

将$S(x)$在$x=0$处附近展开，得到

$$S(x_i)=S(0)+x_iS'(\xi)\qquad(\xi\in(0,x_i)) \tag{4.6}$$

于是

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_i(\rho)}{\rho^2}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$
$$=r(0)\frac{x_i}{S(0)}|S'(\xi)||\bar{p}|\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$
$$\leqslant C\rho x_i\frac{S(\xi)}{S(0)}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leqslant Ch \tag{4.7}$$

当条件（Ⅰ）成立时，$r'(0)=0$，从而$S'(0)=0$，代替（4.6），有

$$S(x_i)=S(0)+\frac{1}{2}x_i^2S''(\eta)\quad(\eta\in(0,x_i)) \tag{4.8}$$

因此，在这种情况下

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_i(\rho)}{\rho^2}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$
$$=\frac{x_i^2}{2}\frac{r(0)}{S(0)}|S''(\eta)||\bar{p}|\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$
$$\leqslant C\rho^2x_i^2\frac{S(\eta)}{S(0)}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leqslant Ch^2 \tag{4.9}$$

由（4.7）和(4.9)，我们证明了由（4.1）定义的σ_i满足(3.11)。用完全类似的方法可以验证（4.1）的σ_i也满足(3.21)。因此，有

定理4.1 设u_i为差分格式（3.1）具拟合因子（4.1）的解，$u(x_i)$为微分问题（1.1）的解，则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant Ch^{2\mu}\quad(0\leqslant i\leqslant N) \tag{4.10}$$

μ由（2.3）所确定。

2. **常数拟合因子**

我们希望找到一个较简单的差分格式，但它仍具有一致收敛于（1.1）解的数值解，故我们提出常数拟合因子。

首先我们考虑特殊情况$r(0)=r(1)$，此时定义σ_i为

$$\sigma_i(\rho)\equiv\sigma(\rho)=\frac{r(0)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2} \tag{4.11}$$

显然，(4.11)满足(3.10)，(3.11)和(3.21)。

其次，考虑$r(0)\neq r(1)$，此时，我们用一个分段常数拟合因子：

$$\sigma_i(\rho)=\begin{cases}\dfrac{r(0)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\dfrac{\sqrt{r(0)}\rho}{2} & (1\leqslant i\leqslant N_1)\\ \dfrac{r(1)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\dfrac{\sqrt{r(1)}\rho}{2} & (N_1<i\leqslant N-1)\end{cases} \tag{4.12}$$

这里$x_{N_1}=C_0\in(0,1)$为任一固定点，(4.12)满足(3.10)。

当$1\leqslant i\leqslant N_1$时，(3.11)自然成立。

当$N_1<i\leqslant N-1$时，即$x_i\in[d_0,1]$时，类似于变数拟合因子情况，可以证明它满足(3.11)和(3.12)。因此，我们有

定理4.2　设u_i为差分格式（3.1）具拟合因子（4.11）或（4.12）的解，$u(x_i)$为微分问题（1.1）的解，则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant Ch^{2\mu}\qquad(0\leqslant i\leqslant N)$$

其中μ由（2.3）式确定。

五、数 值 例 子

考虑自共轭常微分方程奇异摄动问题

$$\begin{cases}-\varepsilon(p(x)u'(x))'+q(x)u(x)=f(x) & (0<x<1)\\ u(0)=1,\ u(1)=-1\end{cases}$$

其中　$p(x)=1+x$，$q(x)=1+x^2$，$f(x)=1+x$。

用指数型拟合(4.1)的差分格式（3.1）求解此例，所得结果与渐近解的比较由表1～表4所示，其中 $x_i=ih$：

表1　　　　$h=1/16$，$\varepsilon=0.001$

点坐标	x_1	x_2	x_8	x_{14}	x_{15}
渐近解	1.058366	1.107692	1.200000	1.023547	0.7540572
数值解	1.057297	1.106152	1.198379	1.018154	0.7405489

表2　　　　$h=1/164$，$\varepsilon=0.001$

点坐标	x_1	x_4	x_{70}	x_{90}	x_{99}
渐近解	1.009899	1.038339	1.140788	0.9650653	−0.4527831
数值解	1.009533	1.037250	1.139550	0.9578671	−0.4589947

表3　　　　$h=1/16$，$\varepsilon=0.0001$

点坐标	x_1	x_2	x_8	x_{14}	x_{15}
渐近解	1.058366	1.107692	1.200000	1.061938	1.027228
数值解	1.058352	1.107373	1.199977	1.061932	1.026889

表 4　　$h=1/200,\ \varepsilon=0.0001$

点坐标	x_1	x_4	x_{190}	x_{197}	x_{199}
渐近解	1.004975	1.019592	1.011323	0.562494	−0.208666
数值解	1.004931	1.019488	1.010764	0.5573684	−0.2132915

从表中可以看出，数值解跟渐近解吻合得很好。

参考文献

[1] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[2] 林鹏程、郭雯，《奇异摄动问题数值解法》，讲义.

[3] Il'in, A. M., Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting highest derivative, *Math. Notes*, 6 (1969), 596—602.

[4] Protter, M. A. and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential quaEtions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

[5] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, 32 (1978), 1025—1039.

The Uniformly Convergent Difference Schemes for a Singular Perturbation Problem of a Self-Adjoint Ordinary Differential Equation

Lin Peng-cheng　Guo Wen

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, we construct a class of difference schemes with fitted factors for a singular perturbation problem of a self-adjoint ordinary differential equation. Using a different method from [1] by analyzing the truncation errors of schemes, we give the sufficient conditions under which the solution of the difference scheme converges uniformly to the solution of the differential equation. From this we propose several specific schemes under weaker conditions, and give much higher order of uniform convergence, and applying them to examples, obtain the numerical results.