应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

连续介质的自旋和伸长率标架旋率

郭 仲 衡

（北京大学数学系，1988年6月16日收到）

摘 要

本文探讨至今对连续介质自旋的力学意义的误解的根源并给出正确的解释。

设运动着的物体在当前构型（时刻t）的速度场和速度梯度分别是$\mathbf{v}$和

$$\mathbf{L}=\mathbf{v}\otimes\nabla=\mathbf{D}+\mathbf{W}, \tag{1}$$

其中**伸长率**(stretching)

$$\mathbf{D}=\mathscr{S}\mathbf{L}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{v}) \tag{2}$$

和**自旋**(spin)

$$\mathbf{W}=\mathscr{A}\mathbf{L}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}\otimes\nabla-\nabla\otimes\mathbf{v}) \tag{3}$$

分别是$\mathbf{L}$的对称和反称部分（$\mathscr{S}$和$\mathscr{A}$分别是对称化和反称化算子）。本文采用文献[1]的张量运算符号。

一个多世纪以来，许多作者论述过自旋的力学意义(参阅[1～8])。C. Truesdell在《经典场论》[6]的第355页将这些论述总结为下面一段话：

"Gosiewski[5]漂亮地改述了Stokes的结果[3]。由于沿伸长率主轴的各物质元素瞬时地各自不进行相对转动，如果不计及质点沿这些元素的运动，这些线元素的瞬时运动是刚性的；因此，在通常的刚性运动意义下，*自旋就是伸长率主轴的角速度*。Gosiewski 对上述论点给出一个等效的形式分析。他计算了平行于$d\mathbf{x}$的单位向量$\mathbf{n}$的变化率

$$\dot{n}^k=\frac{\dot{\overline{dx^k}}}{dx}-\frac{\dot{\overline{dx}}}{(dx)^2}dx^k=(w^k{}_m+d^k_m-d_{(\mathrm{n})}\delta^k_m)n^m. \tag{86.10}$$

若$\mathbf{n}$是$\mathbf{d}$的特征向量，则$(d^k_m-d_{(\mathrm{n})}\delta^k_m)n^m=0$，从而(86.10)简化为

$$\dot{n}^k=w^k{}_m n^m, \tag{86.11}$$

这就是要证明的结果的一个解析陈述。"

这里的$\mathbf{d}$就是(2)式的$\mathbf{D}$，而$w^i{}_j$就是(3)式的$\mathbf{W}$的分量。

A. C. Eringen在[7]的第76页和[8]的第52页把上述提法写成定理：

定理2 *自旋是伸长率张量主轴的角速度。* □

它的证明也用到(86.10,11)。

文献[1]中的(5.10,14)等价于(86.10,11)式：

$$\dot{\mathbf{n}}=(\mathbf{L}-d_{\mathbf{n}}\mathbf{I})\mathbf{n}, \qquad (d_{\mathbf{n}}=\mathbf{n}\mathbf{D}\mathbf{n}), \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{n}}_\alpha^D=\mathbf{W}\mathbf{n}_\alpha^D, \tag{5}$$

并且重述了上面用楷体印刷的提法："(5.14)式表现了**W**转动伸长率标架的事实。"

现在看来、对自旋的这种解释是一种误解。

文献[9]认为，澄清这个误解的关键在于引进一种称为"固化物质导数"的新导数，以和一般的物质导数相区别。这种新导数，除了固定质点**X**之外，还要求固定$d\mathbf{X}$，$d\mathbf{A}$或dV。但是，如果我们想求物质线素$d\mathbf{x}$的"固化物质导数"，就会发现，固定相应的$d\mathbf{X}$是多余的，因为作为参考构形的元素，$d\mathbf{X}$是自然固定的。这时，"固化物质导数"和"物质导数"是一回事。如果要计算一个非物质线质的"固化物质导数"，则谈论固定某个$d\mathbf{X}$是毫无意义的。因此，"固化物质导数"的定义是不恰当的。从定义式(2)得不出(7)式（均为[9]的编号）。

问题不在于定义一个新的物质导数（物质导数只有一个），而在于要动态地区别两种标架。

求伸长率**D**主轴的角速度，要对代表这些主轴方向的单位向量$\mathbf{n}_\alpha^D$求物质导数，即在固定**X**下求对t的导数。这个三向量组$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$在每时刻都应是**D**的主向。过去做法的实质是：在由

$$\mathbf{n}=\frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$$

定义的向量组$\{\mathbf{n}\}$中取在时刻t与$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$重合的三向量组$\{\mathbf{n}_\alpha\}$：

$$\mathbf{n}_\alpha(t)=\mathbf{n}_\alpha^D(t), \tag{6}$$

并认为$\dot{\mathbf{n}}_\alpha(t)$就是$\dot{\mathbf{n}}_\alpha^D(t)$：

$$\dot{\mathbf{n}}_\alpha^D(t)=\dot{\mathbf{n}}_\alpha(t). \tag{7}$$

从(6)是得不出(7)的。虽然满足(6)，但在时刻t以外，$\{\mathbf{n}_\alpha\}$一般不同于$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$。正如两条曲线一般不在交点相切一样，这就是误解的症结所在。根源在于没有从动态观点讨论一个动态问题。$\{\mathbf{n}_\alpha\}$是这样一组时变的单位向量，它们在时刻t和$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$重合，随着t的变化，$\mathbf{n}_\alpha$始终和相应的物质线素同向而保持长度不变，形象地说，$\{\mathbf{n}_\alpha\}$是拴在相应物质线素上而滑动的刚性向量。如果称$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$为**伸长率标架**(stretching frame)，则$\{\mathbf{n}_\alpha\}$可称为**瞬时物质共向伸长率标架**(instantaneously material-cooriented stretching frame)。

由(4)、考虑到(1)和(6)，就有

定理Ⅰ 自旋是瞬时物质共向伸长率标架的角速度

$$\dot{\mathbf{n}}_\alpha=\mathbf{W}\mathbf{n}_\alpha. \quad \square \tag{8}$$

今引进固定的笛氏标架$\{\mathbf{i}_\alpha\}$，称为**背景标架**(background frame)。$\{\mathbf{n}_\alpha^D\}$的当前方向可以看作是相对$\{\mathbf{i}_\alpha\}$转动的结果：

$$\mathbf{n}_\alpha^D=\mathbf{R}^D\mathbf{i}_\alpha, \quad \mathbf{i}_\alpha=\mathbf{R}^{D*}\mathbf{n}_\alpha^D, \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{R}^D=\mathbf{n}_\alpha^D\otimes\mathbf{i}_\alpha, \quad \mathbf{R}^{D*}=\mathbf{i}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha^D$$

是转动张量及其转置。将$(9)_1$求物质导数，得

$$\dot{\mathbf{n}}_\alpha^D=\dot{\mathbf{R}}^D\mathbf{i}_\alpha=\dot{\mathbf{R}}^D\mathbf{R}^{D*}\mathbf{R}^D\mathbf{i}_\alpha=\mathbf{\Omega}^D\mathbf{n}_\alpha^D,$$

其中反称张量

$$\mathbf{\Omega}^D=\dot{\mathbf{R}}^D\mathbf{R}^{D*}=\omega_{\alpha\beta}^D\mathbf{n}_\alpha^D\otimes\mathbf{n}_\beta^D. \tag{10}$$

容易证明，$\mathbf{\Omega}^D$与背景标架的选择无关。于是有

定理Ⅱ 由(10)式定义的Ω^D是伸长率标架的角速度：

$$\dot{\mathbf{n}}_\alpha^D=\mathbf{\Omega}^D\mathbf{n}_\alpha^D=\omega_{\beta\alpha}^D\mathbf{n}_\beta^D. \quad \Box \tag{11}$$

为了得到Ω^D的表达式，求谱表示

$$\mathbf{D}=\sum_\alpha d_\alpha \mathbf{n}_\alpha^D\otimes\mathbf{n}_\alpha^D$$

的物质导数，利用(11)，有

$$\dot{\mathbf{D}}=\sum_{\alpha,\beta}[\dot{d}_\alpha\delta_{\alpha\beta}+(d_\beta-d_\alpha)\omega_{\alpha\beta}^D]\mathbf{n}_\alpha^D\otimes\mathbf{n}_\beta^D. \tag{12}$$

这里$\dot{d}_\alpha:=(\partial d_\alpha/\partial t)_X$。约定记$\dot{\mathbf{D}}$的分量为$\dot{d}_{\alpha\beta}:=\mathbf{n}_\alpha^D\dot{\mathbf{D}}\mathbf{n}_\beta^D$，就有

$$\dot{d}_{\alpha\beta}=\dot{d}_\alpha\delta_{\alpha\beta}+(d_\beta-d_\alpha)\omega_{\alpha\beta}^D, \qquad (\text{对}\alpha\text{不求和}). \tag{13}$$

从而

$$\omega_{\alpha\beta}^D=\frac{\dot{d}_{\alpha\beta}}{d_\beta-d_\alpha}, \qquad (d_\alpha\neq d_\beta), \tag{14}$$

和

$$\mathbf{\Omega}^D=\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{\dot{d}_{\alpha\beta}}{d_\beta-d_\alpha}\mathbf{n}_\alpha^D\otimes\mathbf{n}_\beta^D. \tag{15}$$

对于$d_\alpha=d_\beta$情形，可用极限过程求相应的分量。余下只需求出$\dot{\mathbf{D}}$。为此，利用变形梯度$\mathbf{F}$的一个熟知公式 $\dot{\mathbf{F}}^{-1}=-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L}$，有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}}&=\frac{1}{2}(\dot{\overline{\mathbf{v}\otimes\nabla}}+\dot{\overline{\nabla\otimes\mathbf{v}}})=\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{v}}\otimes\nabla+\nabla\otimes\dot{\mathbf{v}}-(\mathbf{v}\otimes\nabla)(\mathbf{v}\otimes\nabla)-(\nabla\otimes\mathbf{v})(\nabla\otimes\mathbf{v})]\\&=\mathscr{S}(\mathbf{M}-\mathbf{L}^2),\end{aligned} \tag{16}$$

其中$\mathbf{M}=\dot{\mathbf{v}}\otimes\nabla$是加速度梯度。$\mathbf{W}$是速度梯度的反称部分，而$\Omega^D$则依赖于速度梯度及加速度梯度。在一般情况下，

$$\mathbf{\Omega}^D\neq\mathbf{W}. \tag{17}$$

因此，这是个完全不同的概念。

参 考 文 献

[1] 郭仲衡，R. N. Dubey，非线性连续介质力学中的“主轴法”，力学进展，13,3 (1983), 1—17.

[2] Coriolis, G., Mémoire sur la manière d'établier les différents principes de la mécanique pour des systems de corps, en les considérant comme assemblages de molécules, *J. École Polytech.*, 15, 24 (1835), 93—132.

[3] Stokes, G. G., On the theories of the internal friction of fluid in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8 (1845), 287—319.

[4] Beltrami, E., Sui principi fondamentali della idrodinamica, *Mem. Acad. Sci. Bologna*, 1,3 (1871), 431—476.

[5] Gosiewski, W., O naturze ruchu wewnatrz elementu płynnego, *Pamietnik Akad. Kraków, mat-przyr.*, 17 (1890), 135—142.

[6] Truesdell, C. and R. A. Toupin, *The Classical Field Theories, Handbuch der*

Physik, Vol. Ⅲ/1, Springer, Berlin (1960).
[7] Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York (1962).
[8] Eringen, A. C., *Continuum Physics*, Vol. Ⅱ, Academic Press, New York (1975).
[9] 程莉、黄克智，固化物质导数与标架旋率，力学学报，19，6 (1987)，524—528.

Spin and Rotation Velocity of the Stretching Frame in Continuum

Guo Zhong-heng

(*Department of Mathematics, Peking University, Beijing*)

Abstract

The present paper investigates the conceptual root of the current incorrect mechanical interpretation of the spin in continuum and gives the correct one.