应用数学和力学，第9卷第9期(1988年9月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

四边简支正交异性板双向压屈模态的确定及其临界载荷的显式表达式

李　曙　光

(南京航空学院，1987年1月15日收到)

摘　要

Libove曾经证明[1]，四边简支的正交异性板在双向压力下的屈曲模态沿x方向和y方向的半波数m和n这两者中必有一者为1．本文将给出$m=1$或$n=1$的条件，并确定$n=1$时m的取值，及$m=1$时n的取值．从而完全确定了四边简支正交异性板在双向压力下的屈曲模态，并给出了临界载荷的显式表达式．

一、引　言

双向受压的正交异性板的屈曲方程为

$$D_1 w_{,xxxx}+2D_3 w_{,xxyy}+D_2 w_{,yyyy}+N_x w_{,xx}+N_y w_{,yy}=0 \tag{1.1}$$

其中，D_1，D_2和D_3为正交异性板的弯曲刚度，N_x，N_y为面内压力（以压为正）．对于四边简支的边界条件，位移模式可设为

$$w=w_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1.2}$$

其中，a和b分别为板沿x方向和y方向的长度，m和n则分别为位移模式沿这两个方向的半波数．代入方程(1.1)，由非零解条件可得

$$\lambda_x=2n^2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{m^2}{k^2}+n^4\frac{k^2}{m^2}\right)-\frac{n^2}{m^2}k^2\beta\lambda_y \tag{1.3}$$

其中　$\lambda_x=N_x b^2/\pi^2 D_3$，　$\lambda_y=N_y b^2/\pi^2 D_3$

$\alpha=D_3/\sqrt{D_1D_2}$，　$\beta=\sqrt{D_1/D_2}$，　$k=b^{-1}a\cdot\sqrt[4]{D_2D_1^{-1}}$

对于给定的λ_y，屈曲模态由使λ_x最小的m和n确定，这个最小的λ_x即为屈曲的临界载荷．显然，由方程(1.3)来给出临界载荷尚非显式，因为m和n的取值在一定意义下还依赖于λ_x（m和n应使λ_x最小）．因此，实际使用时甚不方便．

关于m和n的取值，Timoshenko对于各向同性板的情况[2]，曾作过讨论，但是缺乏严格的证明，而只是籍一简单例子的几何图线为据，如：m和n必有一者取1；与一定的屈曲模态相应，λ_y的上下界的确定，等．Libove对于正交异性板的情况[1]，证明了，与任意不等于1的m和n相应的λ_x，不会同时小于与同一m但$n=1$相应的λ_x以及与同一n但$m=1$相应的λ_x，因

* 卢文达推荐．

此，屈曲模态的 m 和 n 至少有一者为1。退化到各向同性的情况，Libove 的结论证实了 Timoshenko 的做法的一部分。

但是，一般地，对于正交异性板来说，什么条件下$n=1$，什么条件下$m=1$，当$n=1$时，怎样确定m，当 $m=1$时，又怎样确定 n。这些问题目前似乎还没有明确而又严格的结论，本文将对之一一作答，并在完全确定屈曲模态的基础上，进而给出临界载荷的显式表达式，使得根据板的几何，物理及载荷条件，便可直接确定屈曲模态和临界载荷，而不再需要去分别计算并比较$m=1$，$n=1$，2，3，…和$n=1$，$m=2,3,$…相应的各个λ_x的值以最终确定屈曲模态和临界载荷。

下面，我们将通过比较当$n=1$时，与不同的m相应的λ_x的表达式以及当$m=1$时，与不同的n相应的λ_x的表达式[3]，来得出明确而又严格的结论。当然，这里的讨论将以Libove 的结论，即m和n至少有一者取1作为前提。

二、x方向半波数m的确定

本节的讨论主要是为下一节的讨论并进而得出结论作一定的准备。

考虑y方向的半波数$n=1$的情况。我们比较与某一m相应的λ_x和与任一$r\,(r\neq m)$相应的λ_x，且分别记为 λ_x^{m1}和λ_x^{r1}，

$$\lambda_x^{m1}=2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{m^2}{k^2}+\frac{k^2}{m^2}\right)-\frac{k^2}{m^2}\beta\lambda_y \tag{2.1}$$

$$\lambda_x^{r1}=2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{r^2}{k^2}+\frac{k^2}{r^2}\right)-\frac{k^2}{r^2}\beta\lambda_y \tag{2.2}$$

如果在x方向所有可能的半波数中，m使λ_x最小，则

$$\lambda_x^{r1}-\lambda_x^{m1}=\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{k^2}{m^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\beta\lambda_y-\frac{r^2m^2}{\alpha k^4}\right)\geqslant 0 \tag{2.3}$$

下面，我们分两种情况分别来讨论上述不等式。

1) $$\lambda_y\geqslant 1/\alpha\beta \tag{2.4}$$

这时，不等式(2.3)中的第二个因子恒小于0，欲使不等式(2.3)成立，只有$r>m$，也即，只要$r>m$，便有 $\lambda_x^{r1}\geqslant\lambda_x^{m1}$。因此，使$\lambda_x$最小的$m$只能为1。

换言之，当$\lambda_y\geqslant 1/\alpha\beta$时，若$n=1$，则$m=1$。

2) $$\lambda_y<1/\alpha\beta \tag{2.5}$$

这时，由不等式(2.3)可得以下不等式组

$$\begin{cases} r<m \\ k^2\geqslant rm/\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y} \end{cases} \tag{2.6}$$

和

$$\begin{cases} r>m \\ k^2\leqslant rm/\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y} \end{cases} \tag{2.7}$$

对于任一小于 m 的 r，不等式组(2.6)第二式的右端项均给出 k^2 的下界，显然，k^2 的最大下界当$r=m-1$时取得，因此，

$$k^2\geqslant(m-1)m/\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y} \tag{2.8}$$

同理，由不等式组(2.7)，可得k^2的最小上界

$$k^2 \leqslant (m+1)m/\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y} \tag{2.9}$$

不等式(2.8)和(2.9)可以改写为（见附录）

$$(\sqrt{1+4k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}}-1)/2 \leqslant m \leqslant (\sqrt{1+4k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}}+1)/2 \tag{2.10}$$

显然，m的取值落在正半轴上一长度为1的闭区间内，其中存在至少一个至多两个自然数。若仅有一个，它即为使λ_x最小的m，若有两个，这时上式左右两项均恰为整数且相邻，这两个整数将同时使λ_x最小，因而相应着同一个λ_x，因此，其中任何一个都可以作为欲求的m。

一般地，如果我们并不关心与同一λ_x相应的m的个数（有时，是要关心的，如后屈曲分析时），而只关心λ_x的取值的话，m可显式写出

$$m=\mathrm{Int}\left[\frac{1}{2}\ (\sqrt{1+4k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}}+1)\right] \tag{2.11}$$

这里，Int 表示取整函数，如：Int(1.8)＝1。

可见，当$\lambda_y<1/\alpha\beta$时，若$n=1$，则m可以由不等式(2.10)确定，或直接由方程(2.11)给出。

三、y方向半波数n的确定及屈曲模态的确定

我们再假设x方向的半波数$m=1$，并比较与某一n相应的λ_x和与任一不等于n的s相应的λ_x，分别记它们为λ_x^{1n}和λ_x^{1s}

$$\lambda_x^{1n}=2n^2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{k^2}+n^4k^2\right)-n^2k^2\beta\lambda_y \tag{3.1}$$

$$\lambda_x^{1s}=2s^2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{k^2}+s^4k^2\right)-s^2k^2\beta\lambda_y \tag{3.2}$$

如果在y方向所有可能的半波数中，n使λ_x最小，则

$$\lambda_x^{1s}-\lambda_x^{1n}=(s^2-n^2)\left[\ 2+\frac{1}{\alpha}(s^2+n^2)k^2-k^2\beta\lambda_y\right]\geqslant 0 \tag{3.3}$$

如前，我们也分两种情况来讨论这一不等式。

1) $$\lambda_y \leqslant \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta k^2} \tag{3.4}$$

这时，不等式(3.3)的后一因子恒大于0，于是，不等式(3.3)仅当$s>n$时才成立，即，只要$s>n$，便有$\lambda_x^{1s}\geqslant\lambda_x^{1n}$，故使$\lambda_x$最小的$n$只能为1。换言之，当$\lambda_y$满足不等式(3.4)时，若$m=1$，则$n=1$。

特别地，如果λ_y满足不等式(2.5)时，联系上一节的情况2)，注意到m和n至少有一者为1，可知m和n的取值无非有以下两种可能

i） 若$m=1$，则$n=1$（本节的结论）；

ii） 若$n=1$，则m由不等式(2.10)或方程(2.11)确定（上节的结论）。

从上一节的比较已经知道，与i)相应的λ_x不会小于与ii)相应的λ_x，实际上i)是ii)在一定条件下的一种特殊情况。因此，一般地，屈曲模态将由ii)给出，即，当$\lambda_y<1/\alpha\beta$时，屈曲模态的$n=1$，m则由不等式(2.10)确定，或直接由方程(2.11)给出。

如果λ_y满足

$$\frac{1}{\alpha\beta}\leqslant\lambda_y\leqslant\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta k^2} \tag{3.5}$$

联系上一节的情况1)，不难得，屈曲模态的$m=n=1$。

2)
$$\lambda_y > \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{2}{\beta k^2} \tag{3.6}$$

类似上面的分析，由上一节的情况1)，我们知道，x方向的半波数m只能为1，只要能确定使λ_x最小的y方向的半波数n，便确定了屈曲模态，相应的λ_x也即为临界载荷。

从不等式(3.3)可得

$$\begin{cases} s>n \\ \dfrac{1}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{2}\left[\beta\lambda_y - \dfrac{1}{\alpha}(s^2+n^2)\right] \end{cases} \tag{3.7}$$

和
$$\begin{cases} s<n \\ \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left[\beta\lambda_y - \dfrac{1}{\alpha}(s^2+n^2)\right] \end{cases} \tag{3.8}$$

同样，通过研究$1/k^2$的最大下界和最小上界，可得到确定n的不等式

$$(n-1)^2+n^2 \leqslant \alpha\left(\beta\lambda_y - \frac{2}{k^2}\right) \leqslant (n+1)^2+n^2 \tag{3.9}$$

改写该不等式（见附录），可得

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{-1+2\alpha\left(\beta\lambda_y - \frac{2}{k^2}\right)} - 1\right) \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1+2\alpha\left(\beta\lambda_y - \frac{2}{k^2}\right)} + 1\right) \tag{3.10}$$

与上一节关于m的讨论完全类似，一般地，n也可显式写出

$$n = \mathrm{Int}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{-1+2\alpha\left(\beta\lambda_y - \frac{2}{k^2}\right)} + 1\right)\right] \tag{3.11}$$

因此，当λ_y满足不等式(3.6)时，屈曲模态的$m=1$，n则由不等式(3.10)或方程(3.11)确定。

四、结　语

综上所述，我们已经证明，四边简支的正交异性板在双向压力下的屈曲模态可由问题的几何条件（为参数k所反映）、物理条件（α，β等参数）及载荷条件（λ_y）完全确定，半波数m和n甚至可以显式给出，这里归纳如下：

i）$\lambda_y < \dfrac{1}{\alpha\beta}$，则 $n=1$，$m=\mathrm{Int}\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+4k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}}+1\right)\right]$

或者由不等式(2.10)确定m，如果要考虑屈曲模态的个数的话；

ii）$\dfrac{1}{\alpha\beta} \leqslant \lambda_y \leqslant \dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{2}{\beta k^2}$，则　$m=n=1$；

iii）$\lambda_y > \dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{2}{\beta k^2}$，则 $m=1$，$n=\mathrm{Int}\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{-1+2\alpha\left(\beta\lambda_y - \dfrac{2}{k^2}\right)}+1\right)\right]$

或者由不等式(3.10)确定n，如果要考虑屈曲模态的个数的话。

鉴于上述结论，临界载荷可以有如下的显式表达式

$$\lambda_x^{cr} = \begin{cases} 2+\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{M^2}{k^2}+\dfrac{k^2}{M^2}\right) - \dfrac{k^2}{M^2}\beta\lambda_y & \left(\lambda_y < \dfrac{1}{\alpha\beta}\right) \\ 2+\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{k^2}+k^2\right) - k^2\beta\lambda_y & \left(\dfrac{1}{\alpha\beta} \leqslant \lambda_y \leqslant \dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{\beta k^2}\right) \\ 2N^2+\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{k^2}+N^4k^2\right) - N^2k^2\beta\lambda_y & \left(\lambda_y > \dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{\beta k^2}\right) \end{cases}$$

应用数学赵

其中 $M=\mathrm{Int}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}}+1\right)\right]$，$N=\mathrm{Int}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{-1+2\alpha\left(\beta\lambda_y-\frac{2}{k^2}\right)}+1\right)\right]$

上述临界载荷的显式，在实际使用时将是十分方便的。

最后，应该指出，上面的结论是在λ_y给定的条件下得出的，不难证明，比例加载的情况仍不违反上述结论。然而，由于比例加载时λ_y事先不能确定，故尚不足以直接由上述结论完全确定屈曲模态和临界载荷，因此，进一步的研究仍还有必要。

附　录

不等式(2.10)和(3.10)的得出

1. 不等式(2.10)的得出

由不等式(2.8)和(2.9)，可得确定m的不等式组

$$\begin{cases} m^2-m-c\leqslant 0 \\ m^2+m-c\geqslant 0 \end{cases} \tag{A1}$$

其中 $c=k^2\sqrt{1-\alpha\beta\lambda_y}>0\left(\text{因为}\lambda_y<1/\alpha\beta\right)$. 不难改写为

$$\begin{cases} \left[m-\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}+1)\right]\left[m-\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}+1)\right]\leqslant 0 \\ \left[m-\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}-1)\right]\left[m-\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1)\right]\geqslant 0 \end{cases} \tag{A2}$$

不等式组(A2)的第一式当

$$\begin{cases} m\leqslant\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}+1) \\ m\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}+1) \end{cases} \tag{A3}$$

或

$$\begin{cases} m\geqslant\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}+1) \\ m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}+1) \end{cases} \tag{A4}$$

时成立。不等式组（A3）显然无解，而由（A4）可得

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}+1)\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}+1) \tag{A5}$$

不等式组(A2)的第二式当

$$\begin{cases} m\leqslant\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}-1) \\ m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1) \end{cases} \tag{A6}$$

或

$$\begin{cases} m\geqslant\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}-1) \\ m\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1) \end{cases} \tag{A7}$$

时成立。不等式组(A6)的解由其第一式给出，显然，它要求$m<0$，因而不是我们所关心的。不等式组(A7)的解则由第二式给出，即

$$m\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1) \tag{A8}$$

联列(A5)和(A8)，注意到

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1)>\frac{1}{2}(-\sqrt{1+4c}+1) \tag{A9}$$

可得

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}-1)\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{1+4c}+1) \tag{A10}$$

此即不等式(2.10)。

2. 不等式(3.10)的得出

由不等式(3.9)，可得确定n的不等式组

$$\begin{cases}2n^2-2n-(d-1)\leqslant 0\\ 2n^2+2n-(d-1)\geqslant 0\end{cases} \tag{A11}$$

其中 $d=\alpha\left(\beta\lambda_y-\frac{2}{k^2}\right)>1$ $\left(因为\lambda_y>\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta k^2}\right)$。改写(A10)为

$$\begin{cases}\left[n-\frac{1}{2}(-\sqrt{2d-1}+1)\right]\left[n-\frac{1}{2}(\sqrt{2d-1}+1)\right]\leqslant 0\\ \left[n-\frac{1}{2}(-\sqrt{2d-1}-1)\right]\left[n-\frac{1}{2}(\sqrt{2d-1}-1)\right]\geqslant 0\end{cases} \tag{A12}$$

类似上面关于m的讨论，不难得不等式(3.10)。

参 考 文 献

[1] Libove, C., Buckling pattern of biaxially compressed simply supported orthotropic rectangular plates, *J. Composite Materials*, 17 (1983), 45—48.

[2] S. P. 铁摩辛柯, J. M. 盖莱, 《弹性稳定理论》(第二版)，张福范译，科学出版社 (1965) §9.3节。

[3] 李曙光，扁曲板轴压屈曲问题的进一步研究，航空学报，工程增刊，试刊第四期 (1986.12)。

Determination of Buckling Mode and Explicit Expression of Critical Load for Simply Supported Rectangular Orthotropic Plates under Biaxial Compression

Li Shu-guang

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*)

Abstract

C. Libove[1] has proved that at least one of the halfwave numbers m and n in x and y directions of the buckling mode will be 1 for simply supported rectangular orthotropic plates under biaxial compression. This paper will give the physical conditions of $m=1$ or $n=1$, and at the same time, show the way of finding appropriate value of m when $n=1$ and that of n when $m=1$ and even lead to explicit expression for m and n. Thus, the buckling mode may be determined completely and the expression of critical load be formulated explicitly.