

# 阶梯折算法的收敛条件及其一般格式\*

纪 振 义

(安徽建筑工业学院, 1987年9月22日收到)

## 摘 要

叶开沅教授创造了阶梯折算法<sup>[1]</sup>。利用这个方法求解非均匀弹性力学问题, 所得到的解可以用解析式表达, 并具有计算量小、精度高的优点。本文通过数学上的推导, 给出了阶梯折算法的收敛条件, 并证明了当收敛条件满足时, 所得到的解可一致收敛于精确解。文中还给出了阶梯折算法的一般格式及误差估计。由于采用矩阵形式表达, 避免了以往冗长的数学表达式, 使得解的形式非常简洁。文末给出算例, 算例表明运用本文的理论, 可以得到阶梯折算法的正确模式。

## 一、引 言

在工程中许多实际问题都可归结为求解非均匀弹性力学问题。阶梯折算法<sup>[1]</sup>是求解非均匀弹性力学的一个有力工具<sup>[2~6]</sup>, 它可以把问题的解用解析的形式给出, 并可对其中的参数直接求导, 这给优化提供了方便。

阶梯折算法的特点是把一个非均匀物体离散为若干个单元, 把每一个单元看作是均匀的, 再利用内力和位移连续条件得到一个解析表达式。这是从物理的角度考虑的。本文则通过数学上的推导, 直接给出阶梯折算法的收敛条件, 并证明了当收敛条件满足时, 所得到的位移和内力一致收敛于精确解。

文中还给出了阶梯折算法的一般格式。在保证解析解的情况下, 采用矩阵形式表达, 避免了以往冗长的数学表达式, 使得解的形式非常简洁, 易于编程, 同时使优化求导非常方便。

文末给出算例, 算例表明了本文理论的正确性。

## 二、阶梯折算法的收敛条件及其证明

对于非均匀弹性力学的一些问题, 如非均匀梁和圆柱壳的静力问题可归结为在区间  $[0, l]$  上求解一维变系数散度型微分方程

$$Au = (-1)^k (P_k(x) u^{(k)})^{(k)} + (-1)^{k-1} (P_{k-1}(x) u^{(k-1)})^{(k-1)}$$

\* 叶开沅推荐。

国家教委科学基金资助的课题。

$$+\dots + P_0(x)u = f(x) \quad x \in [0, l] \quad (2.1)$$

这里,  $P_n \in C^n[0, l]$  ( $n=0, 1, \dots, k$ ) 和  $f \in L_2[0, l]$ . 不失一般性, 其边界条件可设为

$$u^{(n)}(0) = a_n, \quad u^{(n)}(l) = b_n \quad n=0, 1, \dots, k-1 \quad (2.2)$$

利用阶梯折算法, 把区间  $[0, l]$  分成  $N$  段, 设第  $i$  段区间为  $[x_{i-1}, x_i]$ , 在这个区间用常系数常微分方程

$$\begin{aligned} \bar{A}_i \bar{u} = & (-1)^k P_k(\bar{x}_i) \bar{u}^{(2k)} + (-1)^{k-1} P_{k-1}(\bar{x}_i) \bar{u}^{(2k-2)} \\ & + \dots + P_0(\bar{x}_i) \bar{u} = f(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \quad (2.3)$$

来代替. 其对应的边界条件为

$$\bar{u}^{(n)}(0) = a_n, \quad \bar{u}^{(n)}(l) = b_n \quad n=0, 1, \dots, k-1 \quad (2.4)$$

在 (2.3) 中,  $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ . 现在求证 (2.3) 和 (2.4) 在满足一定条件下所得到的解一致收敛于 (2.1) 和 (2.2) 的解.

在空间  $L_2[0, l]$ , 我们定义范数

$$\|u\| = \left( \int_0^l u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

和内积

$$(u, v) = \int_0^l uv dx \quad (2.6)$$

其中  $u, v \in L_2[0, l]$ . 注意  $A$  和  $\bar{A}_i$  均为线性算子, 因此可得

$$A(u - \bar{u}) - (\bar{A}_i - A)\bar{u} = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.7)$$

对 (2.7) 作内积, 即可得

$$((u - \bar{u}), A(u - \bar{u})) - \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - \bar{u})(\bar{A}_i - A)\bar{u} dx = 0 \quad (2.8)$$

利用分部积分, 由 (2.8) 式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k \int_0^l P_i(x) [(u - \bar{u})^{(i)}]^2 dx - \sum_{i=0}^k \sum_{m=1}^N \int_{x_{m-1}}^{x_m} [P_i(x) - P_i(\bar{x}_m)] (u - \bar{u})^{(i)} \bar{u}^{(i)} dx \\ & + \sum_{m=0}^{k-1} (u - \bar{u})^{(m)} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^i [(P_{i+m}(x)u(x)^{(i+m)})^{(i-1)} - P_{i+m}(\bar{x})\bar{u}(x)^{(2i+m-1)}] \Big|_0^l \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{k-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{k-m} [P_{i+m}(\bar{x}_n)\bar{u}(x_n - \varepsilon)^{(2i+m-1)}(u(x_n - \varepsilon) - \bar{u}(x_n - \varepsilon))^{(m)} \\ & - P_{i+m}(\bar{x}_{n+1})\bar{u}(x_n)^{(2i+m-1)}(u(x_n) - \bar{u}(x_n))^{(m)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

在 (2.9) 中, 记号  $\bar{x}$  在  $x=0$  时,  $\bar{x} = \bar{x}_1$ ; 在  $x=l$  时,  $\bar{x} = \bar{x}_N$ .  $\varepsilon$  是一任意小的正数. 对 (2.9) 式的第二项取极限, 当  $N \rightarrow \infty$  时有

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \sum_{m=1}^N \int_{x_{m-1}}^{x_m} [P_i(x) - P_i(\bar{x}_m)] (u - \bar{u})^{(i)} \bar{u}^{(i)} dx \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^k \sum_{m=1}^N \int_{x_{m-1}}^{x_m} [P_i'(\bar{x}_m)(u - \bar{u})^{(i)} u^{(i)} \Delta x + O(\Delta x^2)] dx = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

若在单元交接处满足连续条件

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}^{(m)}(x_n - \varepsilon) = \bar{u}^{(m)}(x_n) \quad (2.11)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{k-m} P_{i+m}(\bar{x}_n) \bar{u}(x_n - \varepsilon)^{(2i+m-1)} = \sum_{i=1}^{k-m} P_{i+m}(\bar{x}_{n+1}) \bar{u}(x_n)^{(2i+m-1)}$$

$$m=0, 1, \dots, k-1; \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

并注意到边界条件 (2.2) 和 (2.4), 我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \int_0^l P_i(x) [(u - \bar{u})^{(i)}]^2 dx = 0 \quad (2.13)$$

在非均匀弹性力学中, (2.11) 和 (2.12) 式分别对应于位移和内力在单元交接处连续. 若方程 (2.13) 中的  $P_k \geq \tilde{P} > 0$ ,  $P_i \geq 0$  ( $i=0, 1, \dots, k-1$ ), 在边界条件 (2.2) 和 (2.4) 的情况下, 我们可证明  $\bar{u}^{(k)}$  在  $L_2[0, l]$  上收敛于  $u^{(k)}$ ;  $\bar{u}, \bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(k-1)}$  在  $[0, l]$  上一致收敛于精确解. 现证明如下:

由 (2.13) 式, 并注意到  $P_k \geq \tilde{P} > 0$  和  $P_i \geq 0$  ( $i=0, 1, \dots, k-1$ ), 因此可直接得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^l [(u - \bar{u})^{(k)}]^2 dx = 0 \quad (2.14)$$

即  $\bar{u}^{(k)}$  在  $L_2[0, l]$  上收敛于  $u^{(k)}$ . 利用 Schwarz 不等式, 可得

$$[(u(x) - \bar{u}^{(k)}(x))^{(k-1)}]^2 = \left[ \int_0^x (u - \bar{u})^{(k)} dx \right]^2$$

$$\leq \left[ \int_0^x dx \right] \int_0^x (u^{(k)} - \bar{u}^{(k)})^2 dx \leq l \int_0^x (u^{(k)} - \bar{u}^{(k)})^2 dx$$

由 (2.14) 式即可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k-1)}(x) = u^{(k-1)}(x) \quad x \in [0, l]$$

以此类推得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(i)}(x) = u^{(i)}(x) \quad (i=0, 1, \dots, k-1), \quad x \in [0, l] \quad (2.15)$$

由于  $|u^{(i)} - \bar{u}^{(i)}|$  ( $i \leq k-1$ ) 不依赖于  $x$ , 它可由  $N \rightarrow \infty$  得到任意小, 因此  $\bar{u}^{(i)}(x)$  在  $[0, l]$  上一致收敛于  $u^{(i)}(x)$ .

我们定义广义力

$$\tilde{F}_{k-m}(x) = \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^i P_{i+m}(\bar{x}_i) \bar{u}(x)^{(2i+m-1)}$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i]; \quad m=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.16)$$

现在证明  $\tilde{F}_{k-m}$  一致收敛于精确解

$$F_{k-m}(x) = \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^i (P_{i+m}(x) u(x)^{(i+m)})^{i-1} \quad m=0, 1, \dots, k-1 \quad (2.17)$$

由 (2.14) 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^l (\tilde{F}_1 - F_1)^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [P_k(\bar{x}_i) \bar{u}^{(k)}(x) - P_k(x) u^{(k)}(x)] dx = 0 \quad (2.18)$$

通过 (2.2), (2.4), (2.15), (2.18) 和 Schwarz 不等式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\tilde{F}_1 - F_1)^2 |x|_0 &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^x (\tilde{F}_1 - F_1)(F_2 - \tilde{F}_2) dx \\ &+ 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (F_1 - \tilde{F}_1)(P_{k-1}(\bar{x}_i)\bar{u}^{(k-1)} - P_{k-1}(x)u^{(k-1)}) dx \\ &+ 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_m}^x (F_1 - \tilde{F}_1)(P_{k-1}(\bar{x}_{m+1})\bar{u}^{(k-1)}(x) - P_{k-1}(x)\bar{u}^{(k-1)}(x)) dx \\ &\leq 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{F}_1 - F_1\| \cdot \|\tilde{F}_2 - F_2\| = 0 \quad x \in [x_m, x_{m+1}] \end{aligned} \tag{2.19}$$

再利用 (2.18) 式, 即可得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{F}_1(x) = F_1(x)$$

又  $\tilde{F}_3$  是可积函数, 由 (2.15) 式可得

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^l (\tilde{F}_2 - F_2)^2 dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(\tilde{F}_1 - F_1) + (P_{k-1}(\bar{x}_i)\bar{u}^{(k-2)}(x) \\ &- P_{k-1}(x)u^{(k-2)})][(F_3 - \tilde{F}_3) - (P_{k-2}(\bar{x}_i)\bar{u}^{(k-2)} \\ &- P_{k-2}(x)u^{(k-2)}(x))] dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{F}_1 - F_1\| \cdot \|\tilde{F}_3 - F_3\| = 0 \end{aligned}$$

以此类推, 我们便可得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\tilde{F}_n(x) - F_n(x)) = 0 \quad n=1, 2, \dots, k \tag{2.20}$$

如果  $f \in C[0, l]$ , 由 (2.1) 和 (2.3) 则可得

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{P_0(\bar{x}_i)} \frac{d\tilde{F}_k(x)}{dx} - \frac{1}{P_0(x)} \frac{dF_k(x)}{dx} - \left( \frac{1}{P_0(\bar{x}_i)} - \frac{1}{P_0(x)} \right) f(x) \right] \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} (\bar{u} - u) = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \tag{2.21}$$

因 (2.20) 和 (2.21) 式的成立不依赖于  $x$ , 它可由  $N \rightarrow \infty$  而趋近于零, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(x) = F_n(x) \quad n=1, \dots, k \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{P_0(\bar{x}_i)} \frac{d\tilde{F}_k(x)}{dx} - \frac{1}{P_0(\bar{x}_i)} f(x) \right) = \frac{1}{P_0(x)} \frac{dF_k(x)}{dx} - \frac{1}{P_0(x)} f(x) \end{aligned} \tag{2.22}$$

是一致收敛. 如果精确解有  $n$  阶导数存在 ( $n > 2k$ ), 由 (2.1), (2.3), (2.15) 和 (2.22) 即可求出  $u^{(n)}(x)$  的收敛序列  $\{u_N^{(n)}\}$ , 它们一致收敛于  $u^{(n)}(x)$ .

由以上证明可以看出, 用阶梯折算法所得到的解可正经典意义下一致收敛于精确解.

若 (2.13) 中的  $P_k > \tilde{P} > 0$ , 而对某些  $i \leq k-1$

$$P_i(x) < 0 \quad x \in [0, l]$$

若方程

$$\left. \begin{aligned} Au &= 0 \\ u^{(n)}(0) &= 0, \quad u^{(n)}(l) = 0 \quad n=0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \right\} \tag{2.23}$$

有唯一零解, 在一定的条件下, 仍可得到 (2.15) 和 (2.22) 式. 现证明如下:

微分方程 (2.23) 可以写成

$$Au = A_1 u - A_2 u = 0$$

式中  $A_1$  和  $A_2$  均为正定算子. 由于  $u$  为唯一零解, 所以特征值问题

$$A_1 u - \lambda A_2 u = 0 \tag{2.24}$$

$$u^{(n)}(0) = 0, \quad u^{(n)}(l) = 0 \quad n=0, 1, \dots, k-1 \tag{2.25}$$

的特征值  $\lambda$  不可能等于 1. 又由文献[7], 可得 (2.24) 的特征值为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{\bar{u}_1 \in V_1, \bar{u}_1 \neq 0} \frac{(\bar{u}_1, A_1 \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1, A_2 \bar{u}_1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_n &= \min_{\bar{u}_n \in V_n, \bar{u}_n \neq 0} \frac{(\bar{u}_n, A_1 \bar{u}_n)}{(\bar{u}_n, A_2 \bar{u}_n)} \\ &(\bar{u}_1, A_2 \bar{u}_n) = 0, \dots, (\bar{u}_{n-1}, A_2 \bar{u}_n) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.26}$$

这里, 空间  $V_A$  定义为

$$V_A = \{ \varphi: \varphi \in W_2^{(k)}, \text{ 并满足边界条件 (2.25)} \}$$

$W_2^{(k)}$  为 Sobolev 空间<sup>[7]</sup>. 注意  $\lambda_1$  是问题 (2.24) 和 (2.25) 的最小特征值, 如果  $\lambda_1 > 1$ , 对  $\forall \bar{u}_1 \in V_A$  和  $\bar{u}_1 \neq 0$ , 我们便可得到

$$(\bar{u}_1, A_1 \bar{u}_1) - (\bar{u}_1, A_2 \bar{u}_1) \neq 0 \tag{2.27}$$

对 (2.27) 进行分部积分, 并令  $\bar{u}_1 = u - \bar{u}$ , 可以得到

$$\sum_{i=0}^k \int_0^l P_i(x) [(u - \bar{u})^{(i)}]^2 dx \neq 0$$

利用反证法, 当 (2.13) 式成立时, 必然有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - \bar{u}\|_{W_2^{(k)}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^l \sum_{i=0}^k [(u - \bar{u})^{(i)}]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{2.28}$$

由 (2.28) 式, 并利用 Sobolev 空间的嵌入定理, 即可得到 (2.15) 和 (2.18) 式. 从而得到 (2.22) 式.

当 (2.2) 和 (2.4) 的位移边界条件改为其对偶的边界条件 (2.16) 和 (2.17) 时, (2.13) 式仍成立. 如果  $u(0), u(l)$  至少有一个;  $u^{(0)}(0), u^{(1)}(0), u^{(0)}(l), u^{(1)}(l)$  中至少有两个;  $\dots\dots; u^{(0)}(0), u^{(1)}(0), \dots, u^{(k-1)}(0), u^{(0)}(l), u^{(1)}(l), \dots, u^{(k-1)}(l)$  至少有  $k$  个已知时, 上述结论仍然成立.

### 三、阶梯折算法的误差估计

由 (2.9) 和 (2.10) 式可直接得到阶梯折算法的误差估计. 当  $P_k(x) \geq \tilde{P} > 0, P_i \geq 0 (i \leq k-1)$  时

$$\begin{aligned} \int_0^l \tilde{P} [(u - \bar{u})^{(k)}]^2 dx &\leq \sum_{i=0}^k \int_0^l P_i(x) [(u - \bar{u})^{(i)}]^2 dx \\ &\leq \sum_{i=0}^k \sum_{m=1}^N \int_{x_{m-1}}^{x_m} [ |P'_i(\bar{x}_m) \Delta x (u - \bar{u})^{(i)} \bar{u}^{(i)} + O(\Delta x^2) | ] dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

我们取

$$(P' \Delta \bar{x})_{\max} = \max |P'_i(\bar{x}_m) \cdot (x_m - x_{m-1})| \quad m=1, 2, \dots, N$$

略去小量 $O(\Delta x^2)$ , 可以得到

$$\int_0^l \tilde{P} \cdot [(u-\bar{u})^{(k)}]^2 dx \leq \sum_{i=0}^k (P' \Delta \bar{x})_{\max} \sum_{m=1}^N \int_{x_{m-1}}^{x_m} |(u-\bar{u})^{(k)} \bar{u}^{(k)}| dx$$

$$\leq (P' \Delta \bar{x})_{\max} \|u-\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} \cdot \|\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} \quad (3.2)$$

由 Friedrichs 不等式得

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 u^2(a) \quad (3.3)$$

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 u^2(b) \quad (3.4)$$

式中

$$c_1 = \frac{4(b-a)^2}{\pi}, \quad c_2 = \frac{2(b-a)}{\pi}$$

当  $u(a)$  和  $u(b)$  同时等于零时,  $c_1$  可以取

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} = \frac{l^2}{\pi^2}$$

所以

$$(P' \Delta \bar{x})_{\max} \|u-\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} \cdot \|\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} \geq \int_0^l \tilde{P} \cdot [(u-\bar{u})^{(k)}]^2 dx$$

$$\geq \left[ \tilde{P} / \left( \sum_{n=0}^k \left( \frac{l}{\pi} \right)^{2n} \right) \right] \cdot \|u-\bar{u}\|_{W_2^{(k)}}^2$$

最后得误差公式

$$\|u-\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} = [(P' \Delta \bar{x})_{\max} / \tilde{P}] \cdot \sum_{n=0}^k \left( \frac{l}{\pi} \right)^{2n} \|\bar{u}\|_{W_2^{(k)}} \quad (3.5)$$

上式即是用阶梯折算法求解方程 (2.1) 和 (2.2) 的误差估计。

#### 四、阶梯折算法的一般格式

用阶梯折算法求解变系数方程 (2.1), 把区间  $[0, l]$  分成  $N$  段, 设第  $i$  段区间为  $[x_{i-1}, x_i]$ , 我们便把问题转化为在这个区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上求解方程 (2.3), 并需满足单元交接处的连续条件 (2.11), (2.12) 和给定的边界条件。首先我们不难得到常系数常微分方程 (2.3) 的精确解

$$\bar{u}(x) = \sum_{m=1}^{2k} C_{im} f_{im}(x) + Q_i(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4.1)$$

式中  $f_{im}(x)$  是 (2.3) 的齐次解,  $Q_i(x)$  是 (2.3) 的特解,  $C_{im}$  是待定常数。我们定义矢量

$$\{\delta(x)\} = \{\bar{u}^{(0)}(x), \bar{u}^{(1)}(x), \dots, \bar{u}^{(k-1)}(x), \bar{F}_1(x), \bar{F}_2(x), \dots, \bar{F}_k(x)\}^T \quad (4.2)$$

这里  $\bar{F}_m (m=1, \dots, k)$  由 (2.16) 式确定。把 (4.1) 代入 (4.2) 得

$$\{\delta(x)\} = [G_i(x)] \{C_i\} + \{P_i(x)\} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4.3)$$

式中  $[G_i(x)]$  是  $2k \times 2k$  函数矩阵,  $\{C_i\}$  是  $2k \times 1$  待定系数向量,  $\{P_i(x)\}$  是特解  $\{Q_i(x)\}$  生成的向量。令  $x=0$  得

$$\{\delta(0)\} = [G_1(0)] \{C_1\} + \{P_1(0)\}$$

从而得待定系数  $\{C_i\}$

$$\{C_i\} = [G_i(0)]^{-1} (\{\delta(0)\} - \{P_i(0)\}) \quad (4.4)$$

在第  $i$  个单元  $[x_{i-1}, x_i]$  处, 我们可设初参数解为

$$\begin{aligned} \{\delta(x)\} = & [G_i(x-x_{i-1})][G_i(0)]^{-1} (\{\delta(0)\} - P_i(x_{i-1})) + \{P_i(x)\} \\ & + \sum_{m=1}^{i-1} \{x-x_m\}^\circ [G_i(x-x_{i-1})][G_i(0)]^{-1} \{A_m\} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \quad (4.5)$$

式中

$$\{A_m\} = \{A_{m,1} \ A_{m,2} \ \dots \ A_{m,2k}\}^T \quad (4.6)$$

$$\{x-x_m\}^\circ = \begin{cases} 0, & x < x_m \\ 1, & x \geq x_m \end{cases} \quad (4.7)$$

$A_{m,i}$  ( $i=1, 2, \dots, 2k$ ) 为满足单元在阶梯交接处连续所设的待定系数,  $\{x-x_m\}^\circ$  为 Heaviside 函数。

不难验证 (4.5) 是满足 (2.3) 和初始边界条件  $\{\delta(0)\}$  的。把 (4.5) 代入单元阶梯交接处的连续条件

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\delta(x_{i-1}-\varepsilon)\} = \{\delta(x_{i-1})\} \quad (4.8)$$

从而得待定常数矢量

$$\begin{aligned} \{A_{i-1}\} = & ([G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1} - [I])\{\delta(0)\} \\ & - [G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1} \{P_{i-1}(x_{i-2})\} + \{P_{i-1}(x_{i-1})\} \\ & + \sum_{m=1}^{i-2} \{x-x_m\}^\circ ([G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})][G_{i-1}(0)]^{-1} - [I]) \cdot \{A_m\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.5) 和 (4.9) 式即是阶梯折算法求解非均匀弹性力学的一般格式, 由这两式可得到

$$\{\delta(l)\} = [K]\{\delta(0)\} + \{K_f\} \quad (4.10)$$

代入始端  $x=0$  和终端  $x=l$  边界条件, 由 (4.10) 可求出  $\{\delta(0)\}$ , 再将  $\{\delta(0)\}$  代入 (4.5) 式, 即可求出在区间  $[0, l]$  任一点的位移和广义力  $\{\delta(x)\}$ 。

## 五、算 例

算例 1 求解微分方程

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x^2} w = 0 \quad x \in [1, 2] \quad (5.1)$$

利用阶梯折算法, 由方程 (2.3) 可得到常微分方程

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{1}{\bar{x}_i^2} \bar{w} = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.2)$$

式中  $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ 。由方程 (2.11) 和 (2.12) 可得连续条件

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w}(x_{i-1}-\varepsilon) = \bar{w}(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\bar{w}}{dx}(x_{i-1}-\varepsilon) = \frac{d\bar{w}}{dx}(x_{i-1}) \quad (5.3)$$

我们利用 (4.5) 和 (4.9) 求解这一问题, 式中的

$$[G_i(x-x_{i-1})] = \begin{bmatrix} \cos \frac{x-x_{i-1}}{\bar{x}_i} & \bar{x}_i \sin \frac{x-x_{i-1}}{\bar{x}_i} \\ -\frac{1}{\bar{x}_i} \sin \frac{x-x_{i-1}}{\bar{x}_i} & \cos \frac{x-x_{i-1}}{\bar{x}_i} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\{\delta(x)\} = \left\{ \bar{w}(x) \frac{d\bar{w}(x)}{dx} \right\}^T \quad (5.5)$$

注意

$$[G_i(0)]^{-1} = [I], \quad \{P_i(x)\} = \{0\}$$

及由于  $x_0=1$ , 因而需要把 (4.5) 和 (4.9) 中  $\{\delta(0)\}$  改为  $\{\delta(1)\}$ , 从而可得

$$\left. \begin{aligned} \{\delta(x)\} &= [G_i(x-x_{i-1})] \{\delta(1)\} + \sum_{m=1}^{i-1} \{x-x_m\}^\circ [G_i(x_i-x_{i-1})] \{A_m\} \\ \{A_{i-1}\} &= ([G_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})] - [I]) \{\delta(1)\} + \sum_{m=1}^{i-2} \{x-x_m\}^\circ \{A_m\} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

可以看出当  $x=x_0=1$  时, (5.6) 满足初参数解  $\{\delta(1)\}$ .

我们选择初参数

$$\{\delta(1)\} = \{0 \quad \sqrt{3}/2\}^T \quad (5.7)$$

这时 (5.1) 有精确解

$$\begin{aligned} w &= x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \\ \frac{dw}{dx} &= x^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

我们用公式 (5.6) 计算了在区间  $[1, 2]$  上的  $\bar{w}$  和  $d\bar{w}/dx$ , 并与精确解  $w$  和  $dw/dx$  作了比较, 列于表 1. 这里分了 5 等分, 计算结果是满意的.

表 1  $w$  和  $dw/dx$  计算结果

x		1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
本文解	$\bar{w}$	0.1723	0.3400	0.5010	0.6541	0.7991
	$\frac{d\bar{w}}{dx}$	0.8518	0.8221	0.7847	0.7447	0.7044
精确解	$w$	0.1722	0.3399	0.5008	0.6538	0.7989
	$\frac{dw}{dx}$	0.8525	0.8225	0.7852	0.7453	0.7050

利用 (2.22), (5.1) 和 (5.2) 可得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_i^2}{x^2} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{w}}{x^2} \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\bar{x}_i^2}{x^2} \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} - \frac{2\bar{x}_i^2}{x^3} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x^2} \frac{d\bar{w}}{dx} + \frac{2}{x^3} \bar{w} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

现把用 (5.9) 式求得的  $d^2 w/dx^2$  和  $d^3 w/dx^3$  与精确解比较结果列于表 2.

由表 2 可见, 阶梯折算法求解高阶导数的结果也是满意的.



表 2  $d^2w/dx^2$  和  $d^3w/dx^3$  的计算结果

x		1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
本文解	$\frac{d^2w}{dx^2}$	-0.1197	-0.1735	-0.1957	-0.2019	-0.1998
	$\frac{d^3w}{dx^3}$	-0.3921	-0.1716	-0.06189	-5.532E-3	0.02368
精确解	$\frac{d^2w}{dx^2}$	-0.1196	-0.1734	-0.1956	-0.2018	-0.1997
	$\frac{d^3w}{dx^3}$	-0.3927	-0.1719	-0.06218	-5.820E-3	0.02348

算例 2 非均匀大挠度轴对称变形的圆柱壳的平衡方程为

$$D(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ D(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] - N_x \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{E(x)h(x)}{r^2(x)} w(x) = q(x) - \frac{\nu(x)}{r(x)} N_x \quad (5.10)$$

式中,  $D(x)$  为弯曲刚度;  $w(x)$  为挠度;  $N_x$  为轴向力;  $E(x)$  为弹性模量;  $\nu(x)$  为泊松比;  $h(x)$  为壳的厚度;  $r(x)$  为壳的半径。

把柱壳分成  $N$  个壳元, 其对应的常微分方程由 (2.3) 得

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{N_x}{D_i} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{E_i h_i}{D_i r_i^2} w = \frac{\bar{q}(x)}{D_i} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.11)$$

其中  $\bar{q}(x) = q(x) - N_x \nu(x)/r(x)$ 。其单元交接处的连续条件由 (2.12) 可以推出

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(x_{i-1} - \varepsilon) &= w(x_{i-1}), & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'(x_{i-1} - \varepsilon) &= w'(x_{i-1}) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{i-1} w''(x_{i-1} - \varepsilon) &= D_i w''(x_{i-1}) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [D_{i-1} w'''(x_{i-1} - \varepsilon) - N_x w'(x_{i-1} - \varepsilon)] &= D_i w'''(x_{i-1}) - N_x w'(x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

注意  $N_x$  是常量且  $w'(x)$  是连续的, 因此 (5.12) 中的第三式等价于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{i-1} w'''(x_{i-1} - \varepsilon) = D_i w'''(x_{i-1})$$

从而 (4.5) 式中的

$$\{\delta(x)\} = \left\{ w(x) \quad \frac{dw(x)}{dx} \quad -D_i w''(x) \quad -D_i w'''(x) \right\}^T \quad (5.13)$$

由此便可保证位移  $w$  和  $w'$  一致收敛于精确解, 弯矩和剪力

$$\tilde{M}_x = -D_i w''(x), \quad \tilde{Q}_x = -D_i w'''(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.14)$$

在  $[0, l]$  中一致收敛于精确解

$$M_x(x) = -D(x) \frac{d^2 w^*}{dx^2}, \quad Q_x(x) = -\frac{d}{dx} \left( D(x) \frac{d^2 w^*}{dx^2} \right) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.15)$$

这里,  $w^*$  表示精确解。

我们用阶梯折算法计算一个注满水的水池, 如图 1 所示,  $r=914.4\text{cm}$ ,  $\delta_i=8.89\text{cm}$ ,  $\delta_b=35.56\text{cm}$ ,  $l=792.48\text{cm}$ , 材料的弹性模量  $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ , 泊松比  $\nu=0.25$ , 水的容重  $\gamma=0.001 \text{kg/cm}^3$ , 计算结果列于表 3, 表 3 中还给出了  $N=5, 10, 25$  和  $45$  与精确解比较的结果。

立  
明  
数  
学  
报

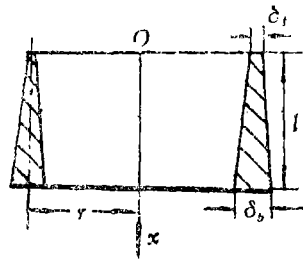


图 1 注满水的水池

表 3 水池的径向挠度 $w$ 和纵向弯矩 $M_x$ 的计算结果

$x$	径向挠度 $w \times 10^{-2}(\text{cm})$					径向弯矩 $M_x(\text{kg} \cdot \text{cm}/\text{cm})$				
	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解	$N=5$	$N=10$	$N=25$	$N=45$	精确解
0	0.2194	0.1037	0.06638	0.0610	0.06014	0	0	0	0	0
304.8	0.6805	0.6841	0.6650	0.6652	0.6630	37.92	45.94	48.12	48.03	48.39
609.6	0.5794	0.5628	0.5584	0.5579	0.5583	918.8	907.5	903.0	907.6	903.31
761.0	0.2385	0.2262	0.2217	0.2210	0.2280	-477.4	-631.6	-670.8	-676.8	-681.4
746.8	0.0760	0.0715	0.0684	0.0679	0.0679	-2629	-2840	-2914	-2913	-2928
792.5	0	0	0	0	0	-6122	-6470	-6577	-6592	-6605

由以上计算结果可以看出,用阶梯折算法可收敛于精确解,并逼近精确解的任意阶导数,证明了本文理论的正确性。

本文得到导师叶开沅教授热情指导和帮助,作者在此谨表谢意。

## 参 考 文 献

- [1] 叶开沅,非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解,Ⅳ、非均匀变厚度梁的弯曲,稳定和自由振动,兰州大学学报,力学专号,1(1979),133—157.
- [2] 叶开沅、许剑云,非均匀变厚度弹性体力学的若干问题的一般解,Ⅰ.在非均匀定常温度场下的非均匀变厚度高速旋转圆盘的弹塑性应力分析,兰州大学学报,力学专号,1(1979),60—74.
- [3] 叶开沅、郭建虎,非均匀变厚度弹性体力学的若干问题的一般解,在任意定常温度场和任意分布载荷下的任意轴对称非均匀、变厚度环形板的弯曲问题,兰州大学学报,力学专号,1(1979),75—114.
- [4] 叶开沅、李金荣、李进潮,非均匀变厚度弹性力学的若干问题一般解,任意分布载荷下两对边筒支单向非均匀变厚度矩形板的弯曲问题,兰州大学学报,力学专号,1(1979),115—132.
- [5] 叶开沅、尚新春,任意分布载荷下两对边筒支单向非均匀变厚度矩形板的弯曲问题的一般解——折线折算法,兰州大学学报,力学专号,19(1983),58—75.
- [6] 叶开沅、汤任基、甄继庆,非均匀变截面弹性圆环在任意载荷下的弯曲问题,应用数学和力学,2,1(1982),1—12.
- [7] Rektorys, Karel, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company Press, Holland, sec. ed. (1980).

## The Convergent Condition and United Formula of Step Reduction Method

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry Institute, Hefei*)

### Abstract

The step reduction method was first suggested by prof. Yeh Kai-yuan<sup>[1]</sup>. This method has more advantages than other numerical methods. By this method, the analytic expression of solution can be obtained for solving nonuniform elastic mechanics. At the same time, its calculating time is very short and convergent speed very fast. In this paper, the convergent condition and united formula of step reduction method are given by mathematical method. It is proved that the solution of displacement and stress resultants obtained by this method can converge to exact solution uniformly, when the convergent condition is satisfied. By united formula, the analytic solution can be expressed as matrix form, and therefore the former complicated expression can be avoided. Two numerical examples are given at the end of this paper which indicate that, by the theory in this paper, a right model can be obtained for step reduction method.