应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

任意边界条件下圆柱厚壳自由振动分析的空间变量变换法*

倪海鹰　　翁智远

（同济大学，1987年8月25日收到）

摘　　要

本文提出一种一般解析方法——空间变量变换法，用以求解任意边界条件下圆柱厚壳自由振动问题．运用本文方法对悬臂圆柱厚壳的自振特性作了计算，计算结果与薄壳理论相应结果及试验值作了比较．理论分析和计算结果表明，本文方法具有很好的收敛性和精确性，可以推广用于分析梁、板、壳的自由振动．

一、引　　言

近些年，圆柱壳结构的自由振动问题已引起了许多研究人员及工程师们的极大兴趣．目前，大多研究工作限于应用薄壳理论分析圆柱壳的自振特性，文[1]对这些研究工作进行了评述．值得指出的是，文[2]利用 Stokes 变换，用 Fourier 级数表示模态函数，求解了任意类型边界条件下的圆柱薄壳自由振动问题．当圆柱壳的厚度与半径比值、厚度与长度比值较大，或必须计入高频分量时，按经典薄壳理论计算圆柱壳自振特性会带来较大误差．若按三维弹性理论来计算又难以获得各类不同边界条件下的圆柱壳自由振动的解析解．

本文使用 Mirsky-Herrmann 圆柱厚壳方程[3]，考虑转动惯量和剪切变形的效应，从而放弃了经典薄壳理论采用的部分假设．应用厚壳理论分析圆柱壳的自由振动见[1]，[4]，[5]等文献，其中文[5]借助[2]中的方法，对任意边界条件下弹性圆柱厚壳的轴对称振动特性进行了分析．关于任意边界条件下圆柱厚壳的非轴对称自振特性分析，目前尚无文献见到．我们提出一种空间变量变换法，通过边界算子运算，获得了任意边界条件下圆柱厚壳自由振动的一般解析解．本文将计算结果与薄壳理论计算值及试验值作了比较，并且检验了计算结果的收敛性．结果表明，当圆柱壳厚度与半径比值、厚度与长度比值以及波数较大时，薄壳理论的计算结果有相当大误差．本文建议的方法能获得一般解析解，并且收敛性好，精确性令人满意．由文中分析的过程可见，空间变量变换法可推广应用于梁、板、壳的自由振动分析．

* 戴世强推荐．

二、基 本 方 程

本文使用 Mirsky-Herrmann 非轴对称变形的弹性圆柱厚壳运动方程[3]。[3]放弃了 Kirchhoff 假定，并计入转动惯量效应，实际上与 Timoshenko 梁理论和 Mindlin 板理论有类似的意义。位移型的基本运动方程如下：

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \text{对称} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi_x \\ v \\ \psi_\theta \\ w \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

其中

$$L_{11}=E_p\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{Gh}{R^2}\left(1+\frac{I}{hR^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{22}=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{GI}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-K_x^2Gh-\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33}=Gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{E_p}{R^2}+\frac{D}{R^4}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{K_\theta^2G}{R^2}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{44}=GI\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{D}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-K_\theta^2G\left(h+\frac{I}{R^2}\right)-\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{55}=K_x^2Gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{K_\theta^2G}{R^2}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\left(\frac{E_p}{R^2}+\frac{D}{R^4}\right)-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{21}=\frac{D}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{GI}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\rho I}{R}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad L_{31}=E_p\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{32}=0,\ L_{41}=0,\ L_{42}=D\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{43}=\frac{GI}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{D}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{K_\theta^2G}{R}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)-\frac{\rho I}{R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{51}=-E_p\frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x},\quad L_{52}=K_x^2Gh\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{53}=-\left[\frac{K_\theta^2G}{R^2}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)+\frac{E_p}{R^2}+\frac{D}{R^4}\right]\frac{\theta}{\partial\theta}$$

$$L_{54}=\left[\frac{D}{R^3}+\frac{K_\theta^2G}{R}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

这里，K_x，K_θ 是剪切系数，G 是剪切模量，$E_p=Eh/(1-\nu^2)$是压缩模量，ν 为泊松比，$I=h^3/12$是惯性矩，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$是弯曲模量，ρ为质量密度，h为壳厚，R是壳体中面半径。式(2.1)是由圆柱坐标系(x，θ，z)表示的方程，u，v，w 分别为中面上轴向、环向及径向的位移，ψ_x及ψ_θ分别为轴向和环向的转角位移。当上述各项位移函数乘以 $e^{i\omega t}$ 简谐振动因子时，代入式(2.1)不难得出非轴对称变形的自由振动方程。

有限长度为 l 的圆柱壳体，其边界条件为（$x=0$，l处）

a) 位移边界条件:

$$u=\tilde{u},\ \psi_x=\tilde{\psi}_x,\ v=\tilde{v},\ \psi_\theta=\tilde{\psi}_\theta,\ w=\tilde{w} \tag{2.2}$$

b) 力边界条件:

$$N_{xx}=\widetilde{N}_{xx},\ M_{xx}=\widetilde{M}_{xx},\ N_{xr}=\widetilde{N}_{xr},\ N_{x\theta}=\widetilde{N}_{x\theta},\ M_{x\theta}=\widetilde{M}_{x\theta} \tag{2.3}$$

其中，上标符号"～"代表已知边界值，式(2.3)中内力表达式可见[3]。式(2.1)为高阶微分方程组，根据边界条件可获得5个位移函数的解答。文[6]列出了全部边界条件共32种，壳体两端组合后的边界条件有32×32种。

三、空间变量变换法

空间变量变换法是在某一级数展开基础上（一般取正交函数系，常用 Fourier 级数），分析级数在边界上的零值条件。然后，使用一组已知的空间变量函数，通过边界上的算子运算，将相应的零值放松，接着代入自由振动的微分方程组，并调整放松后的空间变量函数及级数系数，使满足实际的边界条件。最后，得出由级数及一组空间变量函数之和表示的振型函数及相应的自振频率。因此，本方法适用于任意边界条件，是一般形式的解析解。

这里，先通过对梁的自由振动求解来阐述空间变量变换法的基本过程，而后推广到圆柱厚壳的分析。选择以下四个基本函数为求解梁问题的四种基本解。

$$\left.\begin{aligned}&S_1=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad S_2=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\cos\frac{k\pi x}{l}\\&S_3=\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi x}{2l},\quad S_4=\sum_{k=0,1,3,\cdots}^{\infty}D_k\cos\frac{k\pi x}{2l}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

式(3.1)中任一级数均可用作求解梁的自由振动。以S_1为例，它的零值条件为：$x=0$，l时，$S_1=S_1''=0$，为此必须通过边界算子运算将这些齐次条件放松使变成非齐次条件，从而也出现了相应的放松后未知端部值。

设空间变量变换式为$\sum_{i=1}^{4}f_ig_i(x)$，f_i是由齐次条件放松后出现的未知值，$g_i(x)$为空间变量函数，这里取多项式

$$g_i(x)=a_i+b_ix+c_ix^2+d_ix^3+e_ix^4+h_ix^5,\qquad i=1,2,3,4 \tag{3.2}$$

对具体问题，$g_i(x)$仅保留其中4项即可。为确定式(3.2)中系数，$g_i(x)$须按所要放松的边界值来选择，一般可由边界算子运算作如下选取：

设D_j表示一种边界算子，$D_j[f]$可以是f，df/dx，d^2f/dx^2或d^3f/dx^3运算的任意一种或它们的线性组合，具体由边界条件确定。这样，$g_i(x)$必须满足下列条件

$$\left.\begin{aligned}&D_j[g_i(0)]=\delta_{ij}\qquad j=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4\\&D_j[g_i(l)]=\delta_{ij}\qquad j=3,\ 4;\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

例如对式(3.1)中S_1基本解，可由式(3.3)，根据相应的零值条件得任意边界条件下的梁振型函数为

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}+w_0\left(1-\frac{x}{l}\right)+w_l\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$+w_0'''\left(-\frac{x^3}{6l}+\frac{x^2}{2}-\frac{lx}{3}\right)+w_l'''\left(\frac{x^3}{6l}-\frac{lx}{6}\right) \tag{3.4}$$

式(3.4)不满足特定的边界条件，代入梁的自由振动方程，可得

$$A_k=\frac{2\Omega}{k^4-\Omega}\left[\frac{1}{k\pi}(w_0-(-1)^k w_l)-\frac{l^2}{k^3\pi^3}(w_0''-(-1)^k w_l'')\right] \tag{3.5}$$

其中

$$\Omega=\frac{\rho A l^4\omega^2}{EI\pi^4}$$

这里A为横截面积，ω为自振频率。当$\Omega=k^4$时，式(3.5)即为两端简支精确解。若应用式(3.4)及(3.5)求解一端简支一端固定梁自由振动，式(3.4)必须满足$w'(l)=0$条件，得频率方程为

$$\Omega\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k^4-\Omega)}+\frac{\pi^2}{6}=0 \tag{3.6}$$

同样用[2]中的 H. Chung 法，频率方程为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^4-\Omega}=0 \tag{3.7}$$

显然，式(3.7)收敛性比式(3.6)差得多。文[2]曾用别的技巧对式(3.7)作改造，但当求解圆柱壳体自由振动时，级数形式往往很复杂，难以改造级数本身。本文方法不需作技巧处理，可直接得出收敛速度很快的振型函数。从本文所述过程可知，空间变量变换法对梁、板、壳的自由振动分析都有适用的意义。

四、圆柱厚壳自由振动分析

用上节所述方法，同样可求解任意边界条件下非轴对称变形的圆柱厚壳自由振动。对于任意环向波数n，振型函数可表达成

$$\left.\begin{aligned}&u_n=f_u(x)\cos n\theta=lf_u(\xi)\cos n\theta,\ \ \psi_{xn}=\beta_x(\xi)\cos n\theta\\&v_n=f_v(x)\sin n\theta=lf_v(\xi)\sin n\theta,\ \ \psi_{\theta n}=\beta_\theta(\xi)\sin n\theta\\&w_n=f_w(x)\cos n\theta=lf_w(\xi)\cos n\theta\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

这里，$\xi=x/l$是无量纲长度，f_u，β_x，f_v，β_θ及f_w分别是轴向、环向及径向的位移或转角振型函数。我们利用式(3.1)中的4个基本级数，来求解任意边界条件下圆柱厚壳的振型函数和自振频率。

取以下3组精确满足某一边界条件的振型函数为壳体自由振动分析的3组基本级数

1. CCSSS 组：满足 SNAD-SNAD 条件

$$\left.\begin{aligned}&f_u(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos k\pi\xi,\ \ \beta_x(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\cos k\pi\xi\\&f_v(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin k\pi\xi,\ \ \beta_\theta(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\sin k\pi\xi\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$f_w(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\sin k\pi\xi$$

2．SSCCC 组：满足 FSNT-FSNT 条件

$$\left.\begin{aligned}&f_u(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\pi\xi,\quad \beta_x(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin k\pi\xi\\&f_v(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cos k\pi\xi,\quad \beta_\theta(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}D_k\cos k\pi\xi\\&f_w(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}E_k\cos k\pi\xi\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

3．C′C′S′S′S′组：满足 SNAD-FSNT 条件

$$\left.\begin{aligned}&f_u(\xi)=\sum_{k=0,1,3}^{\infty}A_k\cos\frac{k\pi\xi}{2},\quad \beta_x(\xi)=\sum_{k=0,1,3}^{\infty}B_k\cos\frac{k\pi\xi}{2}\\&f_v(\xi)=\sum_{k=1,3}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi\xi}{2},\qquad \beta_\theta(\xi)=\sum_{k=1,3}^{\infty}D_k\sin\frac{k\pi\xi}{2}\\&f_w(\xi)=\sum_{k=1,3}^{\infty}E_k\sin\frac{k\pi\xi}{2}\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

同上节一样，利用空间变量变换式，通过边界算子运算，可得分别相应于式(4.2)～(4.4)的振型函数．例如，对 CCSSS 组有

$$\left.\begin{aligned}&f_u(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos k\pi\xi+f_u'(0)\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}\right)+f_u'(l)\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\\&\beta_x(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\cos k\pi\xi+\beta_x'(0)\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}\right)+\beta_x'(l)\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\\&f_v(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin k\pi\xi+f_v(0)(1-\xi)+f_v(l)\xi\\&\beta_\theta(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\sin k\pi\xi+\beta_\theta(0)(1-\xi)+\beta_\theta(l)\xi\\&f_w(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\sin k\pi\xi+f_w(0)(1-\xi)+f_w(l)\xi\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

用式(4.5)求解任意边界条件下壳体的自由振动时，先将式(4.5)代入圆柱厚壳的自由振动方程组，得出级数系数与式(4.5)中10个边界值的关系式，然后令振型函数满足待求的边界条件，得出频率行列式，求出自振频率后再得到振型函数．

对式(4.5)而言，它求解的边界条件为 FSNT-FSNT 时，10个边界值全不为零，故最大频率行列式为10×10阶，但这时用 SSCCC 组求解为精确满足的解。由此见，适当选取式(4.2)～(4.4)中一组基本级数，总能使频率行列式阶数≤5。具体计算中，对已建立的10阶频率行列式，划去相应于满足零边界条件的行和列，就可得任意边界条件下的频率方程。有关级数系数和边界值的关系式以及频率行列式的各元素表达式可详见文[6]。

五、数 值 计 算

工程中最常见的圆柱壳结构为悬臂圆柱壳，其边界条件为一端固定一端自由（C-F条件）。本文对这种边界条件下的圆柱厚壳自由振动作了定值计算。表1列出了取不同级数项数的计算结果及[6]中的试验值，可见取项数为20时就足以达到工程设计计算的精确度，理论计算值与试验值很好吻合。表1所用的参数为 $l=50\text{cm}$，$R=9.5\text{cm}$，$h=1.0\text{cm}$，$E=2.2437\times10^4\text{kg/cm}^2$，$\nu=0.2738$，容重 $\gamma=1.2\text{g/cm}^3$，其中 n，m 分别为环向及轴向波数。表

表1　　C-F条件下圆柱厚壳自振频率（K为级数项数）

频率(Hz) 振型(n, m)	理论计算值 $K=10$	 $K=20$	 $K=30$	试验值
(0, 1)	675.18	677.71	677.43	671.40
(1, 1)	163.92	169.93	170.20	165.00
(1, 2)	628.17	614.83	614.28	625.60
(2, 1)	84.39	89.35	89.24	85.70
(2, 2)	373.80	367.94	367.42	385.70
(2, 3)	751.05	748.99	748.41	764.20
(3, 1)	292.39	296.18	295.66	300.50
(3, 2)	588.46	585.14	584.36	600.00
(3, 3)	770.12	759.47	760.35	781.20
(4, 1)	833.47	835.64	835.20	875.50

表2　　C-F条件下圆柱厚壳与薄壳理论自振频率(Hz)计算

n	m	1	2	3	4
1	厚壳	199.42	701.70	1387.41	1687.92
	薄壳	205.27	712.06	1412.88	1724.46
2	厚壳	410.87	601.11	1055.38	1606.88
	薄壳	433.30	631.53	1103.53	1652.61
3	厚壳	1096.20	1202.42	1458.02	1859.57
	薄壳	1183.80	1305.77	1593.21	2032.34
4	厚壳	2096.07	2110.39	2304.09	2612.69
	薄壳	2282.37	2388.99	2622.23	2996.46

2分别列出了厚壳理论与薄壳理论的计算结果，所用参数为$l=50$cm，$R=10$cm，$\nu=0.4$，$E=3.0\times10^4$kg/cm^2，容重$\gamma=1.2$g/cm^3，$h/R=0.2$。这里薄壳计算结果是由文[7]按Sanders理论计算得出的。计算表明，由于计入剪切变形使刚度降低，而计及转动惯量增加了广义质量，从而导致厚壳理论计算的自振频率比相应薄壳理论计算结果低，当厚度与半径比、厚度与长度比较大或高频计算时，这种现象尤为突出，必须考虑使用厚壳理论。

本文得到了李国豪教授的精心指导，在此深表谢意。

参 考 文 献

[1] Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, NASA SP-288 (1973).
[2] Chung, H., Free vibration analysis of circular cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, **74**, 3 (1981).
[3] Mirsky, I. and G. Herrmann, Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **29**, 10 (1957).
[4] Bhimaraddi, A., A higher order theory for free vibration analysis of circular cylindrical shells, *Int. J. Solids Structures*, **20**, 7 (1984).
[5] 翁智远等，弹性厚圆柱壳的振动，同济大学学报，1 (1985).
[6] 倪海鹰，地下圆柱厚壳与介质动力相互作用的理论及试验研究，同济大学博士学位论文 (1987).
[7] 朱永谊，海中、陆上贮液罐动力分析，同济大学硕士学位论文 (1986).

Space Variable Transform Method for Free Vibration Analysis of Thick Cylindrical Shell with Arbitrary Boundary Conditions

Ni Hai-ying Weng Zhi-yuan
(Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper, a general analytical method——space variable transform method is presented for solving free vibration problems of thick cylindrical shell with arbitrary boundary conditions. Free vibration characteristics of cantilever thick cylindrical shell is evaluated by the presented method, and the numerical results are compared with the results corresponding to thin shell theory and experimental values. Theoretical analysis and calculating results show that the method presented in this paper has good convergence and accuracy and can be extended to analyze free vibration of beams, plates and shells.