

# 一个分段线性Hénon映射吸引集合的结构\*

朱照宣 刘曾荣

(北京大学) (安徽大学)

(1987年5月10日收到)

## 摘 要

本文采用对偶线映射的方法分析了分段线性 Hénon 映射  $(x, y) \rightarrow (1 - a|x| + by, x)$ ,  $a = 8/5$ ,  $b = 9/25$  吸引集的详细结构. 设  $A$  和  $B$  分别是映射在第一和第三象限内的不动鞍点, 本文说明: (1) 映射的吸引集是  $B$  的不稳定流形  $U_B$  的闭包  $\bar{U}_B$ , 而  $A$  的不稳定流形  $U_A$  则是  $\bar{U}_B$  的一个子集; (2) 吸引盆是  $A$  的稳定流形  $S_A$  的闭包  $\bar{S}_A$ , 其边界是  $B$  的稳定流形  $S_B$ , 而  $S_B$  在  $S_A$  的极限集之内. 文中还给出周期鞍点不稳定流形和不动鞍点不稳定流形之间的关系. 文中的符号动力学记号可用以研究各个不变流形每段的动态以及各同宿点、异宿点的动态.

## 一、分段线性Hénon映射及其不动鞍点

如果在熟知的Hénon映射  $(x, y) \rightarrow (1 - ax^2 + by, x)$  中用  $|x|$  代替  $x^2$ , 即得分段线性Hénon映射, 用  $\varphi$  表示:

$$\varphi: (x, y) \rightarrow (1 - a|x| + by, x)$$

Lozi<sup>[1]</sup>最早分析过这一系统; Tel<sup>[2]</sup>分析了鞍点的不稳定流形和周期二点的不稳定流形; Misiurewicz<sup>[4]</sup>证明了奇怪吸引子的存在性.

这一映射  $\varphi$  可写成下列等价的形式:

$$\begin{aligned} r \text{ (右)}: & \quad (x, y) \rightarrow (1 - ax + by, x) \quad \text{当 } x \geq 0, \\ \text{和 } l \text{ (左)}: & \quad (x, y) \rightarrow (1 + ax + by, x) \quad \text{当 } x \leq 0. \end{aligned}$$

显然, 右的映象将在上半平面 ( $y \geq 0$ ) 内而左的映象则在下半平面内.

逆映射  $\varphi^{-1}$  可类似地写成为

$$\begin{aligned} r^{-1} \text{ (逆右)}: & \quad (x, y) \rightarrow (y, (x + ay - 1)/b) \\ \text{和 } l^{-1} \text{ (逆左)}: & \quad (x, y) \rightarrow (y, (x - ay - 1)/b) \end{aligned}$$

$r^{-1}$  将上半平面的点映入右半平面, 而  $l^{-1}$  则将下半平面映为左半平面.

为简单起见, 以下讨论

$$a = \frac{8}{5}, \quad b = \frac{9}{25}$$

\* 本文的结论已报道于《科学通报》(“研究通讯”栏), 31, 23(1986), 1835.

于是映射有两个不动鞍点: 第一象限内的  $A(25/56, 25/56)$  和第三象限内的  $B(-25/14, -25/14)$ . 鞍点  $A$  处的特征值由  $r$  给出, 它们是

$$A_A = -\frac{9}{5} \text{ 和 } \lambda_A = +\frac{1}{5}.$$

因  $|A_A| > 1$ , 相应的不变流形是不稳定流形, 又因  $A_A$  为负, 这一不稳定流形  $U_A$  上的点在迭次映射中将在鞍点两侧来回振荡. 对应于  $\lambda_A$  的不变流形是稳定流形  $S_A$ , 其上的点在迭代时不振荡, 因为  $|\lambda_A| < 1$  而  $\lambda_A$  又是正的. 由于映射  $\varphi$  是分段线性的, 鞍点的不变流形都由许多直线段连结而成. 下面用记号  $u$  代表不稳定流形  $U$  的最初直线段, 记号  $s$  代表稳定流形  $S$  的最初线段. 于是  $u_A$  和  $s_A$  的方程是

$$u_A: 20x + 36y - 25 = 0 \quad \text{即} \quad \frac{x}{5/4} + \frac{y}{25/36} = 1$$

$$s_A: 70x - 14y - 25 = 0 \quad \text{即} \quad \frac{x}{5/14} + \frac{y}{-25/14} = 1$$

同样, 鞍点  $B$  处的特征值由  $l$  确定, 它们是

$$A_B = +9/5 \quad \text{和} \quad \lambda_B = -1/5.$$

稳定流形  $S_B$  和 unstable 流形  $U_B$  的最初线段分别是

$$s_B: 20x + 4y + 25 = 0 \quad \text{即} \quad \frac{x}{-5/4} + \frac{y}{-25/4} = 1$$

$$u_B: 30x - 54y - 25 = 0 \quad \text{即} \quad \frac{x}{5/6} + \frac{y}{-25/54} = 1$$

特征值的正负号和大小决定了不变流形在鞍点  $B$  附近的动态,  $S_B$  上的点是振荡性的, 而  $U_B$  上的点则不是.

## 二、对偶线映射

任何一直线的右半平面部分经映射  $\varphi$  变为上半平面的直线. 采用齐次坐标后, 这个映射是线性的. 设线坐标为  $(w_1, w_2, w_3)$ , 它代表通常表示法中的直线  $w_1x + w_2y + w_3 = 0$ , 并令  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ , 则对  $\bar{w}$  的右映射是

$$\bar{w} \rightarrow R\bar{w}$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 \\ 1 & a/b & 0 \\ 0 & -1/b & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $R$  的三个特征值 (按绝对值大小为序) 是

$$\lambda_A^{-1}, \quad 1 \quad \text{和} \quad A_A^{-1}.$$

对应于第二特征值的特征矢量  $\bar{w}$  是  $(0, 0, 1)^T$ , 说明无穷远直线是映射的不动线. 这一性质可能对分析系统在无穷远处的动态有用, 但与本文内容无关. 对我们有用的两个不平凡

(第一和第三) 特征值. 与第一个特征值 ( $\lambda_A^{-1} = +5$ ) 对应的特征矢量是  $(20, 36, -25)^T$ , 它就是不稳定流形线段  $u_A$ . 对应于第三特征值 ( $A_A^{-1} = -5/9$ ) 的特征矢量是稳定流形线

段 $s_A$ .

任何矢量(除对应于无穷远线和 $s_A$ 者外)在迭次左乘矩阵 $R$ 后,将趋于代表 $u_A$ 的矢量.在通常表示法中,除 $s_A$ 以外的有限平面上任何直线段经过第一象限内的迭次映射(线段本身在右半平面而其映象也需一直在右半平面)将趋于 $u_A$ .

对于逆右映射,相应的矩阵是

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有限平面上任何线段,在迭次逆右映射(由上平面映成右半平面)后,将趋于极限 $s_A$ ,其例外是 $u_A$ ,因为 $u_A$ 对逆右映射说是不动线.

对线段的左映射(由左半到下半)有类似的结果,相应的变换矩阵是

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 \\ 1 & -a/b & 0 \\ 0 & -1/b & 1 \end{bmatrix}$$

其特征值(按绝对值大小为序)为

$$\lambda_B^{-1}, 1, A_B^{-1}$$

相应的三条不动线分别是稳定流形最初线段 $s_B$ ,无穷远线和不稳定流形最初线段 $u_B$ .迭次左映射将使有限平面内除 $s_B$ 以外的任何线段趋于 $u_B$ ,迭次逆左映射将使除 $u_B$ 外的线段趋于 $s_B$ ,逆左映射的矩阵是

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对偶于原来点映射的这个线映射所具有的线性性质,其实带有普遍意义.顾雁<sup>[6]</sup>指出,对于一个流动所嵌入的流形的切丛中,可以找到一个共轭的矢量场,其支配方程是线性的.

在建立起对偶线映射的上述收敛性质后,我们将不再用线坐标表示直线,而回到常用的截距表示法.有限平面内的任一直线(除平行于 $x$ 或 $y$ 轴外)可以用它的两个截距 $\xi$ 和 $\eta$ 表示为 $x/\xi + y/\eta = 1$ .下文将用 $(\xi, \eta)$ 代表一直线.于是映射 $\varphi$ 的表达形式为

$$r \text{ (右)}: (\xi, \eta) \rightarrow (1 + b\eta, \xi(1 + b\eta)/(b\eta + a\xi)),$$

$$l \text{ (左)}: (\xi, \eta) \rightarrow (1 + b\eta, \xi(1 + b\eta)/(b\eta - a\xi)).$$

这种形式有利于数值计算.相应的逆是

$$r^{-1} \text{ (逆右)}: (\xi, \eta) \rightarrow (\eta(\xi - 1)/(\xi - a\eta), (\xi - 1)/b),$$

$$l^{-1} \text{ (逆左)}: (\xi, \eta) \rightarrow (\eta(\xi - 1)/(\xi + a\eta), (\xi - 1)/b).$$

以下我们把一直线 $v$ 的映象表示为字母 $v$ 后紧跟一个 $R$ 或 $L$ (与习惯相反),例如 $v$ 的右映象是 $vR$ ,而 $vRL$ 是 $vR$ 的左映射,又如 $vL^{-2}R^{-1}L^{-1}$ 代表 $vL^{-1}L^{-1}R^{-1}L^{-1}$ 等等.于是前述结果可归纳为:

$$\text{不动性: } u_A R = u_A, u_A R^{-1} = u_A, u_B L = u_B, u_B L^{-1} = u_B,$$

$$s_A R = s_A, s_A R^{-1} = s_A, s_B L = s_B, s_B L^{-1} = s_B;$$

$$\text{渐近性: } v R^\infty = u_A \quad \forall v \neq s_A, v R^{-\infty} = s_A \quad \forall v \neq u_A,$$

$$v L^\infty = u_B \quad \forall v \neq s_B, v L^{-\infty} = s_B \quad \forall v \neq u_B.$$

如将渐近性关系式中无限符号改成任何正整数且 $v$ 不是相应不动线则等号改为不等号.

### 三、 $A$ 的不稳定流形

数值计算中,通常发现 $A$ 的不稳定流形 $U_A$ 的形状十分类似于映射的吸引集合. 现来寻找 $U_A$ 各线段的确切表达式. 从线段 $u_A$ 开始,先后鞍点右下方移动(见图1). 当它遇到 $x$ 轴时,这一线段将用它自身的左映象代替,即 $u_A$ 与 $u_AL$ 是紧接着的. 线段 $u_A$ 的截距 $(\xi, \eta)$ 是 $(5/4, 25/36)$ ,或者直接写为

$$u_A = \left( \frac{5}{4}, \frac{25}{36} \right)$$

由此求得

$$u_AL = \left( \frac{5}{4}, -\frac{25}{28} \right)$$

同时,当 $u_A$ 右下部遇 $x$ 轴而改为 $u_AL$ 时, $u_A$ 的左上部(它是 $u_A$ 自身的映象)也将相应地改为 $u_AL$ 的右映象,因而 $u_A$ 左上段将与

$$u_ALR = \left( \frac{19}{28}, \frac{95}{188} \right)$$

紧接着. 这一线 $u_ALR$ 向右下方进展(和 $u_A$ 类似),直到遇 $x$ 轴为止. 因为 $u_ALR$ 和 $u_A$ 的连结点在 $y$ 轴之左, $u_ALR$ 有两部分,先左后右. 紧跟 $u_AL$ (它是 $u_A$ 的映象)的线段将是 $u_ALRL = (1111/940, -1111/1252)$ ,接着是 $u_ALR^2 = (1111/940, 1111/1756)$ . 紧跟 $u_ALR$ 的线段是 $u_AL$ 的左映象 $u_AL^2 = (19/28, -19/52)$ . 但这一线段在遇到 $y$ 轴之前就终止了,因为它的紧跟线段是 $u_ALR^2 = (21301/31300, -21301/58540)$ ,而两者的交点在 $y$ 轴之右. 这样,不稳定流形 $U_A$ 的所有线段中不再会有 $u_AL^2$ 的左映象,也不会有 $u_ALRL^2$ 的左映象,而且再往后也不再会有以 $u_AL^3$ 或 $u_ALRL^3$ 为起头字母的记号.

相邻两线段的连结点在 $y$ 轴的右边还是左边,这很大程度决定于 $a, b$ 的具体数值,代表不稳定流形的符号序列对不同 $a$ 和/或 $b$ 值将是不同的. 但从原则上说,可以找出不稳定流形 $U_A$ 的所有线段. 对本文所取 $a=8/5, b=9/25$ 而言,代表 $U_A$ 各线段的符号序列是

$U_A$ : 由 $A$ 的右下方出发,

$$u_A, u_AL, u_ALRL, u_ALR^2, u_AL^2R, u_ALRL^2R, u_ALRL^2,$$

$$u_ALRLRL, u_ALR^3L, u_ALR^4, u_ALR^2LR, u_AL^2R^3,$$

$$u_ALRL^2R^3, u_ALRL^2RLR, u_ALRL^2R^2LR, \dots$$

由 $A$ 的左上方出发,

$$u_A, u_ALR, u_AL^2, u_ALRL^2, u_ALRLR, u_ALR^3, u_ALR^2L,$$

$$u_AL^2RL, u_AL^2R^2, u_ALRL^2R^2, u_ALRL^2RL, u_ALRLR^2L,$$

$$u_ALRLR^3, u_ALRLRLR, \dots$$

需要把所有这些线段的截距 $(\xi, \eta)$ 的数值计算出来,而后根据数值结果确定往后的各项中,哪样的 $R$ 和 $L$ 的组合会出现,哪样的组合则不会出现. 于是 $U_A$ 可用唯一的一个符号序列(由两端无限伸展)表示,每一符号由 $u_A$ 和有限个 $R$ 和 $L$ 组合而成.  $U_A$ 的最早若干线段图示于图1.

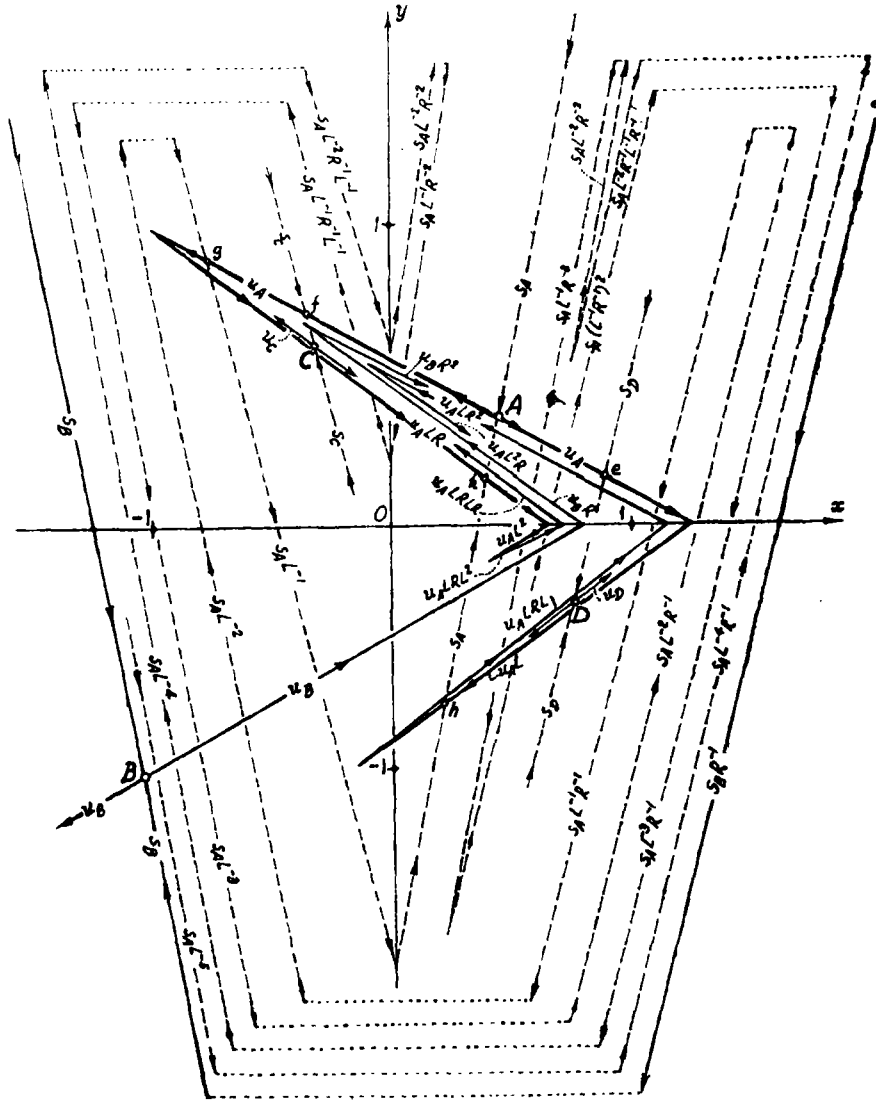


图1 映射  $(x, y) \rightarrow (1 - a|x| + by, x)$  吸引集的结构 ( $a=8/5, b=9/25$ . 记号:  $A, B$ ——不动鞍点.  $C, D$ ——周期二鞍点.  $u, s$ ——不稳定流形和稳定流形的最初直线段.  $R, L$ ——右映象和左映象, 直线  $v$  的左映象用  $vL$  代表.  $R^{-1}, L^{-1}$ ——相应的逆映象.  $h, k, g$ ——同宿点.  $e, f$ ——异宿点.)

#### 四、不动鞍点的其他不变流形

鞍点  $A$  的稳定流形  $S_A$  可用类似方法处理, 它由以下符号序列代表的各线段接连而成 (按图1中与箭头相反的顺序):

$$\begin{aligned}
 S_A: & s_A = (5/14, -25/14), s_A L^{-1}, s_A L^{-2}, s_A L^{-1} R^{-1}, s_A L^{-2} R^{-1}, \\
 & s_A L^{-3}, s_A L^{-1} R^{-1} L^{-1}, s_A L^{-1} R^{-2}, s_A L^{-2} R^{-2}, s_A L^{-2} R^{-1} L^{-1}, \\
 & s_A L^{-4}, s_A L^{-3} R^{-1}, s_A L^{-1} R^{-1} L^{-1} R^{-1}, s_A L^{-1} R^{-3}, s_A L^{-2} R^{-3}, \\
 & s_A L^{-2} R^{-1} L^{-1} R^{-1}, s_A L^{-4} R^{-1}, s_A L^{-5}, s_A L^{-3} R^{-1} L^{-1}, s_A L^{-3} R^{-2}, \\
 & s_A L^{-1} R^{-1} L^{-1} R^{-2}, s_A L^{-1} R^{-1} L^{-1} R^{-1} L^{-1}, s_A L^{-1} R^{-3} L^{-1}, s_A L^{-1} R^{-4}, \dots
 \end{aligned}$$

稳定流形 $S_A$ 的计算比 $U_A$ 的计算稍为简单些, 因为相当的特征值是正的, 不变流形上的点不来回振荡, 符号序列只在一端是无限的.

在上述 $S_A$ 的序列中, 可以看到存在一个子序列 (参见图 1 中的相应位置):

$$s_A, s_A L^{-1}, s_A L^{-2}, s_A L^{-3}, s_A L^{-4}, s_A L^{-5}, \dots$$

这一序列的极限存在, 它等于 (由第二节的渐近性)

$$s_A L^{-\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_A L^{-n} = s_B$$

由此还可推断, 鞍点 $B$ 的整个稳定流形 $S_B$ 是在 $S_A$ 的极限集合中. 事实上,  $S_B$ 只有两条直线 (半直线), 除 $s_B$ 外还有 $s_B$ 的逆右映象 (图1中的实线), 即

$$S_B \text{ (有限序列): } \quad s_B, s_B R^{-1},$$

$$\text{而} \quad s_B R^{-1} = s_A L^{-\infty} R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_A L^{-n} R^{-1}$$

在图 1 中可以看到这一极限过程的几何意义.

鞍点 $B$ 的不稳定流形 $U_B$ 的最初线段是 $u_B = (5/6, -25/54)$ . 这线的左半条在第三象限内, 且一直留在第三象限内, 它的右半条和 $y$ 轴相遇, 因而它既有左映象, 又有右映象, 先左后右. 这两个映象是 $u_B$ 自身和 $u_B R = (5/6, 25/42)$ , 而 $u_B R$ 往后的连接者的推算类似于 $u_A$ 的右下段的情况. 可以求得线段的符号序列 (图 1 中只画了三段):

$$U_B: u_B, u_B R, u_B R^2, u_B R L, u_B R^2 L, u_B R^3, \dots$$

这一符号序列中有一子序列

$$u_B, u_B R, u_B R^2, u_B R^3, \dots,$$

它收敛于 (根据第二节的渐近性)

$$u_B R^\infty = u_A.$$

由此可以推断, 鞍点 $A$ 的不稳定流形 $U_A$ 自身也在 $U_B$ 的极限集中. 事实上,  $U_A$ 中任一线段可表述为一个极限, 如

$$u_A L R L = u_B R^\infty L R L = \lim_{n \rightarrow \infty} u_B R^n L R L$$

以上结果均可用数值结果验核. 就本文所取 $a$ 与 $b$ 而言, 所有截距 (和斜率) 都是有理数.

假若映射的吸引集只包含 $U_A$ , 或者只包含 $U_A$ 和 $U_B$ , 线段的总数是可数无限, 这与通常认为吸引集的测度应大于零的猜测相违背. 这促使我们考虑<sup>[6]</sup>, 在 $U_A$ 和 $U_B$ 的极限集中, 还有其他什么东西.

## 五、周期二鞍点和它们的不稳定流形

回到第三节中 $U_A$ 的符号序列, 我们在其中可找到两个子序列:

$$u_A L, u_A L R L, u_A L (R L)^2 = u_A L R L R L, u_A L (R L)^3, \dots$$

$$\text{和} \quad u_A, u_A (L R), u_A (L R)^2, u_A (L R)^3, \dots$$

这第二个子序列可由迭次映射 $(r l)$ 得到, 其相应的矩阵是 $RL$ . 同样, 与第一个子序列相关的矩阵是 $LR$ . 这两个序列的极限由两个矩阵的特征值所支配.  $RL$ 的特征值是 (按绝对值大小)

$$-\frac{575 + 200\sqrt{7}}{81} \approx -13.6, \quad 1, \quad \frac{575 - 200\sqrt{7}}{81} \approx 0.566$$

$LR$ 的特征值与此相同, 可见上述两子序列分别收敛到第一个特征矢量所代表的直线. 如用

截距表示, 它们是

$$u_A(LR)^\infty = \left( \frac{195 + 105\sqrt{7}}{696}, \frac{25 + 125\sqrt{7}}{696} \right)$$

和

$$u_{A^2}L(LR)^\infty = \left( \frac{235 + 15\sqrt{7}}{232}, -\frac{(4170 - 875\sqrt{7})}{2088} \right)$$

然而这两直线正好就是经过两个周期二点 $C$ 和 $D$ 的不稳定流形 $U_C$ 和 $U_D$ 的最初线段 $u_C$ 和 $u_D$  (见图1). 周期二点的坐标是 $C(-75/232, 175/232)$ 和 $D(175/232, -75/232)$ . 这两个点都是鞍点, 其特征值恰好是矩阵 $RL$ 和 $LR$ 非平凡特征值的倒数. 我们有

$$u_A(LR)^\infty = u_C, \quad u_{A^2}L(LR)^\infty = u_D$$

在迭次映射中,  $C$ 和 $D$ 的不稳定流形 $U_C$ 和 $U_D$ 的全部也可证明在 $U_A$ 的极限集中.

由第二节所说明的渐近性还可说明为什么周期二点不在不稳定流形 $U_A$ 中, 而在它的闭包 $\bar{U}_A$ 中. 就本文所取 $a$ 和 $b$ 而言, 这几乎是显见的, 因为 $U_A$ 所有线段的斜率都是有理数, 而 $U_C$ 或 $U_D$ 所有线段斜率都是无理数.

点映射和线映射之间的对偶关系为寻求周期点提供了一种计算方法. 对于不稳定的不动点, 采用通常的迭代程式不易计算得到. 但是对偶的线映射在迭次运算中能给出收敛的特征矢量. 不妨利用 $RL$ 或 $LR$ 的迭代确定不稳定流形线段 $u_C$ 和 $u_D$ , 还可利用 $(RL)^{-1}$ 和 $(LR)^{-1}$ 的迭代求得稳定线段 $s_C$ 和 $s_D$ . 于是由 $u_C$ 和 $s_C$ 相交求得 $C$ , 由 $u_D$ 和 $s_D$ 相交求得 $D$ .

## 六、其他周期鞍点

分段线性Henon映射 $\varphi$ 在 $a=8/5$ ,  $b=9/25$ 情况中没有周期三的点. 周期三存在的一个必要条件是 $a^2 - ab - b^2 - a - b - 1 > 0$ . 它现在不成立.

然而我们仍能对矩阵 $RRL$ 和 $LLR$ 作特征值计算, 寻出“虚”的周期三点不稳定流形线段. 利用第五节末的对偶性质找到这些周期三点的位置, 就发现它们落在所用映射的适用域之外; 例如,  $x$ 值是负的, 却被用以求右映象. 这些“虚”不动点和“虚”不变线段(它们都可以实际计算得到)的性质有待进一步探讨.

我们猜测, 如对某些 $a$ 和 $b$ 周期三鞍点存在, 则它们的不稳定流形也包含于 $U_A$ 的极限集中. 具体说来, 将有两组周期三不动点, 其不稳定流形的最初线段分别是

$$\text{第一组 } \cdots (LLR)^\infty, \cdots (LRL)^\infty, \cdots (RLL)^\infty;$$

$$\text{第二组 } \cdots (RRL)^\infty, \cdots (RLR)^\infty, \cdots (LRR)^\infty.$$

如周期三鞍点不存在, 则在 $U_A$ 的符号序列中不会出现相当的线段.

如果映射有周期四鞍点, 则相应的符号序列中的循环部分将是

$$\text{第一组, } (RRLL), (RLLR), (LLRR), (LRRL);$$

$$\text{第二组, } (RLLL), (LLL R), (LLRL), (LRLL);$$

$$\text{第三组 } (LRRR), (RRRL), (RRLR), (RLRR).$$

照此推理, 周期鞍点的不稳定流形总“数目”最多将是 $2^N$ 的量级, 其中 $N$ 是可数无限. 因而, 不稳定流形全体的总测度可能不是零.

## 七、吸引集, 吸引盆和同宿点

吸引集中, 含有所有不稳定流形(不动鞍点以及周期鞍点的不稳定流形)的并. 周期鞍点不稳定流形在 $U_A$ 的极限集内, 而 $U_A$ 本身又在 $U_B$ 的极限集内, 因而可以说, 吸引集是 $U_B$ 的闭包 $\bar{U}_B$ (如需要的话, 应除去 $u_B$ 的左半段, 或者包括进 $S_B$ ). 这样的理解与当前流行的关于奇怪吸引子的定义有些出入.

看来稳定流形 $S_A$ 的闭包 $\bar{S}_A$ 是以 $s_B$ 和其逆右映象 $s_B R^{-1}$ 为边界的区域, 它也就是吸引盆. 可以直觉地证实如下. 作一个四边形(图1中未画出), 其顶点依次为

$$G(-1.1, +1.4), H(+1.32, +0.1), I(+1.1, -0.7), J(-0.5, -1.2).$$

这四边形的映象(一个六边形)将完全落在其自身的内部. 映射是压缩性的(其Jacobi行列式为 $\pm b$ 而 $b < 1$ ), 因而吸引集是存在的, 而且在吸引盆内不可能有什么“漏缝”, 至少在四边形之内是如此. 所以我们认为吸引盆是 $S_A$ 的闭包 $\bar{S}_A$ , 其边界是 $S_B$ .

每一个同宿点可以用通过它的那两段不变流形作标记. 例如图1中的 $h$ 点可标记为 $h = s_A \times u_A L$ . 由此可以“计算”出 $h$ 的映象和逆映象,  $\varphi(h) = r(h) = s_A R \times u_A L R = s_A \times u_A L R = k$ 点,  $\varphi^{-1}(h) = l^{-1}(h) = s_A L^{-1} \times u_A L L^{-1} = s_A^{-1} \times u_A = g$ 点. 容易在图1中识别这些同宿点. 它们的坐标(供参考)是 $h(5/24, -125/68)$ ,  $k(67/168, 5/24)$ 和 $g(-125/168, 1675/1512)$ .

一个周期鞍点(不动点当作周期一)的稳定流形和另一个不同周期数的周期鞍点的不稳定流形的相交点是一类新的异宿点. 例如图1中的 $e$ 点和 $f$ 点,  $e = s_D \times u_A$ ,  $f = s_C \times u_A$ . 两者之间有关系 $\varphi^{-1}f = e$ , 因为 $s_C R^{-1} = s_A L^{-1}(R^{-1}L^{-1})^\infty R^{-1} = s_A(L^{-1}R^{-1})^\infty = s_D$ 和 $u_A R^{-1} = u_A$ . 这类异宿点的性质有待研究.

## 八、结 语

本例中的映射只有两段(分两片), 因而涉及两个符号( $L, R$ )的符号动力学. 如果映射是 $n$ 片的, 它也许将涉及 $n$ 个符号的符号动力学. 当 $n$ 变为无限且映射变成光滑映射时将会发生什么结果呢? 分段线性拓扑学能否用来帮助这方面的理解? 我们希望从数学工作者那里得到教益.

致谢 本文得到李继彬同志的审阅和钱敏同志的支持, 谨致感谢.

## 参 考 文 献

- [1] Lozi, R., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *J. Physics (Paris)* **39**, C5 (1978), 9—10.
- [2] Tél, T., On the construction of stable and unstable manifolds of 2-dimensional invertible maps, *Z. Phys.*, **B49** (1982), 157—160.
- [3] Tél, T., On the construction of invariant curves of period-2 points in 2-dimensional maps, *Phys. Lett.*, **94A**, 8 (1983), 334—336.
- [4] Misiurewicz, M., Strange attractors for the Lozi mappings, *Nonlinear Dynamics*, ed. R. G. Helleman, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **357** (1980), 348—358.



[5] 顾雁, 私人通信.

[6] 刘曾荣、朱照宣、周士刚、刘尔宁, Smale 马蹄与奇怪吸引子, 科学通报, 32, 8 (1987), 573—576.

## Structure of the Attracting Set of a Piecewise Linear Hénon Mapping

Zhu Zhao-xuan

Liu Zeng-rong

(Peking University, Beijing)

(Anhui University, Hefei)

### Abstract

Detailed structure of the attracting set of the piecewise linear Hénon mapping  $(x, y) \rightarrow (1 - a|x| + by, x)$  with  $a = 8/5$  and  $b = 9/25$  is described in this paper using the method of dual line mapping. Let  $A$  and  $B$  denote the fixed saddles in the first quadrant, and in the third quadrant, respectively. It is claimed that (1) the attracting set is the closure of the unstable manifold of saddle  $B$ , and (2) the basin of attraction is the closure of the stable manifold of  $A$ , bounded by the stable manifold of  $B$ , which is in the limiting set of the stable manifold of  $A$ . Relations of the manifolds of the periodic saddles with the manifolds of the fixed points are given. Symbolic dynamics notations are adopted which renders possible the study of the dynamical behavior of every piece of the manifolds and of every homoclinic or heteroclinic point.