

# 环向和纵向加肋非均匀大变形圆柱壳的自由振动\*

叶开沅 纪振义

(兰州大学) (安徽建筑工业学院)  
(1987年10月15日收到)

## 摘 要

环向和纵向加肋非均匀圆柱壳在航空、宇航等工业广泛运用, 本文使用阶梯折算法<sup>[1]</sup>得到了环向和纵向加肋非均匀大变形圆柱壳在任意边界条件下自由振动的一般解, 问题最后归结为求解一个超越代数方程, 这个方程可以用一个具体的解析表达式表示出来, 文中还给出了收敛性证明和算例, 算例表明, 利用本文的方法, 可得到满意的结果。

## 一、引 言

加肋与非加肋圆柱壳是航空、宇航飞行器与船舶广泛采用的结构形式, 这种结构具有刚度大, 重量轻等优点, 计算其自由振动频率具有重大的实际意义。

对环向加肋圆柱壳的研究, Bleich<sup>[2]</sup>用近似的方法得到了线弹性环向加肋非轴对称壳的自由振动频率, Baron<sup>[3]</sup>用解析方法处理了无限长加肋圆柱壳的自由振动, Wah<sup>[4]</sup>用有限差分法计算了有限长环向加肋圆柱壳在各种边界条件下的自由振动频率, 并考虑了轴向和周向位移, [5]和[6]分别用近似和精确的方法研究了一般圆柱壳的自由振动问题, Forsberg<sup>[7]</sup>得到了加肋柱壳的精确解, Beskos<sup>[8]</sup>用一种新的数值方法分析了环向加肋轴对称柱壳的自由振动, [9]用摄动法求解环向加肋圆柱壳的自由振动频率, [10]~[11]用有限元法研究了这一问题。

本文利用阶梯折算法求得了环向和纵向加肋非均匀轴对称圆柱壳在任意边界条件下大变形自由振动的一般解, 在纵向离散, 在环向作为各向异性壳来处理, 它适用于纵肋很密的场合, 问题最后归结为求解一个超越代数方程, 这个超越代数方程是用具体的解析式给出, 这给优化带来方便。

文中给出阶梯折算法求得的自由振动频率收敛于精确解的证明, 并给出算例, 表明用本文的方法可得到满意的结果。

\* 国家教委科学基金资助的课题。

## 二、纵向加肋非均匀轴对称圆柱壳大变形自由振动的一致解

纵向加肋非均匀圆柱壳如图 1 所示。这里，纵肋沿轴线  $x$  坐标的变化可以看作是非均匀的，我们把带纵肋的圆柱壳作为各向异性壳来考虑。

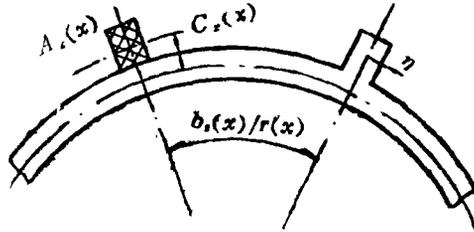


图 1 纵向肋壳体截面 ( $x=\text{const}$ )

由[12]，可以推出纵向加肋非均匀圆柱壳在大变形的情况下的内力位移关系和自由振动的动力方程。它的内力位移关系为

$$\begin{aligned} N_\phi(x,t) &= \frac{D_\phi(x)}{r(x)} w(x,t) + D_v(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ N_z(x,t) &= D_z(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{D_v(x)}{r(x)} w(x,t) - S_z(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ M_\phi(x,t) &= -K_v(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ M_z(x,t) &= -K_z(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + S_z(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

在自由振动时，轴向膜力  $N_z$  等于零，因此我们可以得到自由振动的动力方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( K_z(x) - \frac{S_z^2(x)}{D_z(x)} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{S_z(x) D_v(x)}{D_z(x) r(x)} w(x,t) \right] \\ + \frac{S_z(x) D_v(x)}{D_z(x) r(x)} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{w(x,t)}{r^2(x)} \cdot \left( D_\phi(x) - \frac{D_v^2(x)}{D_z(x)} \right) \\ + [\rho(x) h(x) + \rho_s(x) A_r(x) / b_s(x)] \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

在方程(2.1)和(2.2)中的刚度参数定义为

$$\left. \begin{aligned} D_\phi(x) &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)}, \quad D_z(x) = \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} + \frac{E_s(x)A_r(x)}{b_s(x)} \\ D_v(x) &= \frac{E(x)h(x)\nu(x)}{1-\nu^2(x)}, \quad S_z(x) = \frac{E_s(x)A_r(x)C_r(x)}{b_s(x)} \\ K_z(x) &= \frac{E(x)h^3(x)}{12(1-\nu^2(x))} + \frac{E_s(x)[I_z(x) + A_r(x)C_r^2(x)]}{b_s(x)} \\ K_v(x) &= \frac{E(x)h^3(x)\nu(x)}{12(1-\nu^2(x))} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

(2.1)~(2.3)中的符号意义为

$u, w$ ——轴向和径向挠度;  $M_z$  和  $M_\phi$ ——纵向和环向弯矩;  $N_z, N_\phi$ ——纵向和环向膜力;  $E(x), E_s(x)$ ——壳和纵肋的弹性模量;  $\nu(x)$ ——泊松比;  $h(x)$ ——壳的厚度;  $r(x)$ ——壳的半径;  $A(x)$ ——纵肋的横截面积;  $C_\phi$ ——纵肋截面形心到壳体中面的距离;  $b_s(x)$ ——两纵肋相邻的弧长;  $I_z(x)$ ——纵肋对主形心轴的惯性矩;  $\rho(x), \rho_s(x)$ ——壳和纵肋的质量密度。

应当指出(2.2)式只适用于密加肋的情况, 当纵肋在柱壳外时  $S_z$  为正, 在里时为负。

利用阶梯折算法, 将柱壳分成  $N$  个柱壳元, 只要每个壳元足够小, 它们可以看作是均匀的, 等厚度和等半径的。设第  $i$  个柱壳元的厚度和半径分别为  $h_i$  和  $r_i$ , 质量密度为  $\rho_i$ , 纵肋的质量密度, 横截面积和两邻纵肋的弧长为  $\rho_{si}, A_{si}$  和  $b_{si}$ , 刚度参数为  $K_{zi}, S_{zi}, D_{zi}, D_{vi}$  和  $D_{\phi i}$ 。壳元的始端座标为  $x_{i-1}$ , 终端座标为  $x_i$ 。令

$$w(x, t) = w(x) \exp[i\omega t] \quad (2.4)$$

代入(2.2), 方程(2.2)转化为

$$\left( K_{zi} - \frac{S_{zi}^2}{D_{zi}} \right) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{2S_{zi} D_{vi}}{r_i D_{zi}} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{w(x)}{r_i^2} \cdot \left[ D_{\phi i} - \frac{D_{vi}^2}{D_{zi}} - \omega^2 r_i^2 (\rho_i h_i + \rho_{si} A_{si} / b_{si}) \right] = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.5)$$

令

$$\theta(x, t) = \theta(x) \exp[i\omega t], \quad M_z(x, t) = M_z(x) \exp[i\omega t], \quad Q_z(x, t) = Q_z(x) \exp[i\omega t]$$

式中  $\theta(x, t)$  和  $Q_z(x, t)$  分别为壳的转角和横向剪力。从方程(2.1), 我们可以导出

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dw(x)}{dx} \\ M_z(x) &= \left( \frac{S_{zi}^2}{D_{zi}} - K_{zi} \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{S_{zi} D_{vi}}{D_{zi} r_i} w(x) \\ Q_z(x) &= \left( \frac{S_{zi}^2}{D_{zi}} - K_{zi} \right) \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + \frac{S_{zi} D_{vi}}{D_{zi} r_i} \frac{dw(x)}{dx} \end{aligned} \right\} x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.6)$$

在各单元交接处应保持位移和内力连续, 即  $w(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $M_z(x)$  和  $Q_z$  连续。

当  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  时, 方程(2.5)的初参数解可为

$$\{\delta(x)\} = [F_i(x - x_{i-1})] \{\delta(0)\} + \sum_{k=1}^{i-1} \{x - x_k\}^\circ \cdot [F_i(x - x_{i-1})] \{A_k\} \quad (2.7)$$

式中记号

$$\{x - x_k\}^\circ = \begin{cases} 1 & (x \geq x_k) \\ 0 & (x < x_k) \end{cases}$$

为 Heaviside 函数。向量

$$\left. \begin{aligned} \{\delta(x)\}^T &= \{w(x) \quad \theta(x) \quad M_z(x) \quad Q_z(x)\} \\ \{A_k\}^T &= \{A_{1k} \quad A_{2k} \quad A_{3k} \quad A_{4k}\} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$A_{ik}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) 为待定常数, 由单元阶梯处的连续条件而确定。由(2.6)可推出

$$[F_i(x)] = \begin{pmatrix} f_{1i}(x) & f_{2i}(x) \\ f'_{1i}(x) & f'_{2i}(x) \\ -K_{si}f''_{1i}(x) - D_{si}f'_{1i}(x) & -K_{si}f''_{2i}(x) - D_{si}f'_{2i}(x) \\ -K_{si}f''_{1i}(x) - D_{si}f'_{1i}(x) & -K_{si}f''_{2i}(x) - D_{si}f'_{2i}(x) \\ -f_{3i}(x)/D_i & -f_{4i}(x)/D_i \\ -f'_{3i}(x)/D_i & -f'_{4i}(x)/D_i \\ D_i^{-1}(K_{si}f''_{3i}(x) + D_{si}f'_{3i}(x)) & D_i^{-1}(K_{si}f''_{4i}(x) + D_{si}f'_{4i}(x)) \\ D_i^{-1}(K_{si}f''_{3i}(x) + D_{si}f'_{3i}(x)) & D_i^{-1}(K_{si}f''_{4i}(x) + D_{si}f'_{4i}(x)) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

(2.9)式中的记号:

$$K_{si} = K_{zi} - \frac{S_{zi}}{D_{zi}}, \quad D_{si} = \frac{S_{zi}D_{vi}}{r_i D_{zi}}, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)} \quad (2.10)$$

$f_{ki}(x)$  ( $k=1, 2, 3$  和  $4$ ) 是方程(2.5)的齐次解.

一般情况下有

$$(\rho_i h_i + \rho_{si} A_{zi}/b_{si}) \omega^2 r_i^2 - (D_{\phi i} - D_{vi}^2/D_{zi}) > 0$$

记

$$m_i = D_{si}/K_{si}$$

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{r_i^2} \left[ (\rho_i h_i + \rho_{si} A_{zi}/b_{si}) \omega^2 r_i^2 - (D_{\phi i} - \frac{D_{vi}^2}{D_{zi}}) \right]} / K_{si}^2$$

不用用标准的方法求得  $f_{ki}(x)$  和其导数见表 1.

表 1  $f_{ki}(x)$  ( $k=1, \dots, 4$ ) 及其导数的表达式

k	$f_{ki}(x)$	$f'_{ki}(x)$	$f''_{ki}(x)$	$f'''_{ki}(x)$	备 注
1	$\frac{A+\lambda_1^2}{\lambda} F_1 +$	$\frac{\lambda_1(\lambda_1^2+A)}{\lambda} F_2$	$\lambda_1^2(\lambda_1^2+A) \cdot F_1/\lambda$	$\lambda_1^3(A+\lambda_1^2)F_2/\lambda$	$\lambda_1 = (\sqrt{m_i^2 + n_i^2} - m_i)^{1/2}$ $\lambda_2 = (\sqrt{m_i^2 + n_i^2} + m_i)^{1/2}$
	$\frac{A_1^2 - A}{\lambda} F_3$	$-\frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - A)}{\lambda} F_4$	$-\lambda_2^2(\lambda_1^2 - A) \cdot F_3/\lambda$	$+\lambda_2^3(\lambda_1^2 - A)F_4/\lambda$	
2	$\frac{\lambda_2^2 + A}{\lambda \lambda_1} F_2 +$	$\frac{\lambda_2^2 + A}{\lambda} F_1 +$	$\lambda_1(\lambda_2^2 + A) \cdot F_2/\lambda$	$\lambda_1^2(A + \lambda_2^2)F_1/\lambda$	$\lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ $F_1 = \text{ch} \lambda_1 x$ $F_2 = \text{sh} \lambda_1 x$
	$\frac{\lambda_1^2 - A}{\lambda \lambda_2} F_4$	$\frac{\lambda_1^2 - A}{\lambda} F_3$	$-\frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - A)}{\lambda} F_4$	$-\lambda_2^2(\lambda_1 - A)F_1/\lambda$	
3	$B \frac{F_1 - F_3}{\lambda}$	$B(\lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_4)/\lambda$	$B(\lambda_1^2 F_1 + \lambda_2^2 F_3)/\lambda$	$B(\lambda_1^3 F_2 - \lambda_2^3 F_4)/\lambda$	$F_3 = \cos \lambda_2 x$ $F_4 = \sin \lambda_2 x$
4	$\frac{B}{\lambda} \left( \frac{F_3}{\lambda_1} - \frac{F_4}{\lambda_2} \right)$	$B(F_1 - F_3)/\lambda$	$B(F_2 \lambda_1 + \lambda_2 F_4)/\lambda$	$B(\lambda_2^2 F_1 + \lambda_1^2 F_3)/\lambda$	$A = -D_{si}/K_{si}$ $B = D_i/K_{si}$

在各单元阶梯交接处应满足连续条件

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\delta(x_{i-1} - \epsilon)\} = \{\delta(x_{i-1})\} \quad (i=2, \dots, N) \quad (2.11)$$

式中  $\epsilon > 0$ . 把(2.7)代入(2.11), 即可求得

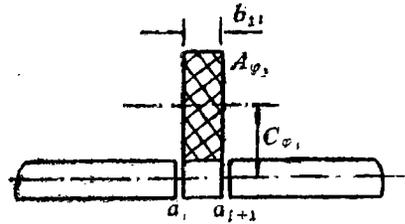
$$\begin{aligned} \{A_{i-1}\} &= ([F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I]) \{\delta(0)\} \\ &+ \sum_{k=1}^{i-2} \{x - x_k\} \circ ([F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I]) \{A_k\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

方程(2.7)和(2.12)式即是我们对方程(2.5)所求得初参数解.

## 三、环向和纵向加肋非均匀轴对称圆柱壳大变形的自由振动

对环向和纵向加肋的非均匀圆柱壳，可把和环肋联接在一起的壳作为一个壳元来考虑，设为第  $i$  个壳元，如图 2 所示，图中纵肋没有画出。一般来说，环肋的宽度远远小于它的高度，我们可以不考虑环肋的侧面弯曲刚度。

由[12]，我们推出环向加肋非均匀轴对称圆柱壳大变形时的内力和位移关系

图 2 带有环肋壳体的截面 ( $\phi = \text{const}$ )

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\phi}(x, t) &= \left[ \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} + \frac{E_{r_i}A_{\phi_i}}{b_{i_i}} \right] \frac{w(x, t)}{r(x)} \\
 &\quad + \frac{E(x)h(x)\nu(x)}{1-\nu^2(x)} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 N_x(x, t) &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{w(x, t)}{r(x)} \right] \\
 M_{\phi}(x, t) &= -D(x)\nu(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{E_{r_i}A_{\phi_i}c_{\phi_i}}{b_{i_i}} w(x, t) \\
 M_x(x, t) &= -D(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

和自由振动的动力方程

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} \left[ D(x) \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} \right] + \left( \frac{E(x)h(x)}{r^2(x)} + \frac{E_{r_i}A_{\phi_i}}{r^2(x)b_{i_i}} \right) w(x, t) \\
 + [\rho(x)h(x) + \rho_{r_i}A_{\phi_i}/b_{i_i}] \frac{\partial w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad [x_{i-1}, x_i] \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

式中： $A_{\phi_i}$ ——环肋的截面积； $c_{\phi_i}$ ——环肋截面形心到壳中面的距离， $\rho_{r_i}$ ——环肋的密度， $b_{i_i}$ ——环肋和壳元的宽度， $E_{r_i}$ ——环肋的弹性模量。

我们把壳元看作是均匀的，把(2.4)代入(3.1)和(3.2)，利用阶梯折算法，(3.1)和(3.2)即可转化为

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\phi}(x) &= \left( \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} + \frac{E_{r_i} A_{\phi_i}}{b_{i_i}} \right) \frac{w(x)}{r_i} + \frac{E_i h_i \nu_i}{1-\nu_i^2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 \\
 N_x(x) &= \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw(x)}{dx} + \nu_i w(x) \right] \\
 M_{\phi}(x) &= -D_i \nu_i \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{E_{r_i} A_{\phi_i}}{b_{i_i}} (c_{\phi_i} w(x)) \\
 M_x(x) &= -D_i \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

和

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{1}{D_i r_i^2} \left[ E_i h_i + \frac{E_{r_i} A_{\phi i}}{b_{i1}} - \omega^2 r_i^2 (\rho_i h_i + \rho_{r_i} A_{\phi i} / b_{i1}) \right] w(x) = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (3.4)$$

式中

$$N_\phi(x) = N_\phi(x, t) / \exp[i\omega t], \quad N_z(x) = N_z(x, t) / \exp[i\omega t], \\ M_z(x) = M_z(x, t) / \exp[i\omega t]$$

由(3.3)可得

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dw}{dx}, \quad M_z(x) = -D_i \frac{d^2 w}{dx^2} \\ Q_z(x) &= -D_i \frac{d^3 w}{dx^3} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

我们只需令(2.7)中的  $A_{zi}$  和  $I_{zi}$  等于零, 且改变  $f_{1i} - f_{2i}$  的特征根  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  (见表1), 方程(2.7)便是带纵肋和环肋非均匀圆柱壳的初参数解。当

$$\omega^2 \left[ \rho_i h_i + \frac{\rho_{r_i} A_{\phi i}}{b_{i1}} \right] - \frac{1}{r_i^2} \left( E_i h_i + \frac{E_{r_i} A_{\phi i}}{b_{i1}} \right) > 0$$

时, 表1中的

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \left( \left[ \left( \rho_i h_i + \frac{\rho_{r_i} A_{\phi i}}{b_{i1}} \right) \omega^2 - \frac{1}{r_i^2} \left( E_i h_i + \frac{E_{r_i} A_{\phi i}}{b_{i1}} \right) \right] / D_i \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.6)$$

把上式代入表1, 即可求出  $f_{1i} \sim f_{2i}$ 。

当柱壳中间有弹性支座时, 设在第  $i-1$  和第  $i$  个壳元的交接处。这时, 壳元交接处的连续条件为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Z_i] \{ \delta(x_{i-1} - \varepsilon) \} = \{ \delta(x_{i-1}) \} \quad (3.7)$$

式中

$$[Z_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_i & 1 & 0 \\ C_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$C_i$  为支座的弹簧刚度,  $q_i$  为扭转刚度。此连接条件说明在支座处, 剪力和弯矩有跳跃, 挠度和转角为连续。把(2.7)代入(3.7), 即可求出

$$\{ A_{i-1} \} = \{ [Z_i] [F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I] \} \left( \{ \delta(0) \} + \sum_{k=1}^{i-2} \{ x - x_k \}^\circ \{ A_k \} \right) \quad (3.9)$$

把(2.12)或(3.9)代入(2.7), 并令  $x=t$  得

$$\{ \delta(l) \} = [K] \{ \delta(0) \} \quad (3.10)$$

$l$  是柱壳的长度。由(3.10)便得到求解纵向和环向加肋非均匀圆柱壳在不同边界条件下决定振动频率的方程, 现将结果列于表2。

表2 各种不同边界条件的频率方程

种 类	边 界 条 件	频 率 方 程
两端夹紧	$x=0, w=\theta=0$ $x=l, w=\theta=0$	$K_{13}K_{34}-K_{23}K_{14}=0$
两端简支	$x=0, w=M_x=0$ $x=l, w=M_x=0$	$K_{12}K_{34}-K_{32}K_{14}=0$
两端悬空	$x=0, M_x=Q_x=0$ $x=l, M_x=Q_x=0$	$K_{31}K_{41}-K_{32}K_{41}=0$
一端简支 一端夹紧	$x=0, w=M_x=0$ $x=l, w=\theta=0$	$K_{12}K_{34}-K_{22}K_{14}=0$
一端简支 一端悬空	$x=0, w=M_x=0$ $x=l, M_x=Q_x=0$	$K_{11}K_{32}-K_{31}K_{12}=0$
一端夹紧 一端悬空	$x=0, w=\theta=0$ $x=l, M_x=Q_x=0$	$K_{23}K_{44}-K_{34}K_{43}=0$

求解频率方程, 即可得到自振频率  $\omega$ 。

#### 四、收敛性证明

本节给出用公式(2.7)和(2.12)求解非均匀纵向和环向圆柱壳自由振动的收敛性证明, 对不加肋的非均匀轴对称柱壳可以看作是纵向加肋  $A_x=I_x=0$  的特例, 把柱壳分成  $N$  个柱壳元, 其中第  $i_k$  壳元 ( $k=1, \dots, N_1$ ) 带有纵肋, 第  $j_m$  壳元带有环肋 ( $m=1, \dots, N_2$ ) 及  $N_1+N_2=N$ 。我们记内积

$$\begin{aligned}
 (w(x), Aw(x)) = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i_{k-1}}}^{x_{i_k}} \left( w(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left[ \left( k_x(x) - \frac{S_x^2(x)}{D_x(x)} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} \right. \right. \\
 & + \left. \frac{S_x(x) D_v(x)}{D_x(x) r(x)} w \right] + \frac{S_x(x) D_v(x)}{D_x(x) r(x)} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left( D_\phi(x) \right. \\
 & \left. - \frac{D_v^2(x)}{D_x(x) r^2(x)} w(x) \right) dx + \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j_{m-1}}}^{x_{j_m}} \left( w(x) \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r^2(x)} \left( E(x) h(x) + \frac{E r_{j_m} A \phi_{j_m}}{b_{1j_m}} w(x) \right) \right) dx \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

由于在纵肋和环肋的交接处须保持  $w(x), \theta(x), M_x(x)$  和  $Q_x(x)$  连续, 利用分部积分, 由(4.1)式得

$$\begin{aligned}
 (w(x), Aw(x)) = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i_{k-1}}}^{x_{i_k}} \left( \left\{ K_x(x) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{D_\phi(x)}{r^2(x)} w^2(x) \right\} - \right. \\
 & \left. \left\{ \frac{1}{D_x(x)} \left[ S_x(x) \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{D_v(x)}{r(x)} w \right]^2 \right\} \right) dx \\
 & + \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j_{m-1}}}^{x_{j_m}} \left[ D(x) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2(x)} \left( E(x) h(x) + \frac{E r_{i_k} A \phi_{i_k}}{b_{1i_k}} \right) w^2(x) \right] dx
 \end{aligned}$$

$$+w(x)Q_x(x) \Big|_0^{x_N} - \frac{dw(x)}{dx} M_x(x) \Big|_0^{x_N} \tag{4.2}$$

(4.2)中的  $M_x(x)$  可以从(2.1)式(3.1)得出, 而

$$Q_x(x) = -\frac{d}{dx} M_x(x)$$

如果在边界  $x=0$  或  $x=x_N$  上, 有  $w=0$  和  $dw/dx=0$  或与其对应的力学边界条件  $M_x(x)$  和  $Q_x(x)=0$ , 则(4.2)中的最后两式消失. 同时记

$$\begin{aligned} (w(x), Bw(x)) = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i_{k-1}}}^{x_{i_k}} [(\rho(x)h(x) + \rho_s(x) \cdot A_s(x)/b_s(x))w^2(x)] dx \\ & + \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j_{m-1}}}^{x_{j_m}} (\rho(x)h(x) + \rho_{r_{j_m}}A_{\phi_{j_m}}/b_{1j_m})w^2(x) dx \end{aligned} \tag{4.3}$$

从(4.3)可得

$$(w(x), Bw(x)) > \alpha(w(x), w(x)) \quad (w \neq 0)$$

式中  $\alpha$  为一任意的正数, 从而可得  $B$  是一正定算子. 又如果微分算子  $A$  为正定, 由[13]我们可得(2.2)式的任意阶的自由振动频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 = \min_{v_1 \in V_A, v_1 \neq 0} \frac{(v_1, Av_1)}{(v_1, Bv_1)} \\ \dots\dots\dots \\ \omega_n^2 = \min_{v_n \in V_A, v_n \neq 0} \frac{(v_n, Av_n)}{(v_n, Bv_n)} \\ (v_1, Bv_n) = 0, \dots, (v_{n-1}, Bv_n) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.4}$$

空间  $V_A \subset W_2^{(2)}$ ,  $w_2^{(2)}$  是 Sobolev 空间[13],  $V_A$  中的元素满足给定的零位移边界条件.

又我们记

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (w(x), A_i w(x)) = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i_{k-1}}}^{x_{i_k}} \left( w(x) \left\{ \left( K_{x_{i_k}} - \frac{S_{x_{i_k}}^2}{D_{x_{i_k}}} \right) \frac{d^4 w}{dx^4} \right. \right. \\ & + \frac{2S_{x_{i_k}} D_{v_{i_k}}}{r_{i_k} D_{x_{i_k}}} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{1}{r_{i_k}^2} \left( D_{\phi_{i_k}} - \frac{D_{v_{i_k}}^2}{D_{x_{i_k}}} \right) w(x) \left. \left. \right\} \right) dx \\ & + \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j_{m-1}}}^{x_{j_m}} \left( w(x) \left\{ D_{j_m} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{w(x)}{r_{j_m}^2} \left( E_{j_m} h_{j_m} + \frac{E_{r_{j_m}} A_{\phi_{j_m}}}{b_{1j_m}} \right) \right\} \right) dx \\ = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i_{k-1}}}^{x_{i_k}} \left( \left\{ K_{x_{i_k}} \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + \frac{D_{\phi_{i_k}}}{r_{i_k}^2} w^2(x) \right\} - \frac{1}{D_{x_{i_k}}} \left[ S_{x_{i_k}} \frac{d^2 w}{dx^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_{v_{i_k}}}{r_{i_k}} w(x) \right]^2 \right) dx + \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j_{m-1}}}^{x_{j_m}} \left[ D_{j_m} \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{r_{j_m}^2} \left( E_{j_m} h_{j_m} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{E_{r_{j_m}} A_{\phi_{j_m}}}{b_{1j_m}} \right) w^2(x) \right] dx + \sum_{i=1}^N w(x) Q_x(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^N \frac{dw(x)}{dx} M_x(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5)中的  $M_s$  和  $Q_s$  由式(2.6)或(3.5)式得到。由于  $w, w', M_s$  和  $Q_s$  在壳元的交接处连续, 在给定的零边界条件时(4.5)中最后两式消失。由(4.2)和(4.5)可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (w(x), A_n w(x)) = (w(x), Aw(x)) \tag{4.6}$$

又

$$\sum_{i=1}^N (w(x), B_i(x)w(x)) = \sum_{k=1}^{N_1} \int_{x_{i,k-1}}^{x_{i,k}} (\rho_{i,k} h_{i,k} + \rho_{s i,k} A_{s i,k} / b_{s i,k}) w^2(x) dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{N_2} \int_{x_{j,m-1}}^{x_{j,m}} (\rho_{j,m} h_{j,m} + \rho_{r j,m} A_{r j,m} / b_{1 j,m}) w^2(x) dx \tag{4.7}$$

从而由(4.3)和(4.7)可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (w(x), B_i w(x)) = (w(x), Bw(x)) \tag{4.8}$$

由[13], 方程(2.5)的自由振动频率为

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \min_{v_1 \in V_A, v_1 \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^N (v_1, A_i v_1)}{\sum_{i=1}^N (v_1, B_i v_1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n^2 &= \min_{v_n \in V_A, v_n \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^N (v_n, A_i v_n)}{\sum_{i=1}^N (v_n, B_i v_n)} \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^N (v_n, B_i v_1) &= 0, \dots, \sum_{i=1}^N (v_n, B_i v_{n-1}) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

由(4.4), (4.6), (4.8)和(4.9)即可得当  $N \rightarrow \infty$ , (2.5)的各阶自由振动频率  $\omega$  收率于(2.2)式的精确解。也就是说用阶梯折算法求解(2.2)收敛于精确解。

现讨论微分算子  $A$  的正定性。因为

$$a^2 + b^2 \geq 2|ab|$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_s(x)} \left[ S_s(x) \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{D_v(x)}{r(x)} w(x) \right]^2 &= \frac{1}{D_s(x)} \left[ S_s^2(x) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_v^2(x)}{r^2(x)} w^2(x) - \frac{2S_s(x)D_v(x)}{r(x)} w(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \\ &\leq \frac{2}{D_s(x)} \left[ S_s^2(x) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + \frac{D_v(x)}{dx^2} w^2(x) \right] \end{aligned}$$

因此在(4.2)中, 如果

$$K_z(x) > \frac{2}{D_z(x)} S_z^2(x) \tag{4.10}$$

和 
$$D_z(x) \frac{D_\phi(x)}{r^2(x)} \geq 2D_v^2(x)/r^2(x) \tag{4.11}$$

满足, 那么  $(w(x), Aw(x))$  在表 2 中的边界条件下正定, 用阶梯折算法求得的自由振动频率收敛于精确解。利用(2.3)不难证明, (4.11)恒满足。在实际问题中,  $S_z^2/D_z$  与  $K_z(x)$  相比是一小量, 因此(4.10)也可满足。

### 五、算 例

**算例 1** 一个变厚度的柱壳, 其形状如图 3 所示。半径  $r=914.4\text{cm}$ , 厚度  $\delta_t=8.89\text{cm}$ ,  $\delta_b=35.56\text{cm}$ , 长度  $l=792.48\text{cm}$ , 材料的弹性模量  $E=2.1 \times 10^9 \text{N/cm}^2$ , 泊松比  $\nu=0.25$ , 质量密度  $\rho=7.86 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$ 。本文把壳体分别划分成 11 个单元和 25 个单元进行计算, 求得的自由振动频率  $\omega$  列于表 3。

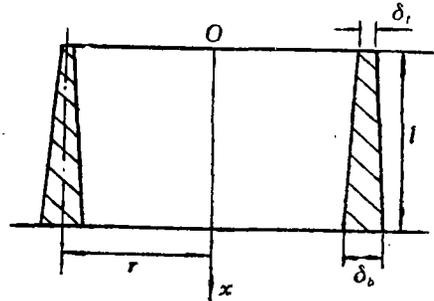


图 3 变厚度圆柱壳

这里, 25 单元划分是均匀划分的, 11 单元的划分是非均匀划分的, 其单元交接处的坐标为

$$\{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{11}\} = \{121.9 \ 304.8 \ 482.6 \ 609.6 \ 670.6 \ 701.0 \ 731.5 \ 746.8 \ 762.0 \ 777.0 \ 792.5\}$$

表 3 变厚度圆柱壳自由振动频率  $\omega_m$

$m$	$\omega_m(11\text{单元划分})$	$\omega_m(25\text{单元划分})$
1	17.876	17.878
2	18.062	18.070
3	19.884	20.058
4	24.883	25.704
5	34.378	35.717

**算例 2** 为一带环肋及纵肋的圆柱壳, 两端简支, 如图 4 所示。壳体的尺寸为  $r=40\text{cm}$ ,  $h=4\text{cm}$ , 环肋的间距  $l=50\text{cm}$ , 截面积  $A_\phi=16\text{cm}^2$ , 宽度  $b_1=4\text{cm}$ , 纵肋的尺寸  $A_z=16\text{cm}^2$ ,  $c_z=3\text{cm}$ ,  $I_z=21.333\text{cm}^4$ ,  $b_s=31.416\text{cm}$ 。材料的弹性模量  $E=2.1 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 质量密度  $\rho=7.86 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$ 。计算结果见表 4。在表 4 中还给出无肋的自由振动频率, 并与 [14] 给出的解析表达式

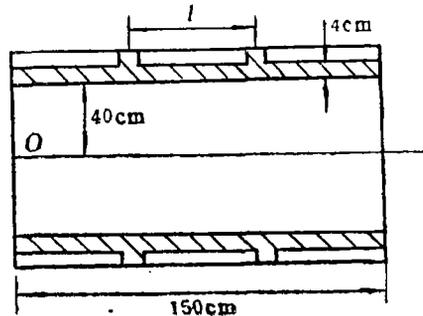


图 4 环向和纵向肋的圆柱壳

$$\omega_m^2 = (1/\rho h) \left[ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (m\pi/l)^4 + (Eh/r^2) \right] \tag{m=1, 2, \dots, \infty}$$

作了比较。

这里计算的自由振动频率均为精确解。

表4 带肋和均匀圆柱壳自由振动  $\omega_n$  计算结果

$m$	非加肋均匀柱壳		环向和纵向加肋的圆柱壳(本文解)
	本文解	[14]的解	
1	1292.5	1292.5	1295.4
2	1296.9	1296.9	1355.9
3	1315.6	1315.6	1481.1
4	1364.8	1364.2	1687.5

算例3 为一带环肋柱壳如图5所示,此边界条件为简支,弹性模量  $E=2.9 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ , 厚度  $h=0.25 \text{cm}$ , 壳密度  $\rho=7.246377 \times 10^{-4} \text{kg/cm}^3$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 环肋截面积  $A_\phi=0.0258 \text{cm}^2$ , 壳中央的环肋宽度  $b_r=0.4 \text{cm}$ , 环肋的间距  $l_s=2.068 \text{cm}$ ,  $r=4 \text{cm}$ . 在边界附近环肋宽度  $b_r=0.2 \text{cm}$ , 表5给出计算结果, 并与[8]作了比较。

这里, 本文给出的解是精确解, 应当指出由于本文未考虑壳与肋的旋转惯量, 因此当振动频率非常高时, 将与实际的值有一定的误差但对低频没有影响。

从以上三个算例可以看出, 由阶梯折算法计算的结果是满意的。

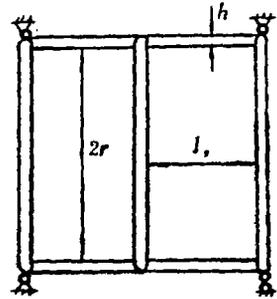


图5 环向加肋圆柱壳

表5 环向肋圆柱壳的自由振动频率  $\omega$ 

$m$	$\omega_m \times 10^3$		
	$\rho_r = \rho$ (本文解)	$\rho_r = 0$ (本文解)	[8]的解
1	5.0732	5.1960	5.1503
2	6.095	6.1050	6.0071

## 参 考 文 献

- [1] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学若干问题的一般解, 非均匀变厚度梁的弯曲, 稳定和自由振动, 兰州大学学报力学专号, 1 (1979), 133—157.
- [2] Bleich, H. H., Approximate determination of the frequencies of ring stiffened cylindrical shell, *Osterreichisches Ingenieur-Archiv*, 15 (1961), 1—4.
- [3] Baron, M. L., circular symmetric vibrations of infinitely long cylindrical shells with equidistant stiffeners, *Journal of Applied Mechanics*, 23 (1958), 316—318.
- [4] Wah, T., Circular symmetric vibrations of ring-stiffened cylindrical shells, *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 12 (1964), 649—662.
- [5] Wah, T., Flexural vibration of ring-stiffened cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 3 (1966), 242—251.
- [6] Wah, T. and W. C. L. Hu, Vibration analysis of stiffened cylinders including inter-ring motion, *Journal of the Acoustical Society of America*, 43 (1968), 1005—1016.
- [7] Forsberg, K., Exact Solution for natural frequencies of ring-stiffened cylinders, AIAA/ASME 10th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New

- Orleans, Louisiana (1969), 18—30.
- [8] Beskos, D. E. and J. B. Outas, Dynamic analysis of ring-stiffened circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 75 (1981), 1—15.
- [9] 李龙元, 环向加筋圆柱壳自由振动的摄动解, *应用数学和力学*, 8, 3 (1987), 277—285.
- [10] Henshell, R. D., B. K. Neale and G. B. Warburton, The natural frequencies of complex cylindrical shell structures, *Applications of Experimental and Theoretical Structural Dynamics*, 1 (1972).
- [11] Li Long-yuan and Loo Wen-da, Analyses of free vibration and response to turbulent wind of hyperbolic cooling towers with ring stiffeners, Part I, Theoretical analyses ring, IASS, Japan (1986).
- [12] Flügge, W., 《壳体中的应力》, 中国工业出版社 (1965).
- [13] Rektorys, Karel, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, sec. ed., D. Reidel Publishing Company, Holland (1980).
- [14] Dym, C. L., *Introduction to the Theory of Shell*, Pergamon Press, New York (1974).

## Free Vibration of Nonlinear Deformation Ring-and Stringer-Stiffened Nonuniform Cylindrical Shell

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Engineering Institute, Hefei)

### Abstract

Cylindrical shells stiffened with rings and stringers are used in many structural applications such as in pipes conveying fluids or gases and aerospace. In this paper, the general solution is obtained for free vibration of nonlinear deformation ring-and stringer-stiffened cylindrical shell with arbitrary boundary condition by step reduction method. Finally, it is only necessary to solve a nonlinear algebraic equation. The equation is expressed as an analytic form. Its convergence is proved. Three numerical examples are given at the end of the paper which indicate that satisfactory results can be obtained by step reduction method.