

矩形槽浅水表面波的二次谐波共鸣*

黄国翔 颜家壬 邹凤梧

(湘潭大学) (华中理工大学)

(李灏推荐, 1987年10月16日收到)

摘 要

本文用多重尺度微扰技术研究了矩形槽中浅水表面波的二次谐波共鸣现象。结果表明, 波的包络仅与时间慢变量有关。作者严格地求解了波包络方程, 并对结果进行了讨论。

一、引 言

深水极限下水表面波的二次谐波共鸣现象已由 Wilton, Simmons 和 McGoldrick 作了研究^{[1],[2],[3]}。这时仅当计及表面张力时才可能发生二次谐波共振。McGoldrick 指出, Wilton 的皱波 (ripples) 理论只不过是一般共振相互作用理论的一个特殊情形。

1984年, Wu Jun-ru, Keolian 和 Rudnick 在实验室首先发现了非传播水表面孤波^[4], 并在实验上做了进一步的研究^[5]。他们发现, 矩形槽静态液面深度 d 的控制是产生非传播表面孤波的关键。当 d 小于某一临界值 d^* 时, 孤波不再出现。在 Larraza, Putterman 和 Miles 的理论中对这一现象进行了解释^{[6],[7]}。但在 d 较小时, 理论中所采用的微扰方法失效。事实上, 在浅水情形下, 由于系统的频率与波长之间的色散关系变弱, 以至没有足够的色散与非线性效应相平衡, 因此孤波将不会产生。但若深度 d 较小, 表面张力可忽略时, 色散关系 $\omega^2 = gk \tanh kd \approx gdk^2$ ($k = \pi/b$, b 为槽的宽度), 由于非线性效应, 频率为 $\omega = \sqrt{gd} k$ 的谐波将与频率为 2ω 的谐波相互耦合而发生二次谐波共振。本文的目的, 是利用多重尺度微扰技术分析浅水情形下这一有趣的现象。

二、基本方程

在一长为 L , 宽为 b 的矩形槽内注入深度为 d ($b, d \ll L$) 的液体。引进直角坐标系, 其 x, y, z 轴分别平行于槽的长、宽、高方向, 并设流体静止时的界面为 $z=0$ 平面。用 $\phi(x, y, z)$ 表示流体无旋运动的速度势, $\xi(x, y, t)$ 表示当扰动存在时流体表面的位移, 则 ϕ, ξ 满足下列方程及边界条件

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -d \leq z \leq \xi(x, y, t) \quad (2.1)$$

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$\phi_y = 0 \quad y = 0, b \quad (2.2)$$

$$\phi_z = 0 \quad z = -d \quad (2.3)$$

$$\xi_t + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y = \phi_z \quad (2.4)$$

$$g\xi + \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = 0 \quad \left. \vphantom{\xi_t + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y = \phi_z} \right\} z = \xi(x, y, t) \quad (2.5)$$

其中 g 为重力加速度, 下标表示对该变量求偏导数, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

将(2.4), (2.5)在 $z=0$ 处作 Taylor 展开至三级项, 得

$$\xi_t - \phi_z + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y - \phi_{zz} \xi + \phi_{xz} \xi \xi_x + \phi_{yz} \xi \xi_y - \frac{1}{2} \phi_{zzz} \xi^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\phi_t + g\xi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \phi_{xz} \xi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)_x^2 \xi + \frac{1}{2} \phi_{tzz} \xi^2 = 0 \quad (2.7)$$

按 Wu 等人^[4]的实验, 我们研究在 y 方向作高频运动, 在 x 方向为 $\phi^{(1)}$ 所调制的弱非线性水表面波. 引入多重变量 $X_i = \varepsilon^i x$, $T_i = \varepsilon^i t$, $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$\text{则} \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots$$

设 ϕ, ξ 的渐近展开式为

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \quad (2.8)$$

$$\xi = \varepsilon \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \xi^{(2)} + \dots \quad (2.9)$$

其中 ε 为小参数, 表示波振幅相对大小的量级.

将以上展式代入(2.1)~(2.5), 比较 ε 的幂次, 可得到各级近似方程. 对(2.1)~(2.3), 有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad -d \leq z \leq \xi \quad (2.10)$$

$$\phi_z^{(i)} = 0 \quad z = -d \quad (2.11)$$

$$\phi_y^{(i)} = 0 \quad y = 0, b \quad (2.12)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$, 其中

$$\alpha^{(1)} = 0 \quad (2.13)$$

$$\alpha^{(2)} = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \phi^{(1)} \quad (2.14)$$

.....

对(2.6)有

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi^{(i)} - \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(i)} = \beta^{(i)} \quad z = 0, i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

$$\beta^{(1)} = 0 \quad (2.16)$$

$$\beta^{(2)} = - \left[\frac{\partial}{\partial T_1} \xi^{(1)} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial y} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right] \quad (2.17)$$

.....

对(2.7)有

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^{(i)} + g\xi^{(i)} = \gamma^{(i)} \quad z = 0, i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

$$\gamma^{(1)}=0$$

$$\gamma^{(2)}=-\left\{\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial T_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right]+\xi^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\phi^{(1)}\right\} \quad (2.19)$$

从方程(2.15), (2.17)中消去 $\xi^{(i)}$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi^{(i)}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^{(i)}=\frac{1}{g}\gamma_i^{(i)}-\beta^{(i)} \quad z=0, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

在方程(2.10)~(2.20)中令 $i=1$, 得一级近似方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi^{(1)}=0 \quad -d\leq z\leq\xi \quad (2.21)$$

$$\phi_x^{(1)}=0 \quad z=-d \quad (2.22)$$

$$\phi_y^{(1)}=0 \quad y=0, b \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi^{(1)}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^{(1)}=0 \quad z=0 \quad (2.24)$$

不难解得

$$\phi^{(1)}=\phi^{(1,0)}+\left[\phi^{(1,1)}\cos ky\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\exp[i\omega t]+c.c.\right] \quad (2.25)$$

$$\xi^{(1)}=-\frac{i\omega}{g}[\phi^{(1,1)}\cos ky\exp[i\omega t]+c.c.] \quad (2.26)$$

$$\omega^2=gk\tanh kd \quad k=\pi/b \quad (2.27)$$

其中 c. c. 代表相应的复共轭, 从(2.27)式可见, 当 kd 较小时, 系统的色散较弱, 文献[6]中所采用的微扰展开失效. 由于没有足够的色散, 表面将不能形成孤波. 但是由于非线性效应, 与(0, 1)模具有相同速度的模式将相互耦合, 二次谐波共振发生. 这一现象已为 Larraza 和 Putterman 所注意到. 所以当 kd 较小时, 必须取

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}=\phi^{(1,0)}+\left[\phi^{(1,1)}\cos ky\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\exp[i\omega t] \right. \\ \left. +\phi^{(1,2)}\cos 2ky\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}\exp[i\omega t]+c.c.\right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\xi^{(1)}=-\frac{i\omega}{g}[\phi^{(1,1)}\cos ky\exp[i\omega t]+\phi^{(1,2)}\cos 2ky\exp[2i\omega t]+c.c.] \quad (2.29)$$

在小振幅近似下, $\phi^{(1,i)}$ ($i=0, 1, 2$)均为常数. 对弱非线性有限振幅波, 它们均是 X_i, T_i 的函数.

在方程(2.10)~(2.20)中令 $i=2$, 得到二级近似方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi^{(2)}=\alpha^{(2)} \quad -d\leq z\leq\xi \quad (2.30)$$

$$\phi_x^{(2)}=0 \quad z=-d \quad (2.31)$$

$$\phi_y^{(2)}=0 \quad y=0, b \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi^{(2)}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^{(2)}=\frac{1}{g}\gamma_i^{(2)}-\beta^{(2)} \quad z=0 \quad (2.33)$$

经过详细计算, 方程(2.33)化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^{(2)} = & -\frac{i\omega}{g} \left[2 \frac{\partial \phi^{(1,1)}}{\partial T_1} + \frac{k^2}{2} \phi^{*(1,1)} \phi^{(1,2)} \right] \cos ky \exp[i\omega t] \\ & - \frac{i\omega}{g} \left[3 \frac{\partial \phi^{(1,2)}}{\partial T_1} - \frac{3}{2} k^2 \phi^{(1,1)} \right] \cos 2ky \exp[i\omega t] + \text{c.c.} + \text{非长期项} \end{aligned} \quad (2.34)$$

为了使解中不出现长期项，必有

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \phi^{(1,1)} = -\frac{k^2}{4} \phi^{*(1,1)} \phi^{(1,2)} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \phi^{(1,2)} = \frac{k^2}{2} \phi^{(1,1)} \quad (2.36)$$

由此可见，波包络 $\phi^{(1,1)}$ ， $\phi^{(1,2)}$ 仅与时间慢变量 T_1 有关。方程(2.35)，(2.36)是一般二次谐波共鸣方程在 $\partial/\partial X_1=0$ 下的特殊情形^[8]。

三、方程的解

令 $\phi^{(1,1)}=A_1 \exp[i\theta_1]$ ， $\phi^{(1,2)}=A_2 \exp[i\theta_2]$ ， A_1 ， A_2 ， θ_1 ， θ_2 均为实的慢变函数，记 $T_1=T$ ，方程(2.35)，(2.36)可化为

$$\frac{d}{dT} A_1 = -\frac{k^2}{4} A_1 A_2 \cos \theta \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dT} A_2 = \frac{k^2}{2} A_1^2 \cos \theta \quad (3.2)$$

$$A_1 \frac{d}{dT} \theta_1 = -\frac{k^2}{4} A_1 A_2 \sin \theta \quad (3.3)$$

$$A_2 \frac{d}{dT} \theta_2 = -\frac{k^2}{2} A_1^2 \sin \theta \quad (3.4)$$

其中 $\theta=\theta_2-2\theta_1$ 为相对位相。将(3.1)乘以 A_1 ，(3.2)乘以 $A_2/2$ ，然后两式相加，得到系统的第一个守恒量

$$2A_1^2 + A_2^2 = E \quad (3.5)$$

由此有 $0 \leq A_1^2 \leq E/2$ ， $0 \leq A_2^2 \leq E$ 。(3.5)式表明，两个模式之间有能量交换，保持能量守恒。

将(3.3)用(3.1)式除再乘以 $2A_1A_2$ ，(3.4)式用(3.2)式除再乘以 A_1^2 ，然后两式相减，不难得到系统的第二个守恒量。

$$A_1^2 A_2 \sin \theta = L \quad (3.6)$$

利用(3.5)式得到 $0 \leq L^2 \leq E^3/27$ (3.7)

由(3.5)，(3.6)式可将方程(3.1)~(3.4)化为

$$(d/dT) A_1^2 = \pm (k^2/2) \sqrt{-2A_1^2 + EA_1^2 - L^2} \quad (3.8)$$

$$(d/dT) A_2^2 = \pm (k^2/2) \sqrt{A_2^2 - 2EA_1^2 + E^2A_1^2 - 4L^2} \quad (3.9)$$

$$A_1^2 \frac{d}{dT} \theta_1 = -\frac{k^2}{4} L, \quad A_1^2 \frac{d}{dT} \theta_2 = -\frac{k^2}{2} L \quad (3.10)$$

方程 (3.8), (3.9) 的解可用椭圆函数表达, 具体计算结果如下

$$A_1^2 = \beta_3 - (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sn}^2[\Xi, k] \quad (3.11)$$

$$A_2^2 = 2(\beta_1 + \beta_2) + 2(\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sn}[\Xi, k] \quad (3.12)$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为方程 $E x^2 - 2x^3 - L^2 = 0$ 的三个根。由笛卡儿符号法则知, 方程有两个正根和一个负根, 且 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = E/2$ 。其中已设 $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1, \beta_1 < 0$ 。

$$\Xi = \frac{k^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\beta_3 - \beta_1} (T - T_0)$$

$\operatorname{sn}[\Xi, k]$ 为 Jacobi 椭圆函数, $k = \sqrt{\beta_3 - \beta_2} / \sqrt{\beta_3 - \beta_1}$ 为椭圆函数的模。

利用 (3.11), (3.12) 不难得到

$$\theta_1(T) - \theta_1(T_0) = -\frac{L}{\beta_3 \sqrt{2(\beta_3 - \beta_1)}} \Pi[\Xi, c_1] \quad (3.13)$$

$$\theta_2(T) - \theta_2(T_0) = -\frac{L}{(\beta_1 + \beta_2) \sqrt{2(\beta_3 - \beta_1)}} \Pi[\Xi, c_2] \quad (3.14)$$

其中 $c_1 = (\beta_2 - \beta_3) / \beta_3, c_2 = (\beta_3 - \beta_2) / (\beta_2 + \beta_1)$; $\Pi[u, c]$ 为第三种不完全 Legendre 积分, 定义为⁽⁸⁾

$$\Pi[u, c] = \int_0^u \frac{du}{1 + c \operatorname{sn}^2 u} \quad (3.15)$$

由 (3.11)~(3.14) 可见, 矩形槽浅水表面波发生二次谐波共鸣时, 波包的振幅及位相均是周期函数, 表面波由下式给出

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} = & -\frac{i\omega}{g} \{ [\beta_3 - (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sn}^2[\Xi, k]]^{\frac{1}{2}} \cos ky \exp[i(\omega t + \theta_1(T))] \pm [2(\beta_1 + \beta_2) \\ & + 2(\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sn}^2[\Xi, k]]^{\frac{1}{2}} \cos 2ky \exp[2i(\omega t + \theta_2(T))] \} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $\theta_1(T), \theta_2(T)$ 由 (3.13), (3.14) 给出。不难得到方程 (3.8), (3.9) 的相空间图如图 1 和图 2。

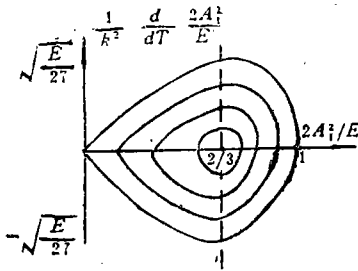


图 1

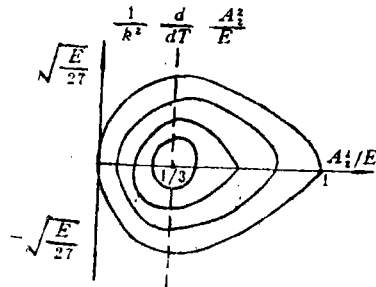


图 2

在图 1 中, 最外边的轨道相应于 $L=0$ 。此时相对位相 $\theta=0, d\theta_1/dT=0, d\theta_2/dT=0$, 没有位相调制。振幅的调制退化为双曲函数, $A_1 = \sqrt{E/2} \operatorname{sech}^2(k^2/4) \sqrt{E(T-T_0)}$, $A_2 = \pm \sqrt{E} \tanh(k^2/4) \sqrt{E(T-T_0)}$, 调制周期为无穷大; 最内的轨道为一点, 即 $2A_1^2/E = 2/3, (k^2 d/dT)(2A_1^2/E) = 0$, 相应于 $L = (E^3/27)^{\frac{1}{2}}$ 。此时相对位相为 $\pm \pi/2$ 。振幅调制退化为 $A_1 = \sqrt{E/3} = \pm A_2, \theta_1(T) = \mp (k^2/4) A_1 T, \theta_2(T) = \mp (k^2/2) A_1 T$ (已取 $T=T_0, \theta_1(T_0) = \theta_2(T_0) = 0$), 其解为三角函数; 中间的轨道对应于 $0 < L^2 < E^2/27$, 此时振幅与位相均受到调制, 其解为椭圆函数。

四、几点结论

综合上述,关于矩形槽浅水表面波的二次谐波共鸣,我们有以下几点结论:

1. 矩形槽浅水表面波当表面张力可忽略时,系统内可能发生二次谐波共鸣,这与无限深水表面波的情形不同,后者仅当计入表面张力时才有可能。

2. 矩形槽浅水表面波发生二次谐波共鸣时,波的包络仅与时间慢变量有关,其包络方程可严格地解出。

3. 在一般情况下,波包络的解为椭圆函数。在两种极限情形,即 $\theta=0$ 或 $\theta=\pm\pi/2$ 时,退化为双曲函数和三角函数。这依赖于实验中的初值条件。

关于流体粘性的考虑与参数共振的情况,是一个值得进一步探讨的问题。

参 考 文 献

- [1] Wilton, J. R., On ripples, *Phil. Mag.*, 29, 6 (1915), 688—700.
- [2] Simmons, W. F., A variational method for weak resonant wave interaction, Ph. D. Thesis, Department of Mechanics, The Johns Hopkins University, see also *Proc. Roy. Soc. Lond*, A309 (1969), 551.
- [3] McGoldrick, L. F., On Wilton's ripples: A special case of resonance interactions, *J. Fluid Mech.*, 42 (1970), 193—200.
- [4] Wu Jun-ru, R. Keolian and I. Rudnick, Observation of a nonpropagation hydrodynamic soliton, *Phys. Rev. Lett.*, 52 (1984), 1421.
- [5] 吴君如, A. Larraza, I. Rudnick, 水表面波矩形谐振器非线性共振曲线的测定, *物理学报*, 6 (1985), 796—799.
- [6] Larraza, A. and S. Putterman, Theory of nonpropagation surface wave solitons, *J. Fluid Mech.*, 148 (1984), 443.
- [7] Miles, J. W., Parametrically excited solitary wave, *J. Fluid Mech.*, 148 (1984), 450.
- [8] Dodd, R. K. et al., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Chap. 8 (1982).
- [9] 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 第十章, 科学出版社 (1979).

The Second Harmonic Resonance for the Shallow Water Surface-Wave in a Rectangular Trough

Huang Guo-xiang Yan Jia-ren

(Xiangtan University, Hunan)

Zou Feng-wu

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

By using the perturbation method of multiple scales, this paper deals with the phenomenon of the second harmonic resonance for shallow water surface-wave in a rectangular trough. The results show that the envelope of the wave only depends on slow-variables of time. Eqs. of wave envelope are strictly solved and the results are discussed.