

# 发展流动与形成流动\*

岑人经 刘宝森

(华南理工大学工程力学系, 1987年5月30日收到)

## 摘 要

本文着重研究振荡状态下的管流问题。从基本的 Navier-Stokes 方程出发, 进行线性化之后采用虚宗量 Bessel 函数的方法求解, 得出了一组描述圆管振荡状态下发展流动的速度分布、压力分布公式。它们较之 Atabek 等人推导的公式更为简明和易于计算。并且, 在相同的条件下简化为形成流动的表达式后, 两者的公式完全一致。数值计算还表明, 本文公式的理论结果无论是和 Atabek 等人的理论计算结果比较, 还是和他们的实验结果比较, 都是相当一致的。

## 一、前 言

发展流动和形成流动是管流中两个不同区域的流动。当流体从大管流动到支管时, 发展流动便在入口附近区域中产生, 一直到抛物线型的速度剖面稳定地形成后, 才出现形成流动。因此, 这两种流动是在同一个管流中存在的。但它们的速度分布和压力分布却是截然不同的。循环系统中的血管流动就是这种情况。一般来说, 形成流动是发展流动的一种特殊情况, 又由于发展流动所处的入口区域长度往往比较长, 在分支甚多 (譬如血管) 的流动中, 某一段管子的流动尚未发展为形成流动之前便需要分支, 所以, 所研究的便仅是发展流动的分支, 简单的形成流动公式就不适用。因此, 要全面深入地论述管流问题, 就必须注重发展流动的研究, 也由于发展流动和形成流动的问题, 不但在循环系统的血管流动中, 而且在其他工程上都具有重要的学术理论意义和实际应用价值, 所以, 很久以来, 便引起了国内外科学家的注意, 并作了大量的研究工作。对于定常状态下的管流, 苏联学者 C. M. Tappr<sup>[1]</sup> 曾作了比较全面的研究, 导得了可以描述定常状态下管流的这两种流动的速度分布和压力分布公式。而对于振荡状态下的管流, 美国学者 H. B. Atabek 等人<sup>[2]</sup> 也作了比较深入的分析, 导得了描述振荡状态下发展流动和形成流动的速度分布和压力分布公式。他们的结果一直很受重视, 经常被许多专著<sup>[3], [4]</sup> 所引用。但 Atabek 等人的公式在使用上比较繁杂, 必须先行作出曲线图, 并求出确定的幅角值代入公式后才能进行计算。本文同样着重于研究振荡状态下的圆管流动。从基本的粘性管流的 Navier-Stokes 方程出发, 应用 Tappr<sup>[1]</sup> 的线化方法建立了一组描述振荡的发展流动的偏微分方程, 采用了与 Atabek 等人完全不同的处理方法,

\* 周履推荐。

进而利用虚宗量Bessel函数方法求解,求得了另一组描述振荡状态下发展流动和形成流动的速度分布、压力分布公式。文中分析和比较了管流的定常的发展流动与振荡的发展流动之间的差别以及定常的形成流动与振荡的形成流动之间的差别,还讨论了振荡的发展流动的轴向速度剖面随相位而变化的规律。最后,把本文的公式与 Atabek 等人的公式进行了比较。结果表明,本文公式不但较之简明,而且无须作图就可以直接进行计算,应用上比较方便;同时,很容易看出,当在描述特殊的形成流动情况时,本文的公式和 Atabek 等人的公式是完全一致的。数值计算还表明,本文公式的理论计算结果和 Atabek 等人于1964年作出的实验结果<sup>[5]</sup>是相当一致的。

## 二、运动方程及边界条件

设运动的流体是粘性的、均匀不可压缩的;流动是轴对称的层流;圆管是半无限长的。我们取圆柱坐标系  $(r, \theta, x)$  的坐标原点在圆管的入口中心位置上,  $x$  轴沿管的轴向,  $r$  沿管的径向,管半径为  $R$ ,如图1所示。由此可写出:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.3)$$

式中,  $v_x = v_x(r, x, t)$  是流体的轴向流速,  $v_r = v_r(r, x, t)$  是流体的径向流速,  $p = p(r, x, t)$  是圆管内流体压力,  $\rho$  是流体密度,  $\nu$  是流体运动粘性系数。

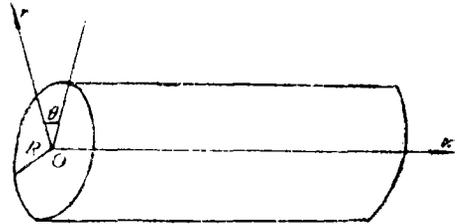


图 1

由于流体的轴向速度  $v_x$  在径向的变化远大于该速度在轴向的变化,因此,当认为  $v_x \gg v_r$  时,上列各式便可简化为<sup>[2]</sup>

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \quad (2.6)$$

式中,  $v_x = v_x(r, x, t)$ ,  $v_r = v_r(r, x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ 。

圆管界面条件根据无滑动无渗透的要求取为

$$v_x|_{r=R} = 0 \quad (2.7)$$

$$v_r|_{r=R} = 0 \quad (2.8)$$

圆管的始端条件根据振荡流动的要求取为

$$v_x|_{x=0} = U_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \right] \quad (2.9)$$

$$p|_{z=0} = p_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \right] = p^* \quad (2.10)$$

式中,  $U_0$  是管口的特征流速,  $p_0$  是管口处的特征压力.

上列运动方程(2.4), (2.5), (2.6)中, 式(2.4)是一个非线性的三元二阶偏微分方程, 它难以精确求解. 为此, 采用Tappr<sup>[1]</sup>的线化方法, 使式(2.4)化为

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (2.11)$$

我们认为流动状态是由脉动流和定常流两者组合而成的. 所以, 令

$$v_x(r, x, t) = v_{x1}(r, x) + v_{x2}(r, x, t) \quad (2.12)$$

$$v_r(r, x, t) = v_{r1}(r, x) + v_{r2}(r, x, t) \quad (2.13)$$

$$p(x, t) = p_1(x) + p_2(x, t) \quad (2.14)$$

把式(2.12), (2.13), (2.14)代入运动方程式(2.11), (2.5), (2.6)及边界条件(2.7), (2.8), (2.9), (2.10), 并加以整理后便得到两组偏微分方程及相应的边界条件如下:

第一组方程

$$(A) \begin{cases} U_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{x1}}{\partial r} \right) & (2.15) \\ \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 & (2.16) \\ \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{r1}) & (2.17) \end{cases}$$

相应的边界条件是

$$v_{x1}|_{r=R} = 0 \quad (2.18)$$

$$v_{r1}|_{r=R} = 0 \quad (2.19)$$

$$v_{x1}|_{z=0} = U_0 \quad (2.20)$$

$$p_1|_{z=0} = p_0 \quad (2.21)$$

第二组方程

$$(B) \begin{cases} \frac{\partial v_{x2}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{x2}}{\partial r} \right) & (2.22) \\ \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 & (2.23) \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{r2}) & (2.24) \end{cases}$$

相应的边界条件是

$$v_{x2}|_{r=R} = 0 \quad (2.25)$$

$$v_{r2}|_{r=R} = 0 \quad (2.26)$$

$$v_{x2}|_{z=0} = U_0 \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (2.27)$$

$$p_2|_{z=0} = p_0 \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \quad (2.28)$$

至此, 求解粘性不可压缩的振荡发展流动的问题便变成求解两组满足于相应边界条件的线性偏微分方程的数学问题。第一组运动方程是定常状态的发展流动方程, 其中的各个未知物理量均和时间无关; 第二组方程是振荡状态的发展流动方程, 其中的各个未知物理量均和时间及振荡相位相关。

### 三、运动方程的解

#### (一) 第一组方程的解

为便于求解, 先引入下述新的变量, 令:

$$m = \frac{x}{R}, \quad n = \frac{r}{R}, \quad u = \frac{v_z - U_0}{U_0}, \quad v = \frac{v_r}{U_0}, \quad P = \frac{p_1 - p_0}{\rho U_0^2}$$

则式(2.15)和(2.17)变为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial n} = R_n \left( \frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial P}{\partial m} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} = -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial n} (nv) \quad (3.2)$$

式中,  $R_n = U_0 R / \nu$  是对圆管半径的雷诺数,  $u = u(n, m)$ ,  $v = v(n, m)$ ,  $P = P(m)$ .

引用卡生变换:

$$\bar{u} = S \int_0^\infty u(n, m) \exp[-Sm] dm$$

$$\bar{v} = S \int_0^\infty v(n, m) \exp[-Sm] dm$$

$$\bar{P} = S \int_0^\infty P(m) \exp[-Sm] dm$$

式中  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{P}$  分别是  $u$ ,  $v$ ,  $P$  的像函数,  $S$  是卡生变换的复变量:  $S = \tau + i\zeta$ .

对式(3.1)、(3.2)进行相应的卡生变换后得:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dn^2} + \frac{1}{n} \frac{d\bar{u}}{dn} - R_n S \bar{u} = R_n S \bar{P} \quad (3.3)$$

$$S \bar{u} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dn} (n \bar{v}) \quad (3.4)$$

式(3.3)是一个二阶非齐次常微分方程, 很容易求出它的通解。当应用虚宗量 Bessel 函数方法进一步求解, 并使变量还原后, 便可求得描述定常的发展流动的第一组方程的解为

$$v_{r1} = 2U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - 4U_0 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left[ 1 - \frac{J_0\left(y_q \frac{r}{R}\right)}{J_0(y_q)} \right] \exp\left[-y_q^2 \frac{x}{R_n R}\right] \quad (3.5)$$

$$v_{r1} = \frac{4U_0}{R_n} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q} \cdot \frac{J_1\left(y_q \frac{r}{R}\right) - \frac{r}{R} J_1(y_q)}{J_0(y_q)} \exp\left[-y_q^2 \frac{x}{R_n R}\right] \quad (3.6)$$

$$p_1 = -\frac{1}{3} \rho U_0^2 - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R} x + 4\rho U_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \exp\left[-y_q^2 \frac{x}{R_n R}\right] + p_0 \quad (3.7)$$

式中,  $y_q$  是二阶第一类 Bessel 函数的根,  $J_1$ ,  $J_0$  分别是一阶、零阶 Bessel 函数。

式(3.5), (3.6), (3.7)的结果曾由 C. M. Tapir<sup>[1]</sup> 对定常发展流动的情况求得过, 但他没有进一步讨论不定常的振荡发展流动的问题。

## (二) 第二组方程的解

这组方程的求解关键在于式(2.22)的求解。为此, 我们根据边界条件(2.27)求得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{2\nu}{R} \left( \frac{\partial v_{x2}}{\partial r} \right)_{r=R} - U_0 \omega \sum_{k=1}^n k (-a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \quad (3.8)$$

把式(3.8)代入(2.22), 并把函数  $v_{x2}$  视为相应的复函数  $\bar{v}_{x2}$  的实部, 即

$$v_{x2} = \text{Re}\{\bar{v}_{x2}\} \quad (3.9)$$

则式(2.22)可改写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_{x2}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{v}_{x2}}{\partial x} = & \omega U_0 \sum_{k=1}^n k (ia_k + b_k) \exp[ik\omega t] \\ & - \frac{2\nu}{R} \left( \frac{\partial \bar{v}_{x2}}{\partial r} \right)_{r=R} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_{x2}}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{令} \quad \bar{v}_{x2}(r, x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(r, x) \exp[ik\omega t] \quad (3.11)$$

把式(3.11)代入(3.10), 经整理后便得:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} - ik\omega u_k = & U_0 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) \\ & - \omega U_0 k (ia_k + b_k) + \frac{2\nu}{R} \left( \frac{\partial u_k}{\partial r} \right)_{r=R} \end{aligned} \quad (3.12)$$

相应的边界条件是

$$u_k|_{x=0} = U_0 (a_k - ib_k) \quad (3.13)$$

$$u_k|_{r=R} = 0 \quad (3.14)$$

我们可以用上述求解方法, 得到式(3.12)的解为:

$$\begin{aligned} u_k = U_0 (a_k - ib_k) \left\{ 1 - \frac{1}{I_2(\sqrt{ik\alpha^2})} \left[ I_0\left(\sqrt{ik\alpha^2} \frac{r}{R}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2I_1(\sqrt{ik\alpha^2})}{\sqrt{ik\alpha^2}} \right] + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{iy_q}{(y_q^2 + ik\alpha^2)} I_1(iy_q) \right) \left[ I_0\left(iy_q \frac{r}{R}\right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{2I_1(iy_q)}{iy_q} \right] \cdot \exp\left[-\frac{y_q^2 + ika^2}{R_n R} x\right] \Big\} \quad (3.15)$$

式中,  $\alpha = R\sqrt{\omega/\nu}$  是 Womersley 数,  $I_0, I_1$  是零阶、一阶第一类虚宗量 Bessel 函数, 把式 (3.15) 代入 (3.11), 加以整理并取实部后则得:

$$\begin{aligned} u_{z2} = & U_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left( 1 + J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha) \left[ J_0\left(\sqrt{i^3 k} \frac{r}{R} \cdot \alpha\right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{2J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{\sqrt{i^3 k} \alpha} \right] \right) \exp[ik\omega t] \right\} + 2U_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q}{(y_q^2 + ika^2)} J_1(y_q) \right. \\ & \left. \cdot \left[ J_0\left(y_q \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(y_q)}{y_q} \right] \exp\left[-\frac{y_q^2 + ika^2}{R_n R} x + ik\omega t\right] \right\} \quad (3.16) \end{aligned}$$

根据式 (3.8) 便求得

$$\begin{aligned} p_2(x, t) = & p_0 \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) - \rho\omega U_0 x \sum_{k=1}^n k (-a_k \sin k\omega t \\ & + b_k \cos k\omega t) - \frac{2\rho\nu U_0 x}{R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \right. \\ & \cdot \frac{\sqrt{i^3 k} \alpha J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \exp[ik\omega t] \Big\} + \frac{4\rho U_0 \nu R_n}{R} \\ & \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q^2}{(y_q^2 + ika^2)^2} \exp[ik\omega t] \left[ \exp\left[-\frac{y_q^2 + ika^2}{R_n R} x\right] - 1 \right] \right\} \quad (3.17) \end{aligned}$$

由式 (2.24) 可求得

$$\begin{aligned} U_{r2} = & \frac{2U_0}{R_n R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q}{J_1(y_q)} \left[ \frac{R}{y_q} J_1\left(\frac{r}{R} y_q\right) - \frac{r}{y_q} J_1(y_q) \right] \right. \\ & \left. \cdot \exp\left[-\frac{y_q^2 + ika^2}{R_n R} x + ik\omega t\right] \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

式 (3.16), (3.17), (3.18) 便是描述脉动的发展流动的第二组方程的解。

于是, 根据式 (2.12), (2.13), (2.14) 把第一、二组方程组合和整理后, 使求得整个运动的解为:

$$\begin{aligned} \frac{U_z}{U_0} = & 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left[ 1 - \frac{J_0\left(y_q \frac{r}{R}\right)}{J_0(y_q)} \right] \exp\left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x\right] \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \cdot \left( 1 + J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha) \left[ J_0\left(\sqrt{i^3 k} \frac{r}{R} \alpha\right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{2J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{\sqrt{i^3 k} \alpha} \right] \right) \cdot \exp[ik\omega t] \right\} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q}{(y_q^2 + ika^2)} J_1(y_q) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[ J_0\left(y_q \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(y_q)}{y_q} \right] \cdot \exp\left[-\frac{y_q^2 + ik\alpha^2}{R_n R} x + ik\omega t\right] \quad (3.19) \\
 \frac{u_r}{U_0} = & \frac{4}{R_n} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q} \cdot \frac{J_0\left(y_q \frac{r}{R}\right) - \frac{r}{R} J_0(y_q)}{J_0(y_q)} \exp\left[-\frac{y_q^2 x}{R_n R}\right] \\
 & + \frac{2}{R_n R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q}{J_1(y_q)} \left[ \frac{R}{y_q} J_1\left(\frac{y_q}{R} r\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{r}{y_q} J_1(y_q) \right] \exp\left[-\frac{y_q^2 + ik\alpha^2}{R_n R} x + ik\omega t\right] \right\} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{p^* - p}{\rho U_0^2} = & \frac{1}{3} + \frac{8x}{R_n R} - 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \exp\left[-\frac{y_q^2 x}{R_n R}\right] + \frac{\alpha^2 x}{R_n R} \sum_{k=1}^n k(-a_k \sin k\omega t \\
 & + b_k \cos k\omega t) + \frac{2x}{R_n R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \sqrt{i^3 k \alpha} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k \alpha})}{J_2(\sqrt{i^3 k \alpha})} \exp[ik\omega t] \right\} \\
 & - 4 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q^2}{(y_q^2 + ik\alpha^2)^2} \exp[ik\omega t] \left[ \exp\left[-\frac{y_q^2 + ik\alpha^2}{R_n R} x\right] - 1 \right] \right\} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

式(3.19), (3.20)分别是振荡的发展流动的轴向速度分布、径向速度分布公式, 式(3.21)则是振荡发展流动的压力分布公式。

#### 四、结果的分析

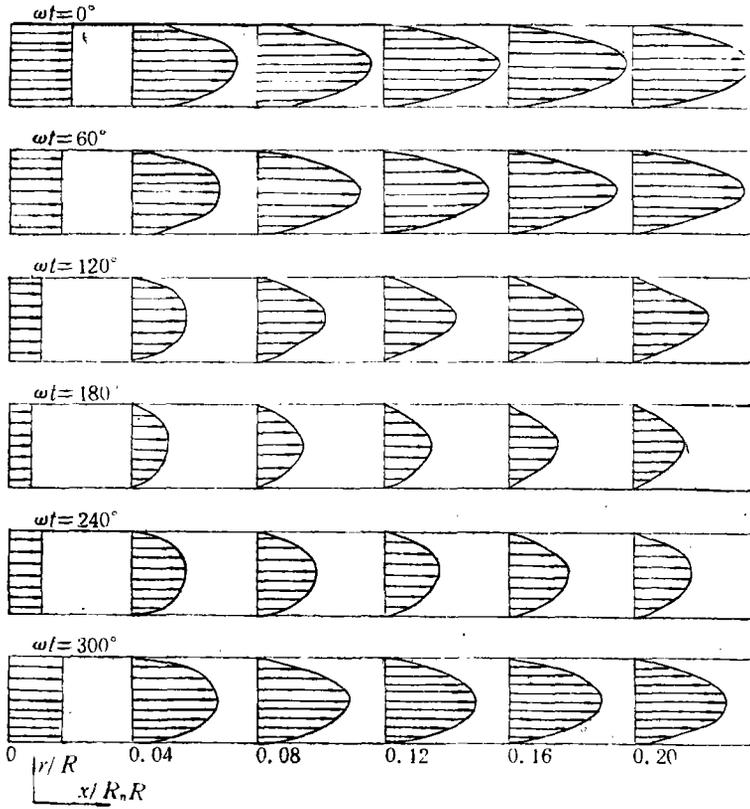
为了便于分析, 我们取一简单情况作为计算例子。即假定  $k=1$ ,  $a=0.5$ ,  $b_1=0$ ,  $\alpha=4$  这时, 管流的轴向速度  $v_x$  的始端条件变为:

$$v_x|_{z=0} = U_0(1 + 0.5 \cos \omega t)$$

对式(3.19)进行相应的计算后便得如图2所示的振荡发展流动的轴向速度剖面随振荡相位而变化的规律。可以看出, 不同的相位情况下, 发展流动的速度剖面是完全不同的。其中, 当  $\omega t=0^\circ$  时, 其值最大; 当  $\omega t=180^\circ$  时, 其值最小。而且, 在任何一种相位情况下, 这些速度剖面都有一种共同的变化趋势: 其中心速度都随管的长度而增大。因此, 就某一确定的相位来说, 振荡发展流动的轴向速度剖面变化规律和定常的发展流动的变化规律是一致的。但两者在数值上相差却很大, 这可从图3和图4的比较中看出。图3是根据式(3.19)计算得到的振荡发展流动的轴向速度分布 ( $\omega t=0^\circ$  时), 而图4则是根据式(3.5)计算得到的定常发展流动的轴向速度分布。从图中看出, 无论是对于流体中的哪一层流体 (例如  $r/R=0$  或  $r/R=0.6$ ), 振荡流的值都和定常流的值大不相同。

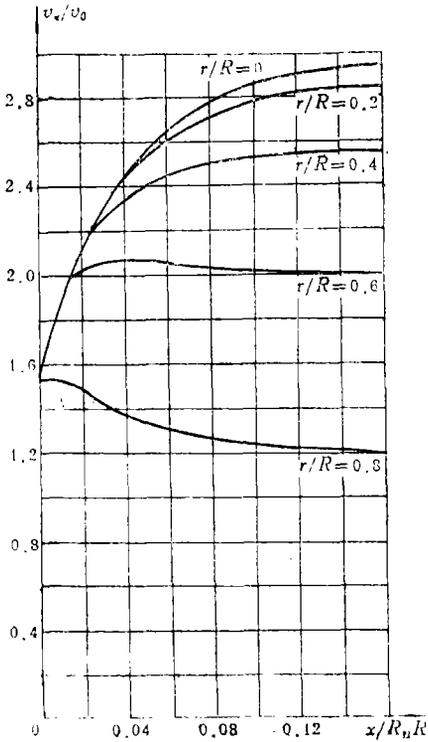
讨论一下形成流动的情况。这相当于发展流动在  $x \rightarrow \infty$  时的情况。因此, 由式(3.19)便可写出振荡的形成流动的表达式为:

$$\begin{aligned}
 \frac{v_x}{U_0} = & 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left( 1 + \frac{1}{J_1(\sqrt{i^3 k \alpha})} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left[ J_0\left(\sqrt{i^3 k \alpha} \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\sqrt{i^3 k \alpha})}{\sqrt{i^3 k \alpha}} \right] \right) \exp[ik\omega t] \right\} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$



( $\alpha=4$ )

图 2



( $\alpha=4, \omega t=0^\circ$ )

图 3

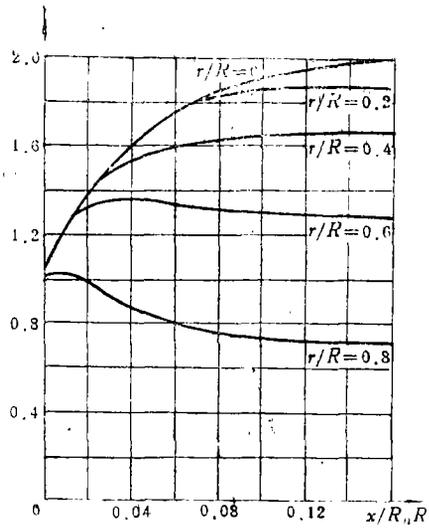


图 4

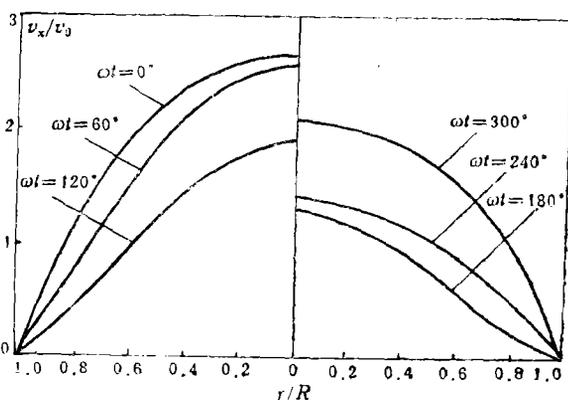
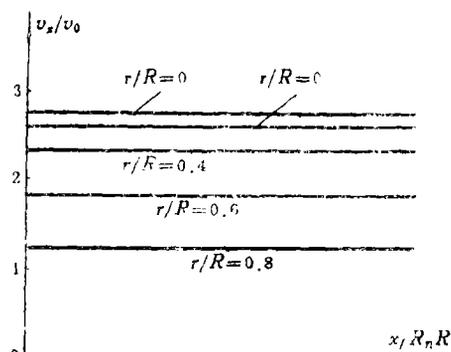


图 5



( $\alpha=4, \omega t=0^\circ$ )

图 6

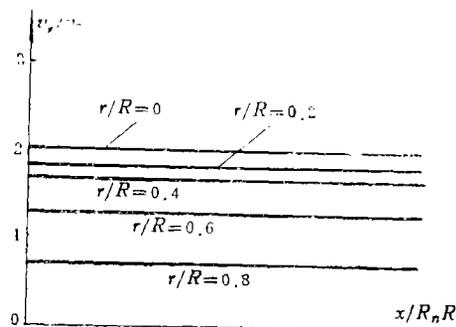


图 7

图 5 是根据式 (4.1) 计算得到的振荡状态的形成流动的轴向速度剖面随相位而变化的规律。图 6 是振荡的形成流动轴向速度分布图。图 7 是定常的形成流动 (Poiseuille Flow) 的轴向速度分布。比较图 6 与图 7 可看出, 和上述发展流动的情况相似, 振荡状态的速度值与定常状态的速度值大不相同。也就是说, 无论是发展流动还是形成流动, 都不能以定常状态下的结果来推论振荡状态下的结果。

### 五、与 Atabek 等人结果的比较

关于振荡状态的发展流动问题, 美国学者 Atabek 等人曾做过比较深入的研究, 并导出了一组描述管流中发展流动的速度分布及压力分布公式<sup>[2]</sup>。他们的基本处理方法是, 认为形成流动是发展流动的特解, 因而令:

$$u(x, r, t) = u_1(x, r, t) + u(\infty, r, t) \quad (5.1)$$

式中,  $u(x, r, t)$  表示发展流动的轴向速度, 相应于本文的  $v_x(r, x, t)$ ;  $u(\infty, r, t)$  表示形成流动的轴向速度;  $u_1(x, r, t)$  表示组成发展流的另一分量。在分别求出:

$$u(\infty, r, t) = 2u_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + u_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left[ \frac{J_0 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \frac{r}{a} \right) - J_0 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \right)}{J_2 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \right)} \right] \exp[ik\omega t] \right\} \quad (5.2)$$

$$u_1(x, r, t) = -4u_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{r_j^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n M_{kj} \left[ a_k \cos \left( kF \left( S - \frac{x\alpha^2}{aR} \right) - \theta_{kj} \right) + b_k \sin \left( kF \left( S - \frac{x\alpha^2}{aR} \right) - \theta_{kj} \right) \right] \right\} \exp \left\{ \frac{\gamma_j^2}{\alpha^2} \left[ F \left( S - \frac{x\alpha^2}{aR} \right) - \omega t \right] \right\} \left[ 1 - \frac{J_0 \left( \gamma_j \frac{r}{a} \right)}{J_0(\gamma_j)} \right] \quad (5.3)$$

之后，便由式 (5.1) 求得发展流动的轴向速度分布为：

$$u_0(x, r, t) = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left[ \frac{J_0 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \frac{r}{a} \right) - J_0 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \right)}{J_2 \left( i^{3/2} \sqrt{k} \alpha \right)} \right] \exp[ik\omega t] \right\} - 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_j^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n M_{kj} \left[ a_k \cos(k(\omega t - A) - \theta_{kj}) + b_k \sin(k(\omega t - A) - \theta_{kj}) \right] \right\} \cdot \left[ 1 - \frac{J_0 \left( \gamma_j \frac{r}{a} \right)}{J_0(\gamma_j)} \right] \exp \left[ - \frac{\gamma_j^2}{\alpha^2} A \right] \quad (5.4)$$

式中， $a$ ——管半径； $R$ ——雷诺数； $\operatorname{Re}$ ——取实数符号； $\gamma_j$ ——二阶第一类 Bessel 函数的根； $M_{kj} = [1 + k^2(\alpha/\gamma_j)^4]^{-1/2}$ ； $\theta_{kj} = \tan^{-1} k(\alpha/\gamma_j)^2$ ； $A$ ——相位角，它是由于在方程 (5.4) 中用  $(\omega t - A)$  来代替  $F(S - x\alpha^2/aR)$  而出现的，其值需要根据专门作出的  $S - \omega t$  曲线图来确定。

下面从几个方面进行比较：

(一) 从实际应用计算来看，本文的公式 (3.19) 不但较之简便，而且计算也比较方便。因为 Atabek 等人的公式 (5.4) 需要先作出  $S - \omega t$  的关系曲线图 (见文献 [2] 的图 1)，由图确定相位角  $A$ ，然后把  $A$  代入式 (5.4) 后才能进行计算。而本文公式无须作图便可直接进行计算。

(二) 从描述管流的形成流动情况来看，本文的速度分布公式和 Atabek 等人的完全一致。本文公式 (4.1)，当应用 Bessel 函数的递推公式进行整理后变成：

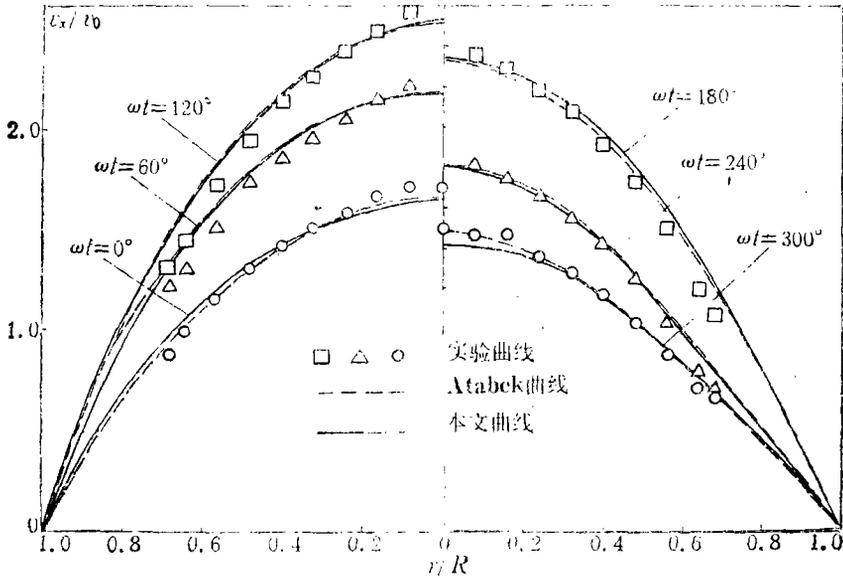
$$v_z = 2U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + U_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left[ \frac{J_0(\sqrt{i^3 k} \alpha r/R) - J_0(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right] \exp[ik\omega t] \right\} \quad (5.5)$$

把此式与 Atabek 等人的形成流动公式 (5.2) 比较，可以看出，由于  $R = a$ ， $U_0 = u_0$ ，

所以两者是完全相同的。

(三) 从发展流动的轴向速度剖面形状来看, (比较本文的图2和文献[2]的图3) 无论是轴向速度随 $r/R$ 或 $x/R_n R$  (文献[2]中是 $r/a$ 或 $x/aR$ ) 变化的趋势, 还是轴向速度随相位 $\omega t$ 变化的规律, 两者都是一致的。

(四) 与实验结果比较, 用本文公式(3.19)按照Atabek等人实验要求<sup>[5]</sup>的参数计算了一组理论曲线, 结果见图8。可以看出, 本文的计算结果和实验数据是相当一致的。



( $a=5, x/RR_n=0.263$ )

图 8

参 考 文 献

[1] Тарг С. М., *Основные Задачи Теории Ламинарных Течений*, Государственное издательство техники-теоретической литературы (1951).

[2] Atabek, H. B. and C. C. Chang, Oscillatory flow near the entry of a circular tube, *Z. Angew. Math. Phys.*, 12 (1961), 185—201.

[3] McDonald, D. A., *Blood Flow in Arteries*, Edward Arnold Ltd. (1974).

[4] 冯元植, 《生物力学》, 科学出版社 (1983).

[5] Atabek, H. B., C. C. Chang and L. M. Fingerson, Measurement of laminar oscillatory flow in the length of a circular tube, *Phys. Med. Biol.*, 9, 2 (1964), 219—227.

## Developing Flows and Developed Flows

Cen Ren-jing    Liu Bao-sen

*(South China Institute of Technology, Guangzhou)*

### Abstract

This paper puts emphasis on the problem of the developing flows in the circular tube under oscillatory conditions. According to the Navier-Stokes' equations and using the method of Bessel function of imaginary argument, a system of formulas is obtained. Comparing the formulas obtained in this paper with Atabek's formulas it may be seen that the former is simpler and more convenient. When both the formulas obtained in this paper and Atabek's formulas are reduced to the representation of developed flows, both of them are consistent. Numerical calculation results show that the computed results obtained in this paper are rather consistent with both Atabek's computed results and the experimental results.