

环面微分方程 $\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 [\sin(x-y) - \sin x] - \Delta\omega \\ \dot{y} = \alpha_2 [\sin(y-x) - \sin y] - \Delta\omega \end{cases}$ 的全局结构分析及其应用*

周 荣 星

(西安电子科技大学数学系, 1987年7月18日收到)

摘 要

本文得到环面微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 [\sin(x-y) - \sin x] - \Delta\omega \\ \dot{y} = \alpha_2 [\sin(y-x) - \sin y] - \Delta\omega \end{cases}$$

的全局结构分析结果, 其中 $\Delta\omega \geq 0$, 并且在交叉耦合锁相环路中得到应用。

一、前 言

长期以来, 在无线电领域里, 人们就已把注意力放在如何提高通信容量和抗共道干扰这两个问题上。1977年, F. A. Cassara 等人提出如图1所示的交叉耦合锁相环路(CCPLL), 用来解决上述问题, 并且发表了一系列研究报告^{[1]~[5]}。苏联 M. A. Bykhovskiy 等人也长期从事这方面的工作, 也发表了研究报告^{[6]~[8]}。我们从80年开始也进行这项研究, 发表

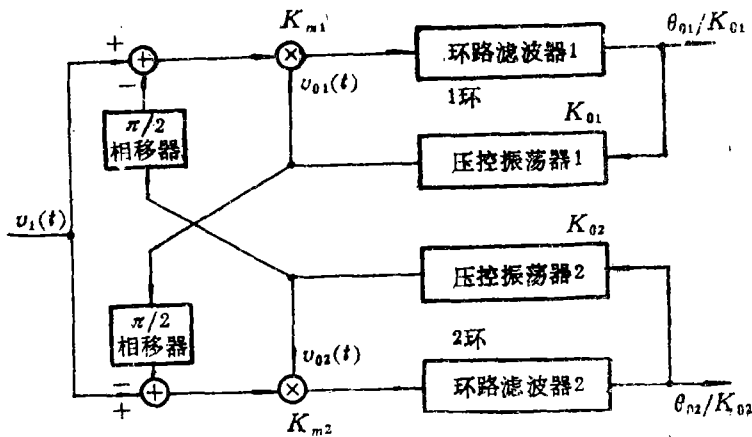


图1 CCPLL 框图

* 李强推荐。

一些研究报告^{[9]~[10]}。因此,交叉耦合锁相环路是一种新的锁相环路,它在通信与雷达的抗干扰、频谱复用和隐蔽通信等多种电子领域中,有着广泛的应用前景。显然,交叉耦合锁相环路的理论研究主要是对其数学模型的理论分析,它使我们对环路的性能有透彻的了解,从而对实际问题起着指导与配合的作用。但国外的研究报告均未对数学模型进行理论分析,仅仅作了计算机模拟。因此对环路性能的了解是初步的或近似的。本文对固定频率输入条件下的一阶环的数学模型^[10]

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \alpha_1 \{ \sin(\Delta\omega t - \theta_1) - \sin(\theta_2 - \theta_1) \} \\ \dot{\theta}_2 = \alpha_2 \{ \sin(\Delta\omega t - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2) \} \end{cases} \quad (1.1)$$

进行全局结构分析,在此基础上,对环路的同步带和捕捉带进行探讨。

若令

$$\begin{cases} x = \theta_1 - \Delta\omega t \\ y = \theta_2 - \Delta\omega t \end{cases}, \quad (1.2)$$

则(1.1)式变成

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 [\sin(x-y) - \sin x] - \Delta\omega \\ \dot{y} = \alpha_2 [\sin(y-x) - \sin y] - \Delta\omega \end{cases} \quad (1.3)$$

或写成

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 [\sin(x-y) - \sin x - \beta_1] \\ \dot{y} = \alpha_2 [\sin(y-x) - \sin y - \beta_2] \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $\beta_i = \Delta\omega/\alpha_i (i=1, 2)$ 。因此,我们只要对(1.4)进行理论分析。如果将正方形 $\{ -\pi \leq x \leq \pi \}$ 的对边看成是重合的,就得到环面 Σ 。系统(1.4)就是环面 Σ 上的非线性自治微分方程。我们约定,把 x, y 平面上的轨线在环面 Σ 上解释。并且可以假定 $\Delta\omega \geq 0$ 。

二、奇点分析

系统(1.4)的奇点的坐标是方程

$$\begin{cases} \sin(x-y) - \sin x = \Delta\omega/\alpha_1 = \beta_1 \\ \sin(y-x) - \sin y = \Delta\omega/\alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

的解。当 $\beta_1 = \beta_2$ 时易解出,但当 $\beta_1 \neq \beta_2$ 时无法解出。

(一) 水平等倾线和垂直等倾线的图形

水平等倾线的方程为

$$\sin(y-x) - \sin y = \beta_2 \quad (2.2)$$

显然,当 $\beta_2 = 0$ 时为直线 $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = -2\pi$, 即图 2 中的平行四边形 PQRS 及其平移 2π 整数倍。当 $\beta_2 > 0$ 时,式(2.2)等价于

$$\cos\left(y - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\beta_2}{2\sin x/2} \quad (2.3)$$

由此可知, 当 $\beta_2 = 2$ 时, 在 $x \in [-2\pi, 0]$ 内的解为 $(x, y) = (-\pi, -\pi/2)$, 当 $\beta_2 > 2$ 时无解.

当 $0 < \beta_2 < 2$ 时, 在 $x \in [-2\pi + 2\arcsin \frac{\beta_2}{2}, -2\arcsin \frac{\beta_2}{2}]$ 时有解, 且对应于 x , 在 $0 < y$

$-\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ 内有唯一的解 y . 因此, 在平行四边形 $\{-2\pi + 2\arcsin \frac{\beta_2}{2} \leq x \leq -2\arcsin \frac{\beta_2}{2};$

$0 < y - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\}$ 内, 方程(2.2) (或(2.3)) 决定了一个单值函数 $y = f(x, \beta_2)$, 若令

$$F(x, y, \beta_2) = \sin(y-x) - \sin y - \beta_2, \quad (2.4)$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y-x) - \cos y = 2\sin\left(y - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}$$

在上述的平行四边形内有 $\partial F / \partial y < 0$. 由隐函数存在定理, 方程(2.2) 所决定的单值函数 $y = f(x, \beta_2)$ 连续且可微. 即水平等倾线是光滑曲线且随参数 β_2 连续移动.

由(2.2) 求出

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(y-x)}{\cos(y-x) - \cos y} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\beta_2[\sin^2 y + \beta_2 \sin y + 1]}{[\cos(y-x) - \cos y]^3} \end{cases} \quad (2.5)$$

容易判定, 在平行四边形内, $d^2y/dx^2 < 0$. 即水平等倾线是上凸曲线, 且有唯一的极大值点 $x = -\frac{\pi}{2} + \arcsin(1 - \beta_2)$, 在 $x = -2\pi + 2\arcsin \frac{\beta_2}{2}$ 及 $x = -2\arcsin \frac{\beta_2}{2}$ 处的切线平行 y 轴.

另一方面, 显然水平等倾线以 $T(-\pi, -\pi/2)$ 为对称中心. 因此, 在平行四边形内, 水平等倾线是凸的封闭曲线, 其图形如图 2 所示, 且具有以下特征:

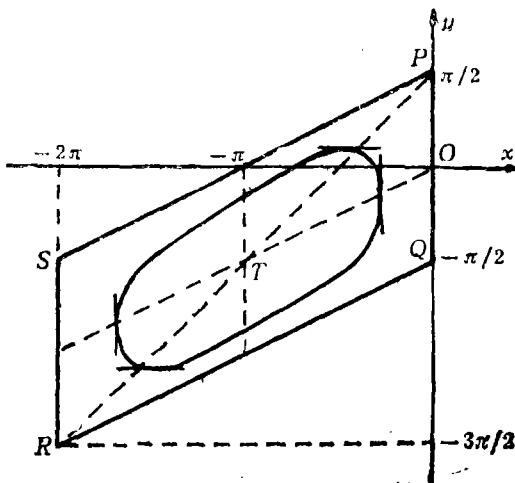


图 2 水平等倾线图形

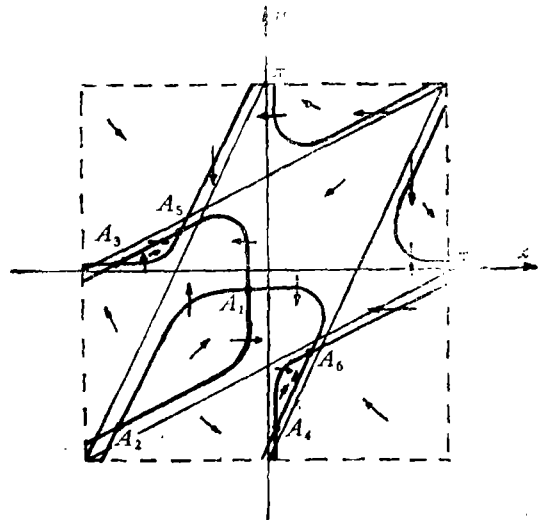


图 3

① 以 $T(-\pi, -\pi/2)$ 为对称中心的凸封闭曲线。

② 由于(2.2)所决定的隐函数关于 β_2 连续, 因此当 β_2 从零开始增加时, 水平等倾线由平行四边形 $PQRS$ 开始收缩, 至 $\beta_2=2$ 时收缩成一点 T , 当 $\beta_2>2$ 时消失。

将平行四边形中的水平等倾线上下或左右平移 2π , 可得到水平等倾线的其它部份。

同理, 垂直等倾线亦有类似的性质。在正方形 $\{-\pi \leq \frac{x}{y} \leq \pi\}$ 内的水平等倾线的图形如图 3 所示 (由计算机绘出)。

(二) 奇点的个数与类型

当 $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$ ($\Delta\omega = 0$) 时, 容易求出系统(1.4)在环面 Σ 上有 6 个奇点, 且其类型也易判定。其坐标及类型如表 1 所示。

表 1

奇点	$A_1(0, 0)$	$A_2(-\pi, -\pi)$	$A_3(-\pi, 0)$	$A_4(0, -\pi)$	$A_5(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$	$A_6(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$
类型	鞍点	不稳定结点	鞍点	鞍点	稳定结点	稳定结点

当 $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ($\Delta\omega > 0$) 时, 由于水平等倾线和垂直等倾线是凸封闭曲线, 且随 $\Delta\omega$ 的增加而连续缩小。因此当 $\Delta\omega$ 从零开始增加时, 它们的交点 (即奇点) A_3 和 A_6 , A_4 和 A_5 及 A_1 和 A_2 就逐渐靠拢, 以至重合 (即相切), 直至消失 (分离)。因此系统(1.4)的奇点个数最多有 6 个。

若令

$$q = \alpha_1 \alpha_2 [(\cos(x-y) - \cos x)(\cos(x-y) - \cos y) - \cos^2(x-y)] \quad (2.6)$$

且把方程(2.1)中的 $\Delta\omega$ 看成是自变量, 则根据隐函数定理, 只要 $q \neq 0$, 方程(2.1)就存在连续可微的隐函数。由于当 $\Delta\omega = 0$ 时, 系统(1.4)有 6 个奇点, 即方程(2.1)有 6 组解。因此存在 $\delta > 0$, 当 $\Delta\omega \in [0, \delta)$ 时, 方程(2.1)有 6 个连续可微的单值函数:

$$\begin{cases} x = x_i(\Delta\omega) \\ y = y_i(\Delta\omega) \end{cases} \quad (i=1, \dots, 6) \quad (2.7)$$

它们就是相对应的 6 个奇点的坐标, 即 $A_i(x_i(\Delta\omega), y_i(\Delta\omega)) (i=1, \dots, 6)$ 。

式(2.7)所定义的函数说明, 当 $\Delta\omega \in [0, \delta)$ 时, 水平等倾线和垂直等倾线的交点随 $\Delta\omega$ 的变化而连续移动, 这和(一)中的结论是吻合的。但这些交点随 $\Delta\omega$ 从零开始增加而相对的逐渐靠拢以至重合直至消失。因此我们可以把(2.7)中定义的函数的定义域从 $[0, \delta)$ 延拓到最大区间。例如对应奇点 A_1 的函数 $x = x_1(\Delta\omega)$, $y = y_1(\Delta\omega)$ 。如果当 A_1 的坐标为 (x_1, y_1) 时 A_1 和 A_2 重合, 将 (x_1, y_1) 代入(2.1)式可求出 $\Delta\omega_1$, 则 $[0, \Delta\omega_1)$ 就是其最大延拓区间。另一方面, 当 $\Delta\omega = \Delta\omega_1$ 时, A_1 和 A_2 重合, 即水平等倾线和垂直等倾线出现相切, 此时有 $q = 0$ 。因此, 当 $\Delta\omega \in [0, \Delta\omega_1)$ 时, $q \neq 0$, 即 $q < 0$ 或 $q > 0$ 。

当 $\Delta\omega \in [0, \Delta\omega_1)$ 时, 系统(1.4)在 A_1 处的特征方程为 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 则 q 恰为(2.7)式中所表示, 且

$$\begin{cases} p = -\{\alpha_1[\cos(x-y) - \cos x] + \alpha_2[\cos(x-y) - \cos y]\} \\ p^2 - 4q = [\alpha_1(\cos(x-y) - \cos x) - \alpha_2(\cos(x-y) - \cos y)]^2 + 4\alpha_1\alpha_2\cos^2(x-y) \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 (x, y) 是 A_1 的坐标。由于当 $\Delta\omega=0$ 时 $q < 0$ ，因此当 $\Delta\omega \in [0, \Delta\omega_1)$ 时 $q < 0$ ，从而 A_1 是鞍点。

显然， $[0, \Delta\omega_1)$ 也是对应于 A_2 的函数 $x=x_2(\Delta\omega)$ ， $y=y_2(\Delta\omega)$ 的最大延拓区间，且 (2.6) 中的 q 及 (2.8) 中的 p 亦是其特征方程的系数，只不过 (x, y) 是 A_2 的坐标。由于当 $\Delta\omega=0$ 时有 $p < 0$ ， $q > 0$ ， $p^2 - 4q > 0$ (即为不稳定结点)，且由 (2.8) 第二式有 $|p| > 2\sqrt{q}$ 。因此，当 $\Delta\omega \in [0, \Delta\omega_1)$ 时必有 $p < 0$ ， $q > 0$ 且 $p^2 - 4q > 0$ ，即 A_2 是不稳定结点。

对于系统 (1.4) 的其它四个奇点也可同样讨论，并且只要这些奇点存在，并且不和另外的奇点重合，则其类型仍如表 1 所示，只不过坐标不同。

如果系统 (1.4) 有两个奇点重合，例如 A_1 和 A_2 重合。由前面的讨论知，此时有 $q=0$ ，即生成高次奇点。由于 A_1 是鞍点而 A_2 是不稳定结点，因此这种高次奇点为鞍结点^[11]。同理， A_3 和 A_4 重合或 A_4 和 A_6 重合时亦生成鞍结点。而且若形成鞍结点的参数为 $\Delta\omega_0$ 时 (或 (β_{10}, β_{20}))， $\Delta\omega > \Delta\omega_0$ 时鞍结点消失，当而 $\Delta\omega < \Delta\omega_0$ 时，鞍结点又分解成鞍点和结点。

综上所述，可得：

定理 1 系统 (1.4) 的奇点只能鞍点、结点和鞍结点，不可能有其它类型的奇点。并且最多有 6 个奇点。当有 6 个奇点时，其类型如表 1 所示 (坐标可以不同)。

(三) 分枝曲线的图形

从以上讨论可知，当参数 (β_1, β_2) 不同时，系统 (1.4) 的奇点个数将有变化，因此如何在参数 β_1, β_2 平面的第一象限中划分区域，使得在每个区域中系统 (1.4) 有相同的奇点数这样的问题，对系统 (1.4) 的定性分析有着重要的意义。从前面的讨论可知，当系统 (1.4) 的水平等倾线和垂直等倾线相切时出现鞍结点，它是系统 (1.4) 的奇点个数发生变化的分界线。而鞍结点的坐标 (x, y) 及参数 (β_1, β_2) 满足方程

$$\left. \begin{aligned} \sin(x-y) - \sin x &= \beta_1 \\ \sin(y-x) - \sin y &= \beta_2 \\ \cos(x-y)(\cos x + \cos y) - \cos x \cos y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

从 (2.9) 中消去 x 和 y ，可得

$$\Phi(\beta_1, \beta_2) = 0 \quad (2.10)$$

曲线 $\Phi(\beta_1, \beta_2) = 0$ 就是奇点个数发生变化的分界线。从后面的定性分析可知，此曲线就是系统 (1.4) 的分枝曲线。显然有

$$\Phi(\beta_1, \beta_2) = \Phi(\beta_2, \beta_1) \quad (2.11)$$

但 $\Phi(\beta_1, \beta_2)$ 的解析表示式很难求出。

下面讨论分枝曲线 $\Phi(\beta_1, \beta_2) = 0$ 在 β_1, β_2 平面的第一象限内的位置。

当 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 时，文 [9] 已经讨论，得到：当 $\beta = 1/4$ 或 $\beta = 1$ 时，系统 (1.4) 出现鞍结点，故分枝曲线过 $(1/4, 1/4)$ 和 $(1, 1)$ 。并且当 $\beta \in [0, 1/4]$ 时，系统 (1.4) 有 6 个奇点；当 $\beta \in (1/4, 1)$ 时，系统 (1.4) 有 2 个奇点；当 $\beta \in (1, +\infty)$ 时，系统 (1.4) 无奇点。因此第一象限的平分线被点 $(1/4, 1/4)$ 和 $(1, 1)$ 分成三部份，且依次属于使系统 (1.4) 有 6 个奇点、2 个奇点及没有奇点的参数区域内。

当 $\beta_2=0$ 且 $\beta_1>0$ 时, 系统(2.9)变成

$$\begin{cases} \sin(x-y) - \sin x = \beta_1 \\ \sin(y-x) - \sin y = 0 \\ \cos(x-y)(\cos x + \cos y) - \cos x \cos y = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

方程(2.12)有三对解, 其中 β_1 的值为: $\beta_1 = \beta_1^* = \sqrt{414 - 66\sqrt{33}}/16$, $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_1 = \beta_1^{**} = \sqrt{414 - 66\sqrt{33}}/16$. 并且可以验证: 当 $\beta_1 \in [0, \beta_1^*)$ 时, 系统(1.4)有 6 个奇点; 当 $\beta_1 \in (\beta_1^*, 1)$ 时, 系统(1.4)有 4 个奇点; 当 $\beta_1 \in (1, \beta_1^{**})$ 时, 系统(1.4)有 2 个奇点; 当 $\beta_1 \in (\beta_1^{**}, +\infty)$ 时, 系统(1.4)没有奇点. 因此, 分歧曲线过 $(\beta_1^*, 0)$, $(1, 0)$ 和 $(\beta_1^{**}, 0)$, 且 β_1 轴的正半射线被上述三个点分割成四部份, 这四部份依次属于使系统(1.4)有 6 个奇点、4 个奇点、2 个奇点及没有奇点的参数区域内. 根据对称性, β_2 轴的正半射线被 $(0, \beta_1^*)$, $(0, 1)$ 和 $(0, \beta_1^{**})$ 分割成四部份, 这四部份依次属于使系统(1.4)有 6 个奇点、4 个奇点、2 个奇点及没有奇点的参数区域内.

综合上述, 连结点 $(\beta_1^*, 0)$, $(1/4, 1/4)$ 和 $(0, \beta_1^*)$ 的分歧曲线是使系统有 6 个奇点和有 4 个奇点的参数区域的分界线; 连结 $(1, 0)$, $(1/4, 1/4)$ 和 $(0, 1)$ 的分歧曲线是使系统(1.4)有 4 个奇点和有 2 个奇点的参数区域的分界线; 连结 $(\beta_1^{**}, 0)$, $(1, 1)$ 和 $(0, \beta_1^{**})$ 的分歧曲线是使系统(1.4)有 2 个奇点和没有奇点的参数区域的分界线.

我们利用计算机绘出分歧曲线的图形如图 4 所示, 它们将参数平面的第一象限分成 4 个区域. (如图 4 所示). 当 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{I}$ 时, 系统(1.4)有 6 个奇点, 当 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{II}$ 时, 系统(1.4)有 4 个奇点, 当 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{III}$ 时, 系统(1.4)有 2 个奇点, 当 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{IV}$ 时, 系统(1.4)没有奇点.

最后, 可以作出当系统(1.4)有 6 个奇点时的方向场如图 3 所示.

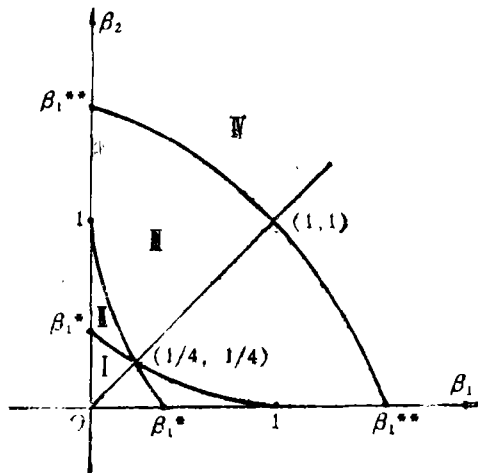


图 4

三、全局结构分析

(一) $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$ ($\Delta\omega = 0$)

此时系统(1.4)变成

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1[\sin(x-y) - \sin x] \\ \dot{y} = a_2[\sin(y-x) - \sin y] \end{cases} \quad (3.1)$$

引理 1 系统(3.1)在环面 Σ 上有 6 个初等奇点且是结构稳定的. 在环面 Σ 上存在两条封闭奇轨线, 将 Σ 分成两部份, 它们分别是系统(3.1)的两个稳定结点的渐近稳定区域.

证 分以下步骤证明:

① 系统(3.1)显然有 6 个初等奇点, 其坐标和类型如表 1 所示.

② 系统(3.1)不存在连结鞍点与鞍点的奇轨线。

考察鞍点 $A_1(0,0)$ 。其四个特殊方向为 $\pm \arctan \sqrt{a_1/a_2}$, $\pm(\pi - \arctan \sqrt{a_1/a_2})$ 。现研究特殊方向为 $\theta_1 = \pi - \arctan \sqrt{a_1/a_2}$ 的奇轨线。根据方向场, 此奇轨线只有三种可能(见图5(a)): 在区域 $A_1P A_5 Q$ 中趋于稳定结点 A_5 ; 穿过水平等倾线 $A_6 P$ 进入区域 $P A_4 A_6$, 根据方向场, 轨线不能穿越此区域, 故只能趋于 A_6 ; 穿过垂直等倾线 $Q A_6$ 进入区域 $Q A_3 A_6$, 根据方向场, 轨线不能穿越此区域, 故只能趋于 A_6 。这样鞍点 A_1 的方向为 θ_1 的奇轨线只能连结稳定结点 A_6 。用同样方法可证其它三个方向的奇轨线只能连结相应的结点(图5(b))。

同理, 另外二个鞍点的奇轨线只能连结相应的结点(图5(b))。因此系统(3.1)不存在鞍点到鞍点的奇轨线。

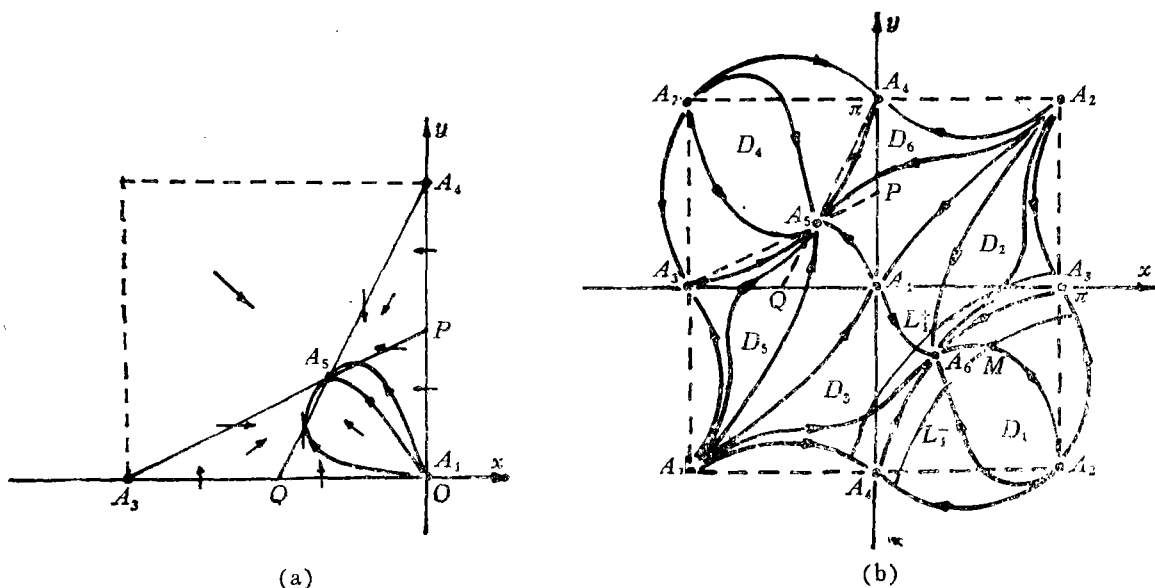


图 5

③ 系统(3.1)不存在第一、二类极限环。

从②可知, 系统(3.1)的三个鞍点的12条奇轨线将环面 Σ 分成六个封闭的子区域: $D_i (i=1, \dots, 6)$, 如图5(b)所示)。因此不存在跨越每个子区域的第一类极限环。另一方面, 每个子区域中无奇点, 故在每个子区域中不存在第一类极限环, 即系统(3.1)在 Σ 上不存在第一类极限环。

由于每个子区域中的任何轨线不能穿越其边界, 只能流向边界上的稳定结点。这说明区域 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 是稳定结点 A_6 的渐近稳定区域, 而 $D_4 \cup D_5 \cup D_6$ 是稳定结点 A_5 的渐近稳定区域。从而系统(3.1)不存在第二类极限环。两个渐近稳定区域的边界由奇轨线组成, 在环面 Σ 上为封闭曲线。

④ 从前面结果可知, 系统(3.1)的任何轨线的 α, ω 极限集为系统(3.1)的6个初等奇

点.

根据 Peixoto 定理^[12], 系统(3.1)是结构稳定的, 其相图如图 5(b)所示 (由计算机绘出).

最后还应指出, 如果作奇轨线 $\widehat{A_4 A_6 A_6}$ 的一条 δ 带域 $S(\delta)$, 其边界为 L^+ 和 L^- , 则 L^+ 和 L^- 是系统(3.1)的无切弧, 且过它们上的任一点的正半轨线都进入此带域 (如图 5(b)所示).

(二) $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ($\Delta\omega > 0$)

分下面几种情况:

1. $(\beta_1, \beta_2) \in I$ (参看图 4)

定理 2 当 $(\beta_1, \beta_2) \in I$ 时, 系统(1.4)有 6 个奇点, 在环面 Σ 上是结构稳定的, 其轨线划分的拓扑结构和系统(3.1)相同.

证 引理 1 已经证明, 当参数 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 时是结构稳定的. 因此在参数 β_1, β_2 的平面上存在包括原点在内的开区域 D , 使得当 $(\beta_1, \beta_2) \in D$ 时, 系统(1.4)和系统(3.1)的轨线具有相同的拓扑结构. 下面只要证明 $D = I$, 亦即 D 可以延拓到整个区域 I .

假设 D 的边界为 C (在第一象限部份). 为了证明 $D = I$, 只要证明当 $(\beta_1, \beta_2) \in C$ 时系统(1.4)的奇点个数必减少. 假设不然, 设 $(\beta_{10}, \beta_{20}) \in C$ 且对应的系统(1.4), 仍有 6 个奇点 $A_i (i=1, \dots, 6)$, 其类型如表 1 所示. 设 $\epsilon > 0$, 只要 ϵ 充分小, 则 $(\beta_{10}(1-\epsilon), \beta_{20}(1-\epsilon)) \in D$, 记参数为 $(\beta_{10}(1-\epsilon), \beta_{20}(1-\epsilon))$ 时的系统为 $(1.4)_\epsilon$, 奇点为 $A_i(\epsilon)$ (对应于 A_i). 则系统 $(1.4)_\epsilon$ 和系统(3.1)具有相同的拓扑结构, 且有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A_i(\epsilon) = A_i \quad (i=1, \dots, 6). \quad (3.2)$$

因此, 对于引理 1 中所指出的带域 $S(\delta, \epsilon)$ (其边界应记为 $L^+(\epsilon)$ 和 $L^-(\epsilon)$), 由于系统 $(1.4)_\epsilon$ 和 (3.2) 具有相同的拓扑结构, 则在边界上任一点的正半轨线必流入此带域. 根据解对参数 ϵ 的连续依赖性及 (3.2), 只要 ϵ 充分小, 可使系统 $(1.4)_0$ 的奇点 A_3, A_4 和 A_6 仍在 $S(\delta, \epsilon)$ 内, 且过边界上任一点 M 处的系统 $(1.4)_0$ 的正半轨线亦进入 $S(\delta, \epsilon)$ (如图 6 所示). 这样在由流入鞍点 A_3 和 A_4 的四条奇轨线和 $L^+(\epsilon)$ 及 $L^-(\epsilon)$ 为边的匣 $PQRS$ 内, 由 A_3 (或 A_4) 流出的奇轨线只能连结稳定结点 A_6 (参看图 6), 它和系统 $(1.4)_\epsilon$ (即系统(3.1)) 的奇轨线相对应. 用同样方法可得系统 $(1.4)_0$ 的奇轨线的分布和系统(3.1)相同, 从而可用引理 1 的证明方法, 证明系统 $(1.4)_0$ 和 (3.1) 具有相同的拓扑结构. 这是不可能的. 从而有 $D = I$.

2. $(\beta_1, \beta_2) \in II$ (参看图 4)

在奇点分析中已经指出, 此时系统(1.4)有 4 个奇点. 它是由原来的 6 个奇点中的一个鞍点和一个稳定结点重合成鞍结点, 例如 A_4 和 A_6 重合成鞍结点 A_{46} , 然后消失, 而其四个奇点仍保留而得到.

如果 A_4 和 A_6 重合成鞍结点 A_{46} , 利用定理 2 的证明方法可以确定系统的奇轨线的分布, 例如连结 A_3 和 A_{46} 的奇轨线 (从图 6 可以看出). 这些奇轨线将环面 Σ 分成若干区域, 再利用引理 1 中采用的方法, 可以确定其相图如图 8(b)所示. 如果让 β_1 或 β_2 增加, 鞍点 A_{46} 消失. 仍然采用这种方法, 可以证明下面的定理:

定理 3 当 $(\beta_1, \beta_2) \in II$ 时, 系统(1.4)有 4 个奇点且是结构稳定的. 在环面 Σ 上无任何极限环, 是全局渐近稳定的.

当 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{I}$ 时的相图如图 8(c) 所示。

3. $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{II}$ (参看图 4)

由奇点分析知, 此时系统(1.4)只有鞍点 A_1 和不稳定结点 A_2 , 并且是由 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{I}$ 的 4 个奇点 A_1, A_2, A_3 和 A_6 (或 A_4 和 A_6) 中的 A_3 和 A_6 (或 A_4 和 A_6) 重合成鞍结点 A_{36} (或 A_{46}), 然后消失所形成。不妨设系统(1.4)有奇点 A_1, A_2 和 A_{36} 的参数为 (β_{10}, β_{20}) , 为了方便, 记对应的系统为 $(1.4)_{0,\epsilon}$ 为正数且 $(\beta_{10}(1+\epsilon), \beta_{20}(1+\epsilon)) \in \mathbb{II}$, 此时的系统记为 $(1.4)_\epsilon$, 而对应的奇点记为 $A_1(\epsilon)$ 和

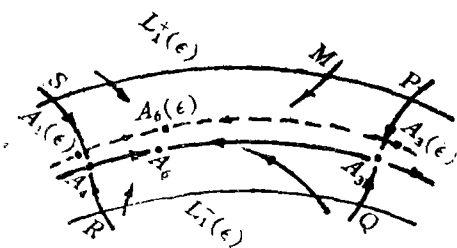


图 6

$A_2(\epsilon)$.

利用定理 2 的证明方法, 可以确定系统 $(1.4)_0$ 的相图如图 8(d) 所示。此时在环面 Σ 上存在一条由 A_{36} 流出又回到 A_{36} 的闭奇轨线 L_1 , 若作 L_1 的一条带域 $S(L_1, \delta)$, 其边界为 L_1^+ 和 L_1^- , 则对于过边界上任一点 P 的正半轨线必进入 $S(L_1, \delta)$, 即在 $S(L_1, \delta)$ 内的系统 $(1.4)_0$ 的任何正半轨线都不能流出此带域(参看图 8(d))。

引理 2 存在 ϵ 使得系统 $(1.4)_\epsilon$ 在环面 Σ 上是结构稳定的, 且存在唯一稳定的第二类极限环。

证 分以下步骤证明:

- ① 显然系统 $(1.4)_\epsilon$ 只有鞍点 $A_1(\epsilon)$ 和不稳定奇点 $A_2(\epsilon)$ 。
- ② 存在 ϵ , 使系统 $(1.4)_\epsilon$ 在 Σ 上存在唯一稳定的第二类极限环。

根据解对参数 ϵ 的连续依赖性, 只要 ϵ 充分小, $S(L_1, \delta)$ 仍保留原有的性质, 即系统 $(1.4)_\epsilon$ 在 $S(L_1, \delta)$ 内的任何正半轨线都不能流出此带域。若作 $S(L_1, \delta)$ 的割线 \overline{AB} (参看图 5), 则过 \overline{AB} 上任一点 M 的系统 $(1.4)_\epsilon$ 的正半轨线必和 \overline{AB} 交于 \overline{M} 。如果 \overline{M} 在 M 的右边, 则 \overline{M} 的后继点也在 \overline{M} 的右边, 但不能越出 $S(L_1, \delta)$ (参看图 5(b))。因此在 x, y 平面上就定义了一个点变换, 且在 $S(L_1, \delta)$ 内存在不动点 M_0 。从而过 M_0 的轨线就是系统 $(1.4)_\epsilon$ 的第二类极限环, 这就证明了存在性。并且由 $S(L_1, \delta)$ 的性质, 在 $S(L_1, \delta)$ 内必有一个稳定的第二类极限环 Γ_1 。

现证唯一性。如果 M 到 A 的距离为 s , \overline{M} 到 A 的距离为 \overline{s} , 则可建立后继函数

$$\overline{s} = f(s; \beta_{10}, \beta_{20}, \epsilon), \quad s \in (0, s_0) \tag{3.3}$$

其中 0 对应于 A , s_0 对应于 B , 且 $\lim_{\delta \rightarrow 0} s_0 = 0$ 。由于系统 $(1.4)_\epsilon$ 的右端解析, 故 f 关于 s 和

ϵ 亦解析。

首先证明: $\forall \epsilon, \delta$, 系统 $(1.4)_\epsilon$ 不可能存在无限多个第二类极限环。

如果对 $\forall \epsilon$ 和 δ , 在 $S(L_1, \delta)$ 内存在无限多个第二类极限环, 则在 $(0, s_0)$ 内存在数列 $\{s_k, k=1, 2, \dots\}$, 使得

$$s_k = f(s_k; \beta_{10}, \beta_{20}, \epsilon) \tag{3.4}$$

根据 f 关于 s 的解析性及 δ 的任意性, 有

$$s = f(s; \beta_{10}, \beta_{20}, \epsilon), \quad s \in (0, s_0) \tag{3.5}$$

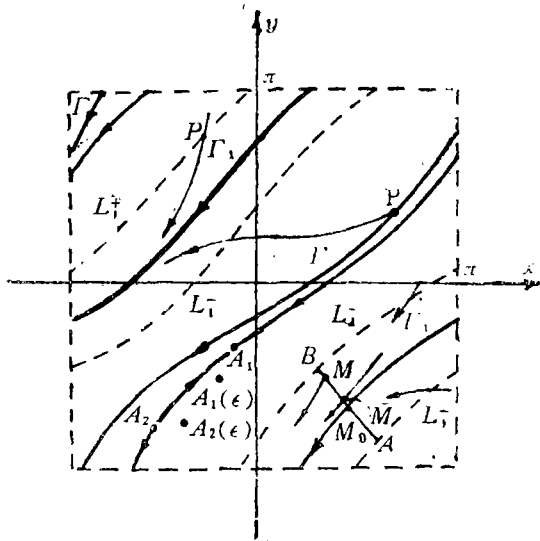


图 7

看图 7 或图 8(e), 在图 8(e) 中仍用 L_2 表示), 并且 A_1 和 $A_1(\epsilon)$, A_2 和 $A_2(\epsilon)$ 充分靠近. 这样, Γ 必在 Γ_1 与 $L_2(\epsilon)$ 之间, 并且对于充分小的 ϵ , 总可假定 Γ 上的点不但是系统 (1.4) _{ϵ} 的常点, 而且是系统 (1.4)₀ 的常点. 因此, 总可选择充分小的 ϵ 和 δ , 使 Γ 在 $S(L_1, \delta)$ 之外, 而过 $P \in \Gamma$ 上的系统 (1.4)₀ 的正半轨线在有限时间进入 $S(L_1, \delta)$. 根据解对参数 ϵ 的连续依赖性, 只要 ϵ 充分小, 系统 (1.4) _{ϵ} 过 P 的正半轨线进入 $S(L_1, \delta)$, 这和过 P 的轨线是第二类极限环矛盾.

③ 前已指出, 流入鞍点 $A_1(\epsilon)$ 的两条奇轨线恰好是连结不稳定结点 $A_2(\epsilon)$, 即是闭奇轨线 $L_2(\epsilon)$. 用定理 2 的方法可以证明: 从 $A_1(\epsilon)$ 流出的两条奇轨线必进入 $S(L_1, \delta)$. 故不存在鞍点到鞍点的奇轨线.

④ 对于某个 ϵ , 系统 (1.4) _{ϵ} 的唯一稳定的第二类极限环 Γ_1 和闭奇轨线 $L_2(\epsilon)$ 将环面 Σ 分割成两个区域, 而每个区域中无奇点且无任何第二类极限环, 因此在 Σ 上除了流入 $A_1(\epsilon)$ 的两条奇轨线外, 所有正半轨线都趋于 Γ_1 . 因此 (1.4) _{ϵ} 的 ω 极限集是 Γ_1 和 $A_1(\epsilon)$. 而 α 极限集是 $A_2(\epsilon)$ 和 $A_1(\epsilon)$.

综上所述, 根据 Poincaré 定理, 存在某个正数 ϵ , 使得系统 (1.4) _{ϵ} 在 Σ 上结构稳定且存在唯一稳定的第二类极限环.

引理 2 说明, 系统 (1.4) 在参数平面区域 III 中的某个点 $(\beta_{10}(1+\epsilon), \beta_{20}(1+\epsilon))$ 上是结构稳定的, 从而存在包括 $(\beta_{10}(1+\epsilon), \beta_{20}(1+\epsilon))$ 的一个开区域 D , 当 $(\beta_1, \beta_2) \in D$ 时, 引理 2 的结论为真. 如同定理 2 一样, 可将 D 延拓到整个区域 III. 即下面的定理成立:

定理 4 当 $(\beta_1, \beta_2) \in III$ 时, 系统 (1.4) 是结构稳定的, 且在环面 Σ 上存在唯一稳定的第二类极限环.

当 $(\beta_1, \beta_2) \in III$ 时的相图如图 8(e) 所示.

4. $(\beta_1, \beta_2) \in IV$ (参看图 4)

如同 $(\beta_1, \beta_2) \in III$ 时一样, 当 (β_{10}, β_{20}) 在 III 和 IV 的边界上时, 系统 (1.4) 的奇点 A_1 和 A_2 重合成鞍结点 A_{12} , 并且存在由 A_{12} 流出又回到 A_{12} 的奇轨线 L_2 . 一旦 (β_1, β_2) 进入 IV, 则 A_{12} 消失, 只要 (β_1, β_2) 和 (β_{10}, β_{20}) 充分靠近, 在 L_2 的近傍必然出现唯一不稳定的第二类

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得

$$s \equiv f(s; \beta_{10}, \beta_{20}, 0) \tag{3.6}$$

即系统 (1.4)₀ 在 $S(L, \delta)$ 内存在第二类极限环. 这是不可能的.

同理, 系统 (1.4)₀ 在 $S(L_1, \delta)$ 外也不存在无限多个第二类极限环.

如果对于 $\forall \epsilon$ 和 δ , 系统 (1.4) _{ϵ} 存在二个以上的二类环. 不妨设除了 $S(L_1, \delta)$ 内的稳定第二类极限环 Γ_1 外, 还存在另一个第二类极限环 Γ (如图 7 所示). 根据解的唯一性, Γ_1 和 Γ 不相交. 另一方面, 系统 (1.4)₀ 存在连结 A_1 和 A_2 的闭奇轨线 L_2 (参看图 8(d)), 利用定理 2 的证明方法, 只要 ϵ 充分小, 系统 (1.4) _{ϵ} 仍存在连结 $A_1(\epsilon)$ 和 $A_2(\epsilon)$ 的闭奇轨线 $L_2(\epsilon)$ (参

极限环 Γ_2 。同样可以证明:

定理 5 当 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}$ 时, 系统(1.4)无奇点且是结构稳定的。在环面 Σ 上存在唯一

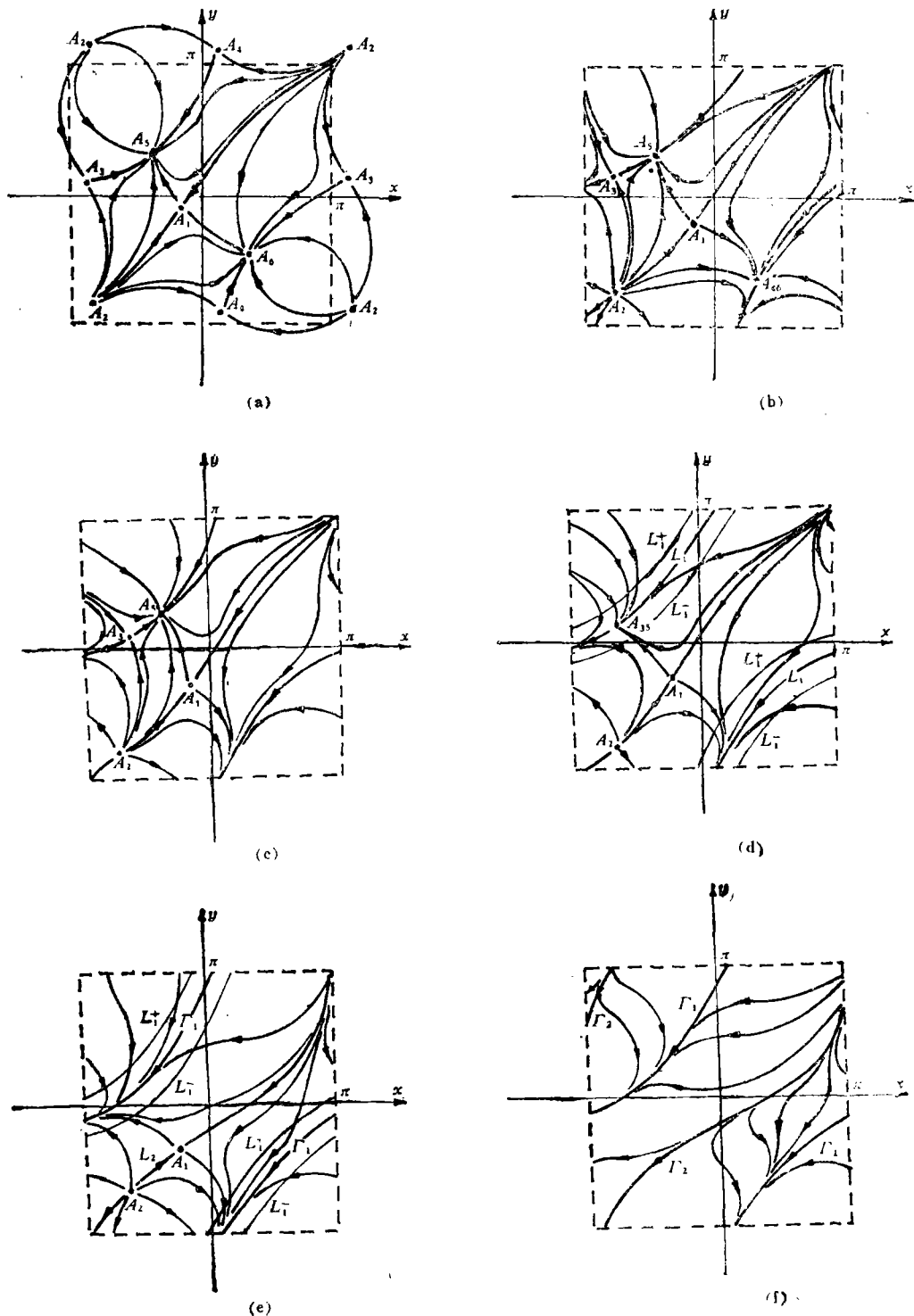


图 8

稳定的第二类极限环和唯一不稳定的第二类极限环。

$(\beta_1, \beta_2) \in \text{IV}$ 时的相图如图 8(f) 所示。

综合上述, 曲线 $\Phi(\beta_1, \beta_2) = 0$ 是系统(1.4)的分歧曲线。

四、应 用

利用系统(1.4)的全局结构分析结果就可研究一阶交叉耦合锁相环的捕获、跟踪性能。当参数 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{I} \cup \text{II}$ 时, 系统(1.4)存在稳定奇点且是结构稳定的, 从而环路处于锁定状态。当参数 $(\beta_1, \beta_2) \in \text{III} \cup \text{IV}$ 时, 系统(1.4)无稳定奇点且出现第二类极限环, 从而环路处于失锁的差拍状态。根据环路的同步带和捕捉带的定义^[13], 对于图 1 中的 1 环和 2 环的增压为 α_1, α_2 时, 只要选择固有频率 $\Delta\omega$, 使 $(\Delta\omega/\alpha_1, \Delta\omega/\alpha_2) \in \text{I} \cup \text{II}$, 环路就处于锁定状态。由此得到 $\Delta\omega$ 的变化范围就是环路的同步带和捕捉带区域。特别当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 环路的同步带和捕捉带即为 $\Delta\omega < \alpha_1/4$ 。当 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时, 系统(1.4)的分歧曲线的解析表达式很难求出, 但我们可以通过由计算机绘出的分歧曲线图 4, 求出其近似表达式, 从而可得出同步带和捕捉带的近似公式。从而可以对环路的参数 α_1, α_2 和 $\Delta\omega$ 进行控制, 使环路处于锁定状态。显然这对环路设计有着指导意义。关于捕捉带和同步带的近似公式, 我们将另文讨论。

本文得到李骊教授和梁中超教授的热情支持和帮助, 特致谢!

参 考 文 献

- [1] Sundresh, T. S., F. A. Cassara and H. Schachter, Maximum a posteriori estimator for suppression of interchannel interference in FM receivers, *IEEE Trans. Commun.*, COM-25, December (1977), 1480—1485.
- [2] Cassara, F. A., H. Schachter and G. Simowitz, Cross coupled phase-locked loop FM demodulator, *Proceedings of the 22nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, June (1979), 475—481.
- [3] F. A. Cassara, H. Schachter and G. Simowitz, Acquisition Behavior of the cross-coupled phase-locked loop FM demodulator, *IEEE Trans. Commun.*, COM-28, June (1980), 897—904.
- [4] Bar-Ness, Y., Cross coupled PLL interference canceller with closed loop amplitude control, *IEEE GLOBE COM*, 82 C8, 2 (1982).
- [5] Bar-Ness Y., F. A. Cassara, H. Schachter and R. Difazio, Cross-coupled phase-locked loop with closed loop amplitude control, *IEEE Trans. Commun.*, COM-32, February (1984), 195—199.
- [6] Bykhovskiy, M. A., The potential interference immunity of the separation of two FM signals, *Telecommunication and Radio Engineering*, 33—34, 10 (1979).
- [7] Bykhovskiy, M. A., Synthesis and analysis of a two-channel compensator for FM signals, *Telecommunication and Radio Engineering* 34—35, 10, oct. (1980).
- [8] Bykhovskiy, M. A., An adaptive compensator for radio interference, *Telecommunication and Radio Engineering*, 35—36, 11 (1981).
- [9] 周荣星等, 西北电讯工程学院学报, 3 (1982).
- [10] 张厥盛等, 西北电讯工程学院学报, 4 (1982).

- [11] 安德罗诺夫 A. A. 等, 《振动论》, 杨炳等译, 科学出版社 (1977).
 [12] Peixoto, M. M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1 (1962).
 [13] 郑继禹等, 《锁相环路原理与应用》, 人民邮电出版社 (1976).

The Global Structural Stability and Application of the Toroidal Differential Equations

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1[\sin(x-y) - \sin x] - \Delta\omega \\ \dot{y} = \alpha_2[\sin(y-x) - \sin y] - \Delta\omega \end{cases}$$

Zhou Rong-xing

(Xidian University, Xi'an)

Abstract

In this paper, the global structural stability of the toroidal differential equations

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1[\sin(x-y) - \sin x] - \Delta\omega \\ \dot{y} = \alpha_2[\sin(y-x) - \sin y] - \Delta\omega \end{cases}$$

has been obtained, and applied to the cross-coupled phase-locked loop, where $\Delta\omega \geq 0$.