

复合荷载下波纹圆板的非线性分析*

刘人怀

(上海工业大学, 1987年5月28日收到)

摘要

本文按照各向同性和正交各向异性圆板的大挠度理论, 研究了具有光滑中心的波纹圆板在均布和中心集中荷载联合作用下的非线性弯曲问题. 应用修正迭代法, 我们得到了夹紧固定和滑动固定两种边界条件下十分精确的解析解.

一、引言

众所周知, 在精密仪器里广泛使用着一种名叫波纹圆板的弹性元件. 因此, 研究波纹圆板的大挠度问题在理论和实践上都有着极其重要的意义. 因为这一问题牵涉到此种板的复杂形状和非线性微分方程组, 所以问题十分复杂. 于是, 大家通常研究一些比较简单的问题.

最初, Панов^[1], Феодосьев^[2,3]以及后来的 Аксельрад^[4]和陈山林^[5]等都从壳体的大挠度理论出发, 讨论了具有光滑中心的波纹圆板. 然而这板的理论分析是那样困难, 以致于他们仅讨论了正弦波纹和均布荷载一种情形, 而且结果也不精确. 因此, 研究另一种更有效的方法是十分必要的.

为此, Андреева^[6,8], 赤坂隆^[7], Haringx^[9,10]和Бурмистров^[11]等进行了新的处理, 将波纹圆板视为各向异性圆板. 这样, 便对具有各种形状的深、浅波纹的波纹圆板都能适用. 在这种情况下, 他们使用各向异性圆板的大挠度理论讨论了两个比较简单的问题, 即承受均布荷载的具有全波纹的波纹圆板以及承受均布荷载或中心集中荷载的具有刚性中心的波纹环形板. 然而, 他们的结果仍然不能令人满意. 最近, 刘人怀^[12,13]应用修正迭代法成功地重新考虑了这些板, 得到了十分精确的解析解. 这一方法是在1965年研究圆底扁薄球壳的非线性稳定问题中, 首先由叶开沅和刘人怀^[14-16]提出来的. 它结合了钱伟长教授的摄动法^[17]和通常的逐次逼近法的优点, 对求解板壳非线性问题十分有效.

此外, 刘人怀还讨论了几个更困难的情况: 均布荷载下具有光滑中心的波纹圆板^[18], 中心集中荷载下具有光滑中心的波纹圆板^[19], 均布荷载下具有光滑中心和平面边缘区域的波纹圆板^[20], 均布荷载下具有刚性中心的波纹环形板^[21]以及均布荷载和中心集中荷载共同作用下的具有刚性中心的波纹环形板^[22].

本文是作者上述工作的继续. 我们研究了一个有实际意义的问题, 即具有光滑中心的波纹圆板在均布和中心集中荷载联合作用下的非线性弯曲. 显然, 此板的大挠度理论分析将比

* 中国科学院科学基金资助的课题.

我们以往所处理过的问题都更加困难。产生分析上的困难的原因是此板带有一个光滑中心并承受了复合荷载。如同以前一样，我们使用修正迭代法克服了这些困难，获得了可供精密仪器弹性元件设计时所需要的公式。

二、方 程

现在我们考虑图 1 所示的具有光滑中心的波纹圆板。这里， R 和 R_1 分别是边缘和光滑中心的半径， h 是厚度， L 是波长， H 是波幅， r 是径向坐标， q 是均布荷载， p 是集中荷载。

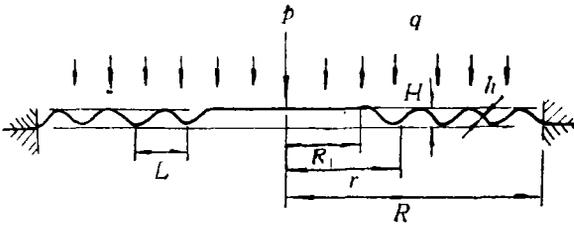


图 1

这一波纹圆板由光滑中心和环形波纹区域所组成。我们将用角标 a 和 b 分别表示光滑中心和环形波纹区域的量。

在研究时，我们假定波纹圆板的波纹分布是均匀而致密的。于是，我们可将此板的波纹环形区域视为一个各向异性的环形板。应用这种分析方法，按照各向同性和各向异性圆板的大挠度理

论^[6,12,13,23]，我们得到这个问题的基本方程如下：

当 $0 \leq r \leq R_1$ 时，

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^3 w_a}{dr^3} + \frac{d^2 w_a}{dr^2} - \frac{dw_a}{dr} \left(\frac{1}{D_a} r N_{r,a} + \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{2D_a} \left(qr^2 + \frac{p}{\pi} \right) \\ r \frac{d^2}{dr^2} (r N_{r,a}) + \frac{d}{dr} (r N_{r,a}) - N_{r,a} + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw_a}{dr} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

当 $R_1 \leq r \leq R$ 时，

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^3 w_b}{dr^3} + \frac{d^2 w_b}{dr^2} - k_t \frac{dw_b}{dr} \left(\frac{1}{D_b} r N_{r,b} + \frac{k'_t}{r} \right) &= \frac{k_t}{2D_b} \left(qr^2 + \frac{p}{\pi} \right) \\ r \frac{d^2}{dr^2} (r N_{r,b}) + \frac{d}{dr} (r N_{r,b}) - k_r k_t N_{r,b} + \frac{1}{2} E h k_t \left(\frac{dw_b}{dr} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里， w 是挠度， N_r 是径向薄膜力， θ 是径向截面的切线倾斜角， E 是杨氏模量， ν 是泊松比， D 是抗弯刚度，

$$D_a = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2/k_t k'_t)}$$

k_r 、 k_t 和 k'_t 分别是径向和周向刚度参数，

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \frac{12}{h^2 L} \int_0^L \frac{z^2}{\cos \theta} dx + \frac{1}{L} \int_0^L \cos \theta dx \\ k_t &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\cos \theta} dx \\ k'_t &= \frac{12}{h^2 L} \int_0^L \frac{z^2}{\cos^3 \theta} dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\cos^3 \theta} dx \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

特别，对于正弦波纹(图2(a))，

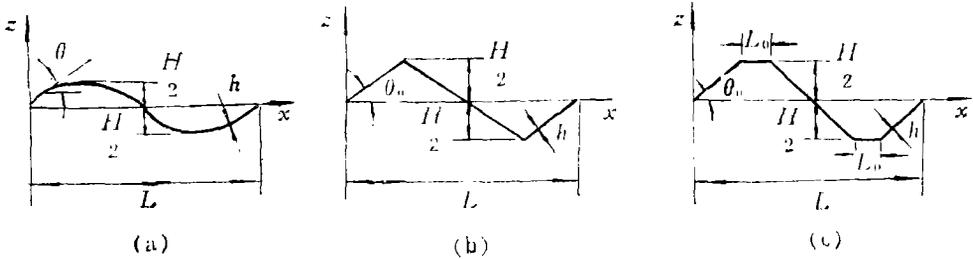
$$\left. \begin{aligned} k_r &\doteq 1 + \frac{3H^2}{2h^2} + \frac{\pi^2 H^2}{4L^2} \left(\frac{3H^2}{4h^2} - 1 \right) \\ k_t &\doteq 1 + \frac{\pi^2 H^2}{4L^2} \\ k'_t &\doteq 1 + \frac{3H^2}{2h^2} + \frac{3\pi^2 H^2}{4L^2} \left(\frac{H^2}{4h^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

对于锯齿形波纹(图2(b)),

$$k_r = \frac{H^2}{h^2 \cos \theta_0} + \cos \theta_0, \quad k_t = \frac{1}{\cos \theta_0}, \quad k'_t = \frac{H^2}{h^2 \cos \theta_0} + \frac{1}{\cos^3 \theta_0} \quad (2.5)$$

对于梯形波纹(图2(c)),

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \frac{H^2}{Lh^2} \left(\frac{L-2L_0}{\cos \theta_0} + 6L_0 \right) + \left(1 - \frac{2L_0}{L} \right) \cos \theta_0 + \frac{2L_0}{L} \\ k_t &= \frac{1}{L} \left(\frac{L-2L_0}{\cos \theta_0} + 2L_0 \right) \\ k'_t &= \frac{H^2}{Lh^2} \left(\frac{L-2L_0}{\cos \theta_0} + 6L_0 \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{L-2L_0}{\cos^3 \theta_0} + 2L_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$



(a)正弦波纹 (b)锯齿形波纹 (c)梯形波纹

图2 波纹圆板的径向截面上的一个波纹

我们讨论下面两种常用的边界条件:

(1) 夹紧固定边界

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } r=0 \text{ 时, } \frac{dw_a}{dr} = 0, N_{r,a} \text{ 有限} \\ \text{当 } r=R \text{ 时, } w_b = 0, \frac{dw_b}{dr} = 0, u_b = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

(2) 滑动固定边界

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } r=0 \text{ 时, } \frac{dw_a}{dr} = 0, N_{r,a} \text{ 有限} \\ \text{当 } r=R \text{ 时, } w_b = 0, \frac{dw_b}{dr} = 0, N_{r,b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中 u 是径向位移,

$$u_a = \frac{r}{Eh} \left[\frac{d}{dr} (rN_{r,a}) - \nu N_{r,a} \right], \quad u_b = \frac{r}{k_t E h} \left[\frac{d}{dr} (rN_{r,b}) - \nu N_{r,b} \right] \quad (2.9)$$

此外, 在两个区域的连接处, 尚需有下面的连续条件:

$$\text{当 } r=R_1 \text{ 时, } w_a=w_b, \quad \frac{dw_a}{dr} = \frac{dw_b}{dr}, \quad M_{r,a}=M_{r,b}, \quad N_{r,a}=N_{r,b}, \quad u_a=u_b \quad (2.10)$$

其中 M_r 是径向弯矩,

$$M_{r,a} = -D_a \left(\frac{d^2 w_a}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_a}{dr} \right), \quad M_{r,b} = -\frac{D_b}{k_t} \left(\frac{d^2 w_b}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_b}{dr} \right) \quad (2.11)$$

为使解更便于应用, 我们引进下列无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{r}{R}, \quad y_1 = \frac{R_1}{R}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \phi = \frac{dW}{dy}, \quad S_a = \frac{Rr}{D_a} N_{r,a}, \quad S_b = \frac{k_t Rr}{D_b} N_{r,b} \\ Q = \frac{R^4}{2D_a h} q, \quad P = \frac{R^2}{2\pi h D_a} p, \quad \beta_0 = 6(1-\nu^2), \quad \beta_1^2 = k_t k'_t, \quad \beta_2^2 = k_r k_t \\ \beta_3 = \frac{D_b}{D_a k_t}, \quad \beta_4 = \frac{\beta_3}{k_t}, \quad \beta_5 = \nu(1-\beta_3), \quad \beta_6 = \nu \left(1 - \frac{1}{k_t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

应用这些量, 可把基本方程(2.1)和(2.2)化为无量纲形式:

当 $0 \leq y \leq y_1$ 时,

$$L_0(y\phi_a) = S_a \phi_a + y^2 Q + P, \quad L_0(yS_a) = -\beta_0 \phi_a^2 \quad (2.13a, b)$$

当 $y_1 \leq y \leq 1$ 时,

$$L_1(y^{\beta_1} \phi_b) = S_b \phi_b + \frac{1}{\beta_3} (y^2 Q + P), \quad L_2(y^{\beta_2} S_b) = -\frac{\beta_0}{\beta_4} \phi_b^2 \quad (2.14a, b)$$

类似地, 可把边界条件(2.7)和(2.8)化为

(1) 夹紧固定边界

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } y=0 \text{ 时, } \phi_a=0, \quad S_a=0 \\ \text{当 } y=1 \text{ 时, } W_b=0, \quad \phi_b=0, \quad \frac{dS_b}{dy} - \nu \frac{S_b}{y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

(2) 滑动固定边界

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } y=0 \text{ 时, } \phi_a=0, \quad S_a=0 \\ \text{当 } y=1 \text{ 时, } W_b=0, \quad \phi_b=0, \quad S_b=0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

而连续条件(2.10)成为

当 $y=y_1$ 时,

$$\left. \begin{aligned} W_a=W_b, \quad \phi_a=\phi_b, \quad \frac{d\phi_a}{dy} + \beta_5 \frac{\phi_a}{y} = \beta_3 \frac{d\phi_b}{dy} \\ S_a = \beta_3 S_b, \quad \frac{dS_a}{dy} - \beta_6 \frac{S_a}{y} = \beta_4 \frac{dS_b}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L_0(\quad) = y \frac{d}{dy} \frac{1}{y} \frac{d}{dy} (\quad), \quad L_1(\quad) = y^{\beta_1} \frac{d}{dy} y^{-(2\beta_1-1)} \frac{d}{dy} (\quad) \\ L_2(\quad) = y^{\beta_2} \frac{d}{dy} y^{-(2\beta_2-1)} \frac{d}{dy} (\quad) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

为了便于研究, 我们引入单荷载参数 G , 于是便有

$$Q = \mu_1 G, \quad P = \mu_2 G \quad (2.19)$$

其中 μ_1 和 μ_2 是常数, 在这种情况下, 方程(2.13a)和(2.14a)化为

$$L_0(y\phi_a) = S_a \phi_a + G(\mu_1 y^2 + \mu_2) \quad (2.20)$$

$$L_1(y^{\beta_1}\phi_b) = S_b\phi_b + \frac{G}{\beta_3}(\mu_1y^2 + \mu_2) \quad (2.21)$$

现在, 我们的问题便在于定出满足控制方程 (2.20), (2.13b), (2.21) 和 (2.14b), 边界条件 (2.15) 或 (2.16) 以及连续条件 (2.17) 的 S 和 ϕ .

三、解 答

首先, 我们讨论关于在均布及中心集中荷载联合作用下, 具有光滑中心和夹紧固定边界的波纹圆板的非线性弯曲的无量纲非线性边值问题 (2.20), (2.13b), (2.21), (2.14b), (2.15) 和 (2.17). 使用修正迭代法, 便能获得此问题的解析解. 为此, 我们取无量纲中心挠度 W_0 作为迭代参数

$$W_0 = W_a \Big|_{y=0} \quad (3.1)$$

对第一次近似, 我们忽略方程 (2.20) 和 (2.21) 中的非线性项, 便得到下面的线性边值问题:

当 $0 \leq y \leq y_1$ 时,

$$L_0(y\phi_{a,1}) = G(\mu_1y^2 + \mu_2), \quad L_0(yS_{a,1}) = -\beta_6\phi_{a,1}^2 \quad (3.2a, b)$$

当 $y_1 \leq y \leq 1$ 时,

$$L_1(y^{\beta_1}\phi_{b,1}) = \frac{G}{\beta_3}(\mu_1y^2 + \mu_2), \quad L_2(y^{\beta_2}S_{b,1}) = -\frac{\beta_6}{\beta_4}\phi_{b,1}^2 \quad (3.3a, b)$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } \phi_{a,1}=0, \quad S_{a,1}=0 \quad (3.4a, b)$$

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } W_{b,1}=0, \quad \phi_{b,1}=0, \quad \frac{dS_{b,1}}{dy} - \nu \frac{S_{b,1}}{y} = 0 \quad (3.5a \sim c)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } y=y_1 \text{ 时, } W_{a,1}=W_{b,1}, \quad \phi_{a,1}=\phi_{b,1}, \quad \frac{d\phi_{a,1}}{dy} + \beta_6 \frac{\phi_{a,1}}{y} = \beta_3 \frac{d\phi_{b,1}}{dy} \\ S_{a,1}=\beta_3 S_{b,1}, \quad \frac{dS_{a,1}}{dy} - \beta_6 \frac{S_{a,1}}{y} = \beta_4 \frac{dS_{b,1}}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (3.6a \sim e)$$

边值问题 (3.2a), (3.3a), (3.4a), (3.5a, b) 和 (3.6a~c) 的解是

$$\phi_{a,1} = G(a_1y^3 + a_2y \ln y + a_3y), \quad \phi_{b,1} = G(b_1y^{\beta_1+1} + b_2y^{-\beta_1+1} + b_3y^3 + b_4y) \quad (3.7)$$

和

$$\left. \begin{aligned} W_{a,1} = G \left[\frac{a_1}{4} y^4 + \frac{a_2}{2} y^2 \ln y + \frac{1}{2} \left(a_3 - \frac{a_2}{2} \right) y^2 + \frac{1}{a_1} \right] \\ W_{b,1} = G \left[\frac{b_1}{\beta_1+1} (y^{\beta_1+1} - 1) - \frac{b_2}{\beta_1-1} (y^{-(\beta_1-1)} - 1) + \frac{b_3}{4} (y^4 - 1) + \frac{b_4}{2} (y^2 - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.8a, b)$$

其中

$$a_1 = \frac{\mu_1}{8}, \quad a_2 = \frac{\mu_2}{2}$$

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \mu_1 \left[\frac{1}{\beta_1+3} + \frac{1}{8} (\beta_1\beta_3 - \beta_6 - 3) \right] y_1^{\beta_1+2} + \mu_1 \left[\frac{1}{\beta_1-3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} (\beta_1\beta_3 + \beta_6 + 3) \right] y_1^{-(\beta_1-2)} + \frac{\mu_2}{2} (\beta_1\beta_3 - \beta_6 - 1) y_1^{\beta_1} \ln y_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_2}{2} (\beta_1 \beta_3 + \beta_6 + 1) y_1^{-\beta_1} \ln y_1 + \mu_2 \left[\frac{1}{\beta_1 + 1} - \frac{1}{4} (\beta_1 \beta_3 - \beta_6 + 1) \right] y_1^{\beta_1} \\
& + \mu_2 \left[\frac{1}{\beta_1 - 1} - \frac{1}{4} (\beta_1 \beta_3 + \beta_6 - 1) \right] y_1^{-\beta_1} - 2\beta_1 \left(\frac{\mu_1}{\beta_1^2 - 9} + \frac{\mu_2}{\beta_1^2 - 1} \right) y_1^{-1} \Big\} - \frac{\mu_2}{4} \\
b_1 = & - \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \left(\frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} + \beta_1 \right) \left(\frac{\mu_1}{\beta_1^2 - 9} + \frac{\mu_2}{\beta_1^2 - 1} \right) y_1^{-\beta_1} \right. \\
& \left. - \mu_1 \left[\frac{1}{\beta_1^2 - 9} \left(\frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} - 3 \right) - \frac{1}{4} \right] y_1^3 + \mu_2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} \right) + \frac{1}{2} \right] y_1 \right\} \\
b_2 = & \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \left(\frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} - \beta_1 \right) \left(\frac{\mu_1}{\beta_1^2 - 9} + \frac{\mu_2}{\beta_1^2 - 1} \right) y_1^{\beta_1} \right. \\
& \left. - \mu_1 \left[\frac{1}{\beta_1^2 - 9} \left(\frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} - 3 \right) - \frac{1}{4} \right] y_1^3 - \mu_2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 - 1} \left(\frac{\beta_6 + 1}{\beta_3} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] y_1 \right\} \\
b_3 = & - \frac{\mu_1}{\beta_3 (\beta_1^2 - 9)}, \quad b_4 = - \frac{\mu_2}{\beta_3 (\beta_1^2 - 1)}
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = - \left[(\beta_1 \beta_3 - \beta_6 - 1) y_1^{\beta_1} + (\beta_1 \beta_3 + \beta_6 + 1) y_1^{-\beta_1} \right] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & \left[\frac{b_1}{\beta_1 + 1} (y_1^{\beta_1 + 1} - 1) - \frac{b_2}{\beta_1 - 1} (y_1^{-(\beta_1 - 1)} - 1) + \frac{b_3}{4} (y_1^4 - 1) \right. \\
& \left. + \frac{b_4}{2} (y_1^2 - 1) - \frac{a_1}{4} y_1^4 - \frac{a_2}{2} y_1^2 \ln y_1 - \frac{1}{2} (a_3 - \frac{a_2}{2}) y_1^2 \right]^{-1} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

将式(3.8a)代入式(3.1), 使得

$$G = a_1 W_0 \quad (3.11)$$

此即小挠度的特征关系式。将此式代入式(3.7), 得

$$\left. \begin{aligned}
\phi_{a,1} &= a_1 W_0 (a_1 y^3 + a_2 y \ln y + a_3 y) \\
\phi_{b,1} &= a_1 W_0 (b_1 y \beta_1 + b_2 y^{-\beta_1} + b_3 y^3 + b_4 y)
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

应用解(3.12), 可得问题(3.2b), (3.3b), (3.4b), (3.5c)和(3.6d,e)的解

$$\left. \begin{aligned}
S_{a,1} &= \alpha_1^2 \beta_0 W_0^2 (c_1 y^7 + c_2 y^5 \ln y + c_3 y^5 + c_4 y^3 \ln^2 y + c_5 y^3 \ln y + c_6 y^3 + c_7 y) \\
S_{b,1} &= \alpha_1^2 \beta_0 W_0^2 \left[\frac{1}{\beta_4} (d_1 y^2 \beta_1 + 1 + d_2 y^{-(2\beta_1 - 1)} + d_3 y \beta_1 + 4 \right. \\
& \quad \left. + d_4 y^{-(\beta_1 - 4)} + d_5 y \beta_1 + 2 + d_6 y^{-(\beta_1 - 2)} + d_7 y^7 + d_8 y^5 \right. \\
& \quad \left. + d_9 y^3 + d_{10} y) + d_{11} y \beta_2 + d_{12} y^{-\beta_2} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

其中

$$c_1 = - \frac{a_1^2}{48}, \quad c_2 = - \frac{a_1 a_2}{12}, \quad c_3 = \frac{a_1}{12} \left(\frac{5}{12} a_2 - a_3 \right), \quad c_4 = - \frac{a_2^2}{8}$$

$$c_5 = \frac{a_2}{4} \left(\frac{3}{4} a_2 - a_3 \right), \quad c_6 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} a_2 a_3 - \frac{7}{8} a_2^2 - a_3^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
c_7 = & \frac{1}{\lambda_2} \left\{ \beta_2 \beta_4 \psi_2 \left[(\beta_2 + \nu) y_1^{\beta_2 - 1} - (\beta_2 - \nu) y_1^{-(\beta_2 + 1)} \right] \right. \\
& \left. - \beta_3 \psi_3 \left[(\beta_2 + \nu) y_1^{\beta_2} + (\beta_2 - \nu) y_1^{-\beta_2} \right] - 2\beta_2 \beta_3 \beta_4 \psi_1 y_1^{-1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{b_1^2}{(2\beta_1+1)^2-\beta_2^2}, \quad d_2 = -\frac{b_2^2}{(2\beta_1-1)^2-\beta_2^2}, \quad d_3 = -\frac{2b_1b_3}{(\beta_1+4)^2-\beta_2^2} \\
d_4 &= -\frac{2b_2b_3}{(\beta_1-4)^2-\beta_2^2}, \quad d_5 = -\frac{2b_1b_4}{(\beta_1+2)^2-\beta_2^2}, \quad d_6 = -\frac{2b_2b_4}{(\beta_1-2)^2-\beta_2^2} \\
d_7 &= \frac{b_3^2}{\beta_2^2-49}, \quad d_8 = \frac{2b_3b_4}{\beta_2^2-25}, \quad d_9 = \frac{b_4^2}{\beta_2^2-9}, \quad d_{10} = \frac{2b_1b_2}{\beta_2^2-1} \\
d_{11} &= \frac{1}{\lambda_2} \{ \psi_1 [\beta_3(\beta_6-1) - \beta_2\beta_4] y_1^{-\beta_2} - (\beta_2+\nu) [\psi_3 y_1 + \psi_2(\beta_6-1)] \} \\
d_{12} &= -\frac{1}{\lambda_2} \{ \psi_1 [\beta_3(\beta_6-1) + \beta_2\beta_4] y_1^{\beta_2} + (\beta_2-\nu) [\psi_3 y_1 + \psi_2(\beta_6-1)] \} \\
\lambda_2 &= (\beta_2+\nu) [\beta_3(\beta_6-1) + \beta_2\beta_4] y_1^{\beta_2} + (\beta_2-\nu) [\beta_3(\beta_6-1) - \beta_2\beta_4] y_1^{-\beta_2} \\
\psi_1 &= -\frac{1}{\beta_4} [d_1(2\beta_1+1-\nu) - d_2(2\beta_1-1+\nu) + d_3(\beta_1+4-\nu) \\
&\quad - d_4(\beta_1-4+\nu) + d_5(\beta_1+2-\nu) - d_6(\beta_1-2+\nu) + d_7(7-\nu) \\
&\quad + d_8(5-\nu) + d_9(3-\nu) + d_{10}(1-\nu)] \\
\psi_2 &= -(c_1 y_1^7 + c_2 y_1^5 \ln y_1 + c_3 y_1^3 + c_4 y_1^3 \ln^2 y_1 + c_5 y_1^3 \ln y_1 + c_6 y_1^3) \\
&\quad + \frac{\beta_3}{\beta_4} (d_1 y_1^{2\beta_1+1} + d_2 y_1^{-(2\beta_1-1)} + d_3 y_1^{\beta_1+4} + d_4 y_1^{-(\beta_1-4)} \\
&\quad + d_5 y_1^{\beta_1+2} + d_6 y_1^{-(\beta_1-2)}) + d_7 y_1^7 + d_8 y_1^5 + d_9 y_1^3 + d_{10} y_1) \\
\psi_3 &= c_1(\beta_6-7) y_1^6 + c_2(\beta_6-5) y_1^4 \ln y_1 + [c_3(\beta_6-5) - c_2] y_1^4 + c_4(\beta_6-3) y_1^2 \ln^2 y_1 \\
&\quad + [c_5(\beta_6-3) - 2c_4] y_1^2 \ln y_1 + [c_6(\beta_6-3) - c_5] y_1^2 \\
&\quad + d_1(2\beta_1+1) y_1^{2\beta_1} - d_2(2\beta_1-1) y_1^{-2\beta_1} + d_3(\beta_1+4) y_1^{\beta_1+3} \\
&\quad - d_4(\beta_1-4) y_1^{-(\beta_1-3)} + d_5(\beta_1+2) y_1^{\beta_1+1} - d_6(\beta_1-2) y_1^{-(\beta_1-1)} \\
&\quad + 7d_7 y_1^6 + 5d_8 y_1^4 + 3d_9 y_1^2 + d_{10}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

对第二次近似，我们有如下的关于 ϕ 的线性边值问题：

当 $0 \leq y \leq y_1$ 时，

$$L_0(y\phi_{a,2}) = S_{a,1}\phi_{a,1} + G(\mu_1 y^2 + \mu_2) \tag{3.15}$$

当 $y_1 \leq y \leq 1$ 时，

$$L_1(y\beta_1\phi_{b,2}) = S_{b,1}\phi_{b,1} + \frac{G}{\beta_3} (\mu_1 y^2 + \mu_2) \tag{3.16}$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } \phi_{a,2} = 0 \tag{3.17}$$

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } W_{b,2} = 0, \phi_{b,2} = 0 \tag{3.18}$$

$$\text{当 } y=y_1 \text{ 时, } W_{a,2} = W_{b,2}, \phi_{a,2} = \phi_{b,2}, \frac{d\phi_{a,2}}{dy} + \beta_5 \frac{\phi_{a,2}}{y} = \beta_3 \frac{d\phi_{b,2}}{dy} \tag{3.19}$$

解此问题，便得

$$\left. \begin{aligned}
\phi_{a,2} &= G(a_1 y^3 + a_2 y \ln y + a_3 y) + \alpha_1^2 \beta_0 W_0^3 [F_1(y) + e_{13} y] \\
\phi_{b,2} &= G(b_1 y \beta_1 + b_2 y^{-\beta_1} + b_3 y^3 + b_4 y) + \alpha_1^2 \beta_0 W_0^3 [F_2(y) + f_{28} y^{\beta_1} + f_{29} y^{-\beta_1}]
\end{aligned} \right\} \tag{3.20}$$

和

$$\left. \begin{aligned}
 W_{a,2} &= G \left[-\frac{a_1}{4} y^4 + \frac{a_2}{2} y^2 \ln y + \frac{1}{2} \left(a_3 - \frac{a_2}{2} \right) y^2 + a_1^{-1} \right] \\
 &\quad + a_1^3 \beta_0 W_0^3 [H_1(y) - H_1(y_1) + H_2(y_1) - H_2(1)] \\
 W_{b,2} &= G \left[\frac{b_1}{\beta_1 + 1} (y^{\beta_1 + 1} - 1) - \frac{b_2}{\beta_1 - 1} (y^{-(\beta_1 - 1)} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_3}{4} (y^4 - 1) + \frac{b_4}{2} (y^2 - 1) \right] \\
 &\quad + a_1^3 \beta_0 W_0^3 [H_2(y) - H_2(1)]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.21a, b)$$

其中

$$F_1(y) = e_1 y^{11} + e_2 y^9 \ln y + e_3 y^9 + e_4 y^7 \ln^2 y + e_5 y^7 \ln y + e_6 y^7 + e_7 y^5 \ln^3 y \\
 + e_8 y^5 \ln^2 y + e_9 y^5 \ln y + e_{10} y^5 + e_{11} y^3 \ln y + e_{12} y^3$$

$$F_2(y) = f_1 y^{3\beta_1 + 2} + f_2 y^{-(3\beta_1 - 2)} + f_3 y^{2\beta_1 + 5} + f_4 y^{-(2\beta_1 - 5)} + f_6 y^{2\beta_1 + 3} \\
 + f_6 y^{-(2\beta_1 - 3)} + f_7 y^{\beta_1 + 8} + f_8 y^{-(\beta_1 - 8)} + f_9 y^{\beta_1 + 6} + f_{10} y^{-(\beta_1 - 6)} \\
 + f_{11} y^{\beta_1 + 4} + f_{12} y^{-(\beta_1 - 4)} + f_{13} y^{\beta_1 + 2} + f_{14} y^{-(\beta_1 - 2)} + f_{15} y^{\beta_1 + \beta_2 + 1} \\
 + f_{16} y^{\beta_1 - \beta_2 + 1} + f_{17} y^{-(\beta_1 - \beta_2 - 1)} + f_{18} y^{-(\beta_1 + \beta_2 - 1)} + f_{19} y^{\beta_2 + 4} \\
 + f_{20} y^{-(\beta_2 - 4)} + f_{21} y^{\beta_2 + 2} + f_{22} y^{-(\beta_2 - 2)} + f_{23} y^{11} + f_{24} y^9 \\
 + f_{25} y^7 + f_{26} y^5 + f_{27} y^3$$

$$H_1(y) = \frac{e_1}{12} y^{12} + \frac{1}{10} \left(e_2 \ln y - \frac{e_2}{10} + e_3 \right) y^{10} \\
 + \frac{1}{8} \left[e_4 \ln^2 y - \left(\frac{e_4}{4} - e_5 \right) \ln y + \frac{e_4}{32} - \frac{e_5}{8} + e_6 \right] y^8 \\
 + \frac{1}{6} \left[e_7 \ln^3 y - \left(\frac{e_7}{2} - e_8 \right) \ln^2 y + \left(\frac{e_7}{6} - \frac{e_8}{3} + e_9 \right) \ln y \right. \\
 \left. - \frac{e_7}{36} + \frac{e_8}{18} - \frac{e_9}{6} + e_{10} \right] y^6 + \frac{1}{4} \left(e_{11} \ln y - \frac{e_{11}}{4} + e_{12} \right) y^4 + \frac{e_{13}}{2} y^2$$

$$H_2(y) = \frac{f_1}{3(\beta_1 + 1)} y^{3(\beta_1 + 1)} - \frac{f_2}{3(\beta_1 - 1)} y^{-3(\beta_1 - 1)} + \frac{f_3}{2(\beta_1 + 3)} y^{2(\beta_1 + 3)} \\
 - \frac{f_4}{2(\beta_1 - 3)} y^{-2(\beta_1 - 3)} + \frac{f_5}{2(\beta_1 + 2)} y^{2(\beta_1 + 2)} \\
 - \frac{f_6}{2(\beta_1 - 2)} y^{-2(\beta_1 - 2)} + \frac{f_7}{\beta_1 + 9} y^{\beta_1 + 9} - \frac{f_8}{\beta_1 - 9} y^{-(\beta_1 - 9)} \\
 + \frac{f_9}{\beta_1 + 7} y^{\beta_1 + 7} - \frac{f_{10}}{\beta_1 - 7} y^{-(\beta_1 - 7)} + \frac{f_{11}}{\beta_1 + 5} y^{\beta_1 + 5} - \frac{f_{12}}{\beta_1 - 5} y^{-(\beta_1 - 5)} \\
 + \frac{f_{13}}{\beta_1 + 3} y^{\beta_1 + 3} - \frac{f_{14}}{\beta_1 - 3} y^{-(\beta_1 - 3)} + \frac{f_{16}}{\beta_1 + \beta_2 + 2} y^{\beta_1 + \beta_2 + 2} \\
 + \frac{f_{16}}{\beta_1 - \beta_2 + 2} y^{\beta_1 - \beta_2 + 2} - \frac{f_{17}}{\beta_1 - \beta_2 - 2} y^{-(\beta_1 - \beta_2 - 2)} \\
 - \frac{f_{18}}{\beta_1 + \beta_2 - 2} y^{-(\beta_1 + \beta_2 - 2)} + \frac{f_{19}}{\beta_2 + 5} y^{\beta_2 + 5} - \frac{f_{20}}{\beta_2 - 5} y^{-(\beta_2 - 5)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f_{21}}{\beta_2+3} y^{\beta_2+3} - \frac{f_{22}}{\beta_2-3} y^{-(\beta_2-3)} + \frac{f_{23}}{12} y^{12} + \frac{f_{24}}{10} y^{10} + \frac{f_{25}}{8} y^8 \\
 & + \frac{f_{26}}{6} y^6 + \frac{f_{27}}{4} y^4 + \frac{f_{28}}{\beta_1+1} y^{\beta_1+1} - \frac{f_{29}}{\beta_1-1} y^{-(\beta_1-1)}
 \end{aligned}$$

$$e_1 = \frac{a_1 c_1}{120}, \quad e_2 = \frac{1}{80} (a_1 c_2 + a_2 c_1)$$

$$e_3 = \frac{1}{80} \left[a_1 c_3 + a_3 c_1 - \frac{9}{40} (a_1 c_2 + a_2 c_1) \right], \quad e_4 = \frac{1}{48} (a_1 c_4 + a_2 c_2)$$

$$e_5 = \frac{1}{48} \left[a_1 c_5 + a_2 c_3 + a_3 c_2 - \frac{7}{12} (a_1 c_4 + a_2 c_2) \right]$$

$$e_6 = \frac{1}{48} \left[a_1 c_6 + a_3 c_3 + \frac{37}{288} (a_1 c_4 + a_2 c_2) - \frac{7}{24} (a_1 c_5 + a_2 c_3 + a_3 c_2) \right]$$

$$e_7 = \frac{a_2 c_4}{24}, \quad e_8 = \frac{1}{24} \left[a_2 c_5 + c_4 \left(a_3 - \frac{5}{4} a_2 \right) \right]$$

$$e_9 = \frac{1}{24} \left[a_2 \left(c_6 + \frac{19}{24} c_4 \right) + c_3 c_5 - \frac{5}{6} (a_2 c_5 + a_3 c_4) \right]$$

$$e_{10} = \frac{1}{24} \left[a_1 c_7 + a_3 c_6 - \frac{65}{288} a_2 c_4 + \frac{19}{72} (a_2 c_5 + a_3 c_4) - \frac{5}{12} (a_2 c_6 + a_3 c_6) \right]$$

$$e_{11} = \frac{a_2 c_7}{8}, \quad e_{12} = \frac{c_7}{8} \left(a_3 - \frac{3}{4} a_2 \right)$$

$$e_{13} = -\frac{1}{\lambda_1} \left[\beta_1 \beta_3 \omega_2 (y_1^{\beta_1-1} + y_1^{-(\beta_1+1)}) - \omega_3 (y_1^{\beta_1} - y_1^{-\beta_1}) + 2\beta_1 \beta_3 \omega_1 y_1^{-1} \right]$$

$$f_1 = \frac{b_1 d_1}{4\beta_4(\beta_1+1)(2\beta_1+1)}, \quad f_2 = \frac{b_2 d_2}{4\beta_4(\beta_1-1)(2\beta_1-1)}$$

$$f_3 = \frac{b_1 d_3 + b_3 d_1}{\beta_4(\beta_1+5)(3\beta_1+5)}, \quad f_4 = \frac{b_2 d_4 + b_3 d_2}{\beta_4(\beta_1-5)(3\beta_1-5)}$$

$$f_5 = \frac{b_1 d_6 + b_4 d_1}{3\beta_4(\beta_1+1)(\beta_1+3)}, \quad f_6 = \frac{b_2 d_6 + b_4 d_2}{3\beta_4(\beta_1-1)(\beta_1-3)}$$

$$f_7 = \frac{b_1 d_7 + b_3 d_3}{16\beta_4(\beta_1+4)}, \quad f_8 = -\frac{b_2 d_7 + b_3 d_4}{16\beta_4(\beta_1-4)}, \quad f_9 = \frac{b_1 d_8 + b_3 d_5 + b_4 d_3}{12\beta_4(\beta_1+3)}$$

$$f_{10} = -\frac{b_2 d_8 + b_3 d_6 + b_4 d_4}{12\beta_4(\beta_1-3)}, \quad f_{11} = \frac{b_1 d_9 + b_4 d_5}{8\beta_4(\beta_1+2)}, \quad f_{12} = -\frac{b_2 d_9 + b_4 d_6}{8\beta_4(\beta_1-2)}$$

$$f_{13} = \frac{b_1 d_{10} + b_2 d_1}{4\beta_4(\beta_1+1)}, \quad f_{14} = -\frac{b_1 d_2 + b_2 d_{10}}{4\beta_4(\beta_1-1)}, \quad f_{15} = \frac{b_1 d_{11}}{(\beta_2+1)(2\beta_1+\beta_2+1)}$$

$$f_{16} = -\frac{b_1 d_{12}}{(\beta_2-1)(2\beta_1-\beta_2+1)}, \quad f_{17} = -\frac{b_2 d_{11}}{(\beta_2+1)(2\beta_1-\beta_2-1)}$$

$$f_{18} = \frac{b_2 d_{12}}{(\beta_2-1)(2\beta_1+\beta_2-1)}, \quad f_{19} = \frac{b_3 d_{11}}{(\beta_2+4)^2 - \beta_1^2}, \quad f_{20} = \frac{b_3 d_{12}}{(\beta_2-4)^2 - \beta_1^2}$$

$$f_{21} = \frac{b_4 d_{11}}{(\beta_2+2)^2 - \beta_1^2}, \quad f_{22} = \frac{b_4 d_{12}}{(\beta_2-2)^2 - \beta_1^2}, \quad f_{23} = -\frac{b_3 d_7}{\beta_4(\beta_1^2 - 121)}$$

$$\begin{aligned}
f_{24} &= -\frac{b_3 d_8 + b_4 d_7}{\beta_4(\beta_1^2 - 81)}, \quad f_{25} = -\frac{b_3 d_9 + b_4 d_8}{\beta_4(\beta_1^2 - 49)} \\
f_{26} &= -\frac{b_1 d_4 + b_2 d_3 + b_3 d_{10} + b_4 d_9}{\beta_4(\beta_1^2 - 25)}, \quad f_{27} = -\frac{b_1 d_8 + b_2 d_5 + b_4 d_{10}}{\beta_4(\beta_1^2 - 9)} \\
f_{28} &= -\frac{1}{\lambda_1} [\omega_1(\beta_1 \beta_3 + \beta_6 + 1) y_1^{-\beta_1} + \omega_2(\beta_6 + 1) - \omega_3 y_1] \\
f_{29} &= -\frac{1}{\lambda_1} [\omega_1(\beta_1 \beta_3 - \beta_6 - 1) y_1^{\beta_1} - \omega_2(\beta_6 + 1) + \omega_3 y_1] \\
\omega_1 &= -F_2(1), \quad \omega_2 = F_2(y_1) - F_1(y_1) \\
\omega_3 &= \beta_3 [f_1(3\beta_1 + 2) y_1^{3\beta_1 + 1} - f_2(3\beta_1 - 2) y_1^{-(3\beta_1 - 1)} + f_3(2\beta_1 + 5) y_1^{2(\beta_1 + 2)} \\
&\quad - f_4(2\beta_1 - 5) y_1^{-2(\beta_1 - 2)} + f_5(2\beta_1 + 3) y_1^{2(\beta_1 + 1)} - f_6(2\beta_1 - 3) y_1^{-2(\beta_1 - 1)} \\
&\quad + f_7(\beta_1 + 8) y_1^{\beta_1 + 7} - f_8(\beta_1 - 8) y_1^{-(\beta_1 - 7)} + f_9(\beta_1 + 6) y_1^{\beta_1 + 5} \\
&\quad - f_{10}(\beta_1 - 6) y_1^{-(\beta_1 - 5)} + f_{11}(\beta_1 + 4) y_1^{\beta_1 + 3} - f_{12}(\beta_1 - 4) y_1^{-(\beta_1 - 3)} \\
&\quad + f_{13}(\beta_1 + 2) y_1^{\beta_1 + 1} - f_{14}(\beta_1 - 2) y_1^{-(\beta_1 - 1)} + f_{15}(\beta_1 + \beta_2 + 1) y_1^{\beta_1 + \beta_2} \\
&\quad + f_{16}(\beta_1 - \beta_2 + 1) y_1^{\beta_1 - \beta_2} - f_{17}(\beta_1 - \beta_2 - 1) y_1^{-(\beta_1 - \beta_2)} \\
&\quad - f_{18}(\beta_1 + \beta_2 - 1) y_1^{-(\beta_1 + \beta_2)} + f_{19}(\beta_2 + 4) y_1^{\beta_2 + 3} - f_{20}(\beta_2 - 4) y_1^{-(\beta_2 - 3)} \\
&\quad + f_{21}(\beta_2 + 2) y_1^{\beta_2 + 1} - f_{22}(\beta_2 - 2) y_1^{-(\beta_2 - 1)}] + [11\beta_3 f_{23} - e_1(\beta_6 + 11)] y_1^{10} \\
&\quad - e_2(\beta_6 + 9) y_1^8 \ln y_1 + [9\beta_3 f_{24} - e_2 - e_3(\beta_6 + 9)] y_1^8 - e_4(\beta_6 + 7) y_1^8 \ln^2 y_1 \\
&\quad - [e_5(\beta_6 + 7) + 2e_4] y_1^6 \ln y_1 + [7\beta_3 f_{26} - e_5 - e_6(\beta_6 + 7)] y_1^6 \\
&\quad - e_7(\beta_6 + 5) y_1^4 \ln^3 y_1 - [e_8(\beta_6 + 5) + 3e_7] y_1^4 \ln^2 y_1 - [e_9(\beta_6 + 5) + 2e_8] y_1^4 \ln y_1 \\
&\quad + [5\beta_3 f_{28} - e_9 - e_{10}(\beta_6 + 5)] y_1^4 - e_{11}(\beta_6 + 3) y_1^4 \ln y_1 \\
&\quad + [3\beta_3 f_{27} - e_{11} - e_{12}(\beta_6 + 3)] y_1^2 \tag{3.22}
\end{aligned}$$

将解(3.21a)代入式(3.1), 使得波纹圆板的非线性特征关系式

$$G = \alpha_1 W_0 + \alpha_3 W_0^3 \tag{3.23}$$

其中

$$\alpha_3 = \alpha_1^3 \beta_0 [H_1(y_1) - H_2(y_1) + H_2(1)] \tag{3.24}$$

为便于应用, 我们将式(3.23)改写为无量纲形式

$$g = \alpha_1^* w_0 + \alpha_3^* w_0^3 \tag{3.25}$$

其中 w_0 为波纹圆板的中心挠度, 而 $g, \alpha_1^*, \alpha_3^*, \mu_1$ 和 μ_2 有如下意义:

(1) 以均布荷载 q 为主要荷载

$$g = q, \quad \alpha_1^* = \frac{2D_a}{R^4} \alpha_1, \quad \alpha_3^* = \frac{2D_a}{R^4 h^2} \alpha_3, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \frac{p}{\pi R^2 q} \tag{3.26}$$

(2) 以中心集中荷载 p 为主要荷载

$$g = p, \quad \alpha_1^* = \frac{2\pi D_a}{R^2} \alpha_1, \quad \alpha_3^* = \frac{2\pi D_a}{R^2 h^2} \alpha_3, \quad \mu_1 = \frac{\pi R^2 q}{p}, \quad \mu_2 = 1 \tag{3.27}$$

其次, 我们讨论具有光滑中心和滑动固定边界的波纹圆板在均布和中心集中荷载联合作用下的无量纲非线性边值问题(2.20), (2.13b), (2.21), (2.14b), (2.16)和(2.17). 因为上述两个无量纲非线性边值问题十分相似, 所以我们易于直接从式(3.25)得到现在问题的

非线性特征关系式，将它们进行比较后可知，仅仅只有边界条件(2.15)和(2.16)的最末一式子是不相同的，值得注意，若将式(2.15)的最末一个条件改写为

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } \frac{1}{\nu} \frac{dS_b}{dy} - \frac{S_b}{y} = 0 \tag{3.28}$$

并在式(3.28)中令 $\nu \rightarrow \infty$ ，便得式(2.16)的最末一个条件

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } S_b = 0 \tag{3.29}$$

因此，在式(3.25)中令 $\nu \rightarrow \infty$ ，我们立即得到第二个问题的非线性特征关系式，可以看出，除 c_7 ， d_{11} ， d_{12} ， λ_2 和 ψ_1 改变为

$$\left. \begin{aligned} c_7 &= \frac{1}{\lambda_2} [\beta_2 \beta_4 \psi_2 (y_1^{\beta_2-1} + y_1^{-(\beta_2+1)}) - \beta_3 \psi_3 (y_1^{\beta_2} - y_1^{-\beta_2}) \\ &\quad - 2\beta_2 \beta_3 \beta_4 \psi_1 y_1^{-1}] \\ d_{11} &= \frac{1}{\lambda_2} \{ \psi_1 [\beta_3(\beta_6-1) - \beta_2 \beta_4] y_1^{-\beta_2} - \psi_3 y_1 - \psi_2(\beta_6-1) \} \\ d_{12} &= -\frac{1}{\lambda_2} \{ \psi_1 [\beta_3(\beta_6-1) + \beta_2 \beta_4] y_1^{\beta_2} - \psi_3 y_1 - \psi_2(\beta_6-1) \} \\ \lambda_2 &= [\beta_3(\beta_6-1) + \beta_2 \beta_4] y_1^{\beta_2} - [\beta_3(\beta_6-1) - \beta_2 \beta_4] y_1^{-\beta_2} \\ \psi_1 &= \frac{1}{\beta_4} \sum_{i=1}^{10} d_i \end{aligned} \right\} \tag{3.30}$$

以外，特征关系式和其余参数均与第一个问题结果相同。

在 $R_1 \rightarrow 0$ 的特殊情况下，我们还能得到没有光滑中心的波纹圆板在均布和中心集中荷载联合作用下的非线性特征关系式，计算表明，特征关系式仍是(3.25)的形式，对于夹紧固定边界情况，仅需将系数 α_1 ， α_3 ， b_1 ， d_{11} 和 f_{26} 改成为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\left(\frac{b_1}{\beta_1+1} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right)^{-1} \\ \alpha_3 &= -\frac{\alpha_1 \beta_6}{\beta_1+1} \left[\frac{2}{3} f_1 + \frac{\beta_1+5}{2(\beta_1+3)} f_3 + \frac{\beta_1+3}{2(\beta_1+2)} f_5 \right. \\ &\quad + \frac{8}{\beta_1+9} f_7 + \frac{6}{\beta_1+7} f_9 + \frac{4}{\beta_1+5} f_{11} + \frac{\beta_2+1}{\beta_1+\beta_2+2} f_{15} \\ &\quad - \frac{\beta_1-\beta_2-4}{\beta_2+5} f_{18} - \frac{\beta_1-\beta_2-2}{\beta_2+3} f_{21} - \frac{\beta_1-11}{12} f_{23} \\ &\quad \left. - \frac{\beta_1-9}{10} f_{24} - \frac{\beta_1-7}{8} f_{25} - \frac{\beta_1-5}{6} f_{26} \right] \\ b_1 &= -(b_3+b_4) \\ d_{11} &= -\frac{1}{\beta_4(\beta_2-\nu)} [d_1(2\beta_1+1-\nu) + d_3(\beta_1+4-\nu) \\ &\quad + d_5(\beta_1+2-\nu) + d_7(7-\nu) + d_8(5-\nu) + d_9(3-\nu)] \\ f_{26} &= -\frac{b_4 d_9}{\beta_4(\beta_1^2-25)} \end{aligned} \right\} \tag{3.31}$$

而对于滑动固定边界情况，除 d_{11} 改为

$$d_{11} = -\frac{1}{\beta_4} (d_1 + d_3 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9) \quad (3.32)$$

以外, 其余公式与式 (3.31) 相同。

最后, 如果在式 (3.25) 中再令 $R_1 = R$, 我们还能得到在均布和中心集中荷载联合作用下各向同性圆板的非线性特征关系式。

四、算 例

为了说明上面特征关系式的计算过程, 我们考虑如图 3 所示的一个非常简单的例子, 即在均布和中心集中荷载联合作用下, 具有滑动固定边界的无光滑中心的正弦形波纹圆板。已知: $R=76\text{mm}$, $R_1=0$, $h=0.33\text{mm}$, $H=1.20\text{mm}$, $L=76/3\text{mm}$, $E=10^4\text{kg/mm}^2$ 和 $\nu=0.3$ 。

我们取均布荷载 q 作为主要荷载, 于是由式 (3.26) 有

$$\mu_1 = 1 \quad (4.1)$$

将上述代入式 (3.25), 便得

$$q = \alpha_1^* w_0 + \alpha_3^* w_0^3 \quad (4.2)$$

这里, q 的单位是 kg/cm^2 , w_0 的单位是 mm , 而对几个 μ_2 值计算所得的系数 α_1^* 和 α_3^* 的数值给在表 1 中。

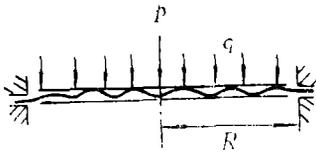


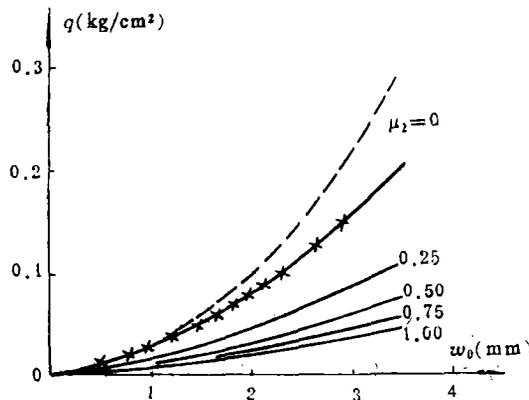
图 3

表 1

系数 α_1^* 和 α_3^* 的值

μ_2	0	0.25	0.50	0.75	1.00
α_1^*	0.03038	0.01810	0.01288	0.01000	0.008176
α_3^*	0.002350	0.001097	0.0007099	0.0005246	0.0004161

图 4 示出了对于几个 μ_2 值的特征曲线。由图看到, 随着 μ_2 的增大, 特征曲线降低。显然, 这是符合物理意义的。特别当 $\mu_2=0$ 时, 我们便得到仅承受均布荷载 q 的波纹圆板的特征曲线。同时, 我们还把 Феодосьев^[3] 的理论和实验结果也给在此图中。显而易见, 本文结



— 本文结果, --- $\mu_2=0$ 时的 Феодосьев^[3] 的结果, × $\mu_2=0$ 时的实验值^[3]

图 4 特征曲线

果与实验值相当吻合, 而 Феодосьев 的理论结果却在 $w_0 > 4.5h$ 的范围内与实验值相差很大。以 $w_0 = 8.79h$ 情况为例, 本文结果与实验值的相对误差仅为 0.97%, 而 Феодосьев 的结果的相对误差竟高达 39.0%。

五、结 语

本文对承受均布和中心集中荷载联合作用的波纹圆板的非线性弯曲问题进行了研究。应用各向同性和各向异性的圆板大挠度理论, 我们讨论了两种板, 即具有光滑中心的波纹圆板和无光滑中心的波纹圆板。关于板的边界条件, 我们也考虑了两种情况, 即夹紧固定边界和滑动固定边界。使用修正迭代法, 求得了上述问题的解析解。这些解对于具有深或浅的不同形状的波纹圆板均能适用。

由上节例子可见, 甚至当 $w_0 = 8.79h$, 亦即板产生很大弯曲情况时, 特征关系式 (3.25) 的精确度仍然是非常高的。因此, 我们可以预料, 本文对实验情况将是适用的。一般说来, 这一精确度依赖于 $L/(R-R_1)$ 的大小, 其误差随着 $L/(R-R_1)$ 的增加而增加。即是说, 如果板的波纹非常密的话, $L/(R-R_1)$ 的值变得很小, 因而板的波纹区域接近正交各向异性环形板情况, 则解的精确度较高。

本文结果对于精密仪器弹性元件的设计将是有益的。

参 考 文 献

- [1] Панов Д. Ю., О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром, *ПММ*, 5, 2 (1941), 303—318.
- [2] Феодосьев В. И., О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой, *ПММ*, 9, 5 (1945), 389—412.
- [3] Феодосьев В. И., *Упругие Элементы Точного Приборостроения*, Оборонгиз, Москва (1949).
- [4] Аксельрад Э. Л., Большие прогибы гофрированной мембраны как непологий оболочки, *Изв. АН СССР, Мех.-Маш.*, 1 (1964), 46—53.
- [5] 陈山林, 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征, *应用数学和力学*, 1, 2 (1980), 261—272.
- [6] Андреева Л. Е., Расчёт гофрированных мембран, как анизотропных пластинок, *Инженерный Сборник*, 21 (1955), 128—141.
- [7] 赤坂隆, Corrugated diaphragm の弹性特性について, *日本航空学会誌*, 3, 22-23 (1955), 279—288.
- [8] Андреева Л. Е., *Упругие Элементы Приборов*, Машгиз, Москва (1962).
- [9] Haringx, J. A., Nonlinearity of corrugated diaphragms, *Appl. Scient. Res.*, Ser. A, 16 (1956), 45.
- [10] Haringx, J. A., Design of corrugated diaphragms, *Trans. ASME*, Ser. A, 79, 1 (1957), 55.
- [11] Бурмистров Е. Ф., Симметричный изгиб неоднородных и однородных ортотропных оболочек вращения с учетом больших прогибов и неравномерного температурного поля, *Инженерный Сборник*, 27 (1960), 185—199.
- [12] 刘人怀, 波纹圆板的特征关系式, *力学学报*, 1 (1978), 47—52.

- [13] 刘人怀, 波纹环形板的非线性弯曲, 中国科学, A辑, 3 (1984), 247—253.
- [14] 叶开沅、刘人怀、平庆元、李思来, 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题, 兰州大学学报, 2 (1965), 10—33; 科学通报, 2 (1965), 142—145.
- [15] 叶开沅、刘人怀、张传智、徐一帆, 圆底扁薄球壳在边缘力矩作用下的非线性稳定问题, 科学通报, 2 (1965), 145—147.
- [16] 刘人怀, 在内边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁球壳的非线性稳定问题, 科学通报, 3 (1965), 253—255.
- [17] Chien Wei-zang, Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2 (1947), 102—113.
- [18] 刘人怀, 具有光滑中心的波纹圆板的特征关系式, 中国科学技术大学学报, 9, 2 (1979), 75—86.
- [19] Liu Ren-huai, Large deflection of corrugated circular plate with a plane central region under the action of concentrated loads at the center, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19, 5 (1984), 409—419.
- [20] Liu Ren-huai, Large deflection of corrugated circular plate with plane boundary region, *Solid Mechanics Archives*, 9, 4 (1984), 383—406.
- [21] Liu Ren-huai, On large deflection of corrugated annular plates under uniform pressure, *The Advances of Applied Mathematics and Mechanics in China* (in press).
- [22] 刘人怀, 在复合载荷作用下波纹环形板的非线性弯曲, 中国科学, A辑, 6 (1985), 537—545.
- [23] von Kármán, Th., Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, *Encykl. Math. Wiss.*, 4 (1910), 348—351.

Nonlinear Analysis of a Corrugated Circular Plate under Combined Lateral Loading

Liu Ren-huai

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, nonlinear bending of a corrugated circular plate with a plane central region under the combined action of uniformly distributed load and a concentrated load at the center has been investigated by using large deflection theories of isotropic and anisotropic circular plates. The quite accurate analytical solutions for rigidly as well as loosely clamped edge conditions have been obtained following the modified iteration method.