

关于多裂纹圆柱体的扭转*

王晓春 汤任基

(兰州大学, 1987年4月6日收到)

摘 要

本文在文[1]基础上, 导出了含有任意分布裂纹系的圆柱扭曲函数的解析表达式, 从而把问题化为以未知位错密度函数表示的奇异积分方程组。文中利用奇异积分方程的数值方法^[2,7], 对带有根裂纹的圆柱的抗扭刚度和应力强度因子作了若干数值计算。此外, 本文还首次将裂纹切割法^[5]推广用于求解矩形柱的扭转, 数值结果表明方法是成功的。

一、引 言

虽然许多作者对带裂纹柱体的扭转作过研究, 并得到某些结果, 但从目前的文献看, 还没有求解任意分布多裂纹柱体扭转的一般方法。本文在这方面作了成功的尝试, 首先求得了一般位置单裂纹扭转基本解, 进而使用迭加原理, 导出了任意分布裂纹系圆柱的扭曲函数及其相应的剪应力一般表达式。利用这些结果, 可将带裂纹圆柱体的扭转化为求解一组奇异积分方程, 从而能使问题得到解决。此外, 本文还将裂纹分割法首次推广用于求解矩形柱的扭转, 精确地得到了矩形截面柱的抗扭刚度及剪应力的表达式。实际计算表明, 本文建议的裂纹分割法具有计算量小、精度高的特点, 而且它为任意多裂纹非圆柱体的扭转提供了一种通用方法。

二、单裂纹扭转基本解

利用文[1]的结果, 可以求出圆柱 Ω^+ (图1) 上任一倾斜波纹 (O_k, B_k) 扭转时的扭曲函数为:

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{O_k}^{B_k} \{ \ln(Z - Z_{O_k} + \zeta \exp[-i\theta_k]) \exp[i\theta_k] \cdot \ln(R^2 - (\bar{Z}_{O_k} - \zeta \exp[i\theta_k])Z) \} f_k(\zeta) d\zeta \quad (2.1)$$

式中 Z 和 Z_{O_k} 均为整体坐标系 (Oxy) 中的复坐标, 函数 $f_k(\zeta)$ 为由下式定义的裂纹 (O_k, B_k) 的位错密度函数:

$$f_k(\zeta) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} [w_k(\zeta, +0) - w_k(\zeta, -0)] \quad (2.2)$$

* 中国科学院科学基金资助的课题。

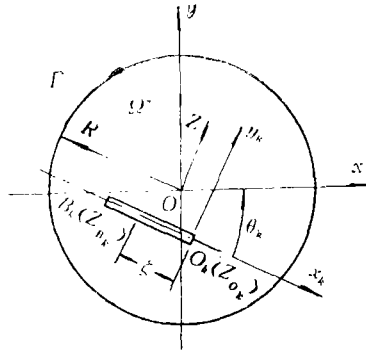


图 1

其中 α 为圆柱 Ω^+ 的扭率, $w_k(\xi, \pm 0)$ 为裂纹 (O_k, B_k) 的上岸和下岸的翘曲位移。

区域 Ω^+ 上的剪应力按以下公式计算:

$$\tau_{xz} = \mu\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = \mu\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (2.3)$$

抗扭刚度为:

$$D = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{2} \mu \pi R^4 + \mu \int_{\Omega^+} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\Omega \quad (2.4)$$

以上公式中, μ 为剪切模量, M 为柱端作用的扭矩。

如果裂纹 (O_k, B_k) 与 Ox 轴平行, 则以上结果可得到简化。令

$$Z_{O_k} = b + ih, \quad Z_{B_k} = a + ih \quad (2.5)$$

式中 a, b 和 h 均为给定的常数, 则此裂纹的翘曲函数为:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{h-y}{x-t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{hx-ty}{R^2-hy-tx} \right\} f_k(t) dt \quad (2.6)$$

相应的剪应力为:

$$\tau_{xz}(x, y) = -\mu\alpha y + \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_a^b \xi_{xz}(x, y; t) f_k(t) dt \quad (2.7)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \mu\alpha x + \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_a^b \xi_{yz}(x, y; t) f_k(t) dt \quad (2.8)$$

式中

$$\xi_{xz}(x, y; t) = \frac{y-h}{(t-x)^2 + (y-h)^2} + \frac{hR^2 - (h^2 + t^2)y}{(R^2 - hy - tx)^2 + (ty - hx)^2} \quad (2.9)$$

$$\xi_{yz}(x, y; t) = \frac{t-x}{(t-x)^2 + (y-h)^2} + \frac{-tR^2 + (h^2 + t^2)x}{(R^2 - hy - tx)^2 + (ty - hx)^2} \quad (2.10)$$

抗扭刚度可根据 (2.4) 并使用格林公式求得为:

$$D = \mu\pi R^4 / 2 - \mu \int_a^b (b^2 - t^2) f_k(t) dt \quad (2.11)$$

裂纹尖端的应力强度因子由该处的剪应力奇性主部决定, 可以证明, 由以下公式给出:

$$K(a) = \lim_{x \rightarrow a} \mu\alpha \sqrt{2(x-a)} f_k(t) \quad (2.12)$$

$$K(b) = -\lim_{x \rightarrow b} \mu\alpha \sqrt{2(b-x)} f_k(t) \quad (2.13)$$

以上公式 (2.1) ~ (2.13) 均以函数 $f_k(t)$ 表示, 此处称它们为单裂纹扭转基本解, 利用

这些公式, 可得到一般多裂纹系的相关结果.

三、任意分布裂纹系的积分方程

作为一个例子, 考虑图 1 所示的包含有任意分布的裂纹(O_k, B_k) ($k=1, 2, \dots, n$)的柱体 Ω^+ 的扭转, 其扭曲函数可利用迭加原理表为

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{O_k}^{B_k} \{ \ln(Z - Z_{O_k} + \zeta \exp[-i\theta_k]) \exp[i\theta_k] + \ln(R^2 - (Z_{O_k} - \zeta \exp[i\theta_k])Z) \} f_k(\zeta) d\zeta \quad (3.1)$$

域 Ω^+ 中的剪应力由 (2.3) 求得为:

$$\tau_{xz}(x, y) = -\mu\alpha y + \mu\alpha \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{O_k}^{B_k} \left\{ \frac{-1}{Z - Z_{O_k} + \zeta \exp[-i\theta_k]} + \frac{Z_{O_k} - \zeta \exp[-i\theta_k]}{R^2 - (Z_{O_k} - \zeta \exp[-i\theta_k])Z} \right\} f_k(\zeta) d\zeta \quad (3.2)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \mu\alpha x + \mu\alpha \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{O_k}^{B_k} \left\{ \frac{-1}{Z - Z_{O_k} + \zeta \exp[-i\theta_k]} + \frac{-Z_{O_k} - \zeta \exp[-i\theta_k]}{R^2 - (Z_{O_k} - \zeta \exp[-i\theta_k])Z} \right\} f_k(\zeta) d\zeta \quad (3.3)$$

让此应力满足各裂纹表面不受外力的条件, 即各裂纹上法向剪应力等于零:

$$\tau_{kz} = \tau_{yz}(x, y) \cdot \cos\theta_k + \tau_{xz}(x, y) \cdot \sin\theta_k = 0 \quad (x, y) \in (O_k, B_k), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

则得到

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{O_k}^{B_k} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{\Pi_k(\rho) - \Pi_j(\zeta)} - \frac{\Pi_j(\zeta)}{R^2 - \Pi_j(\zeta)\Pi_k(\rho)} \right) \cdot \cos\theta_k + \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{\Pi_k(\rho) - \Pi_j(\zeta)} + \frac{\Pi_j(\zeta)}{R^2 - \Pi_j(\zeta)\Pi_k(\rho)} \right) \cdot \sin\theta_k \right\} f_j(\zeta) dt = -\operatorname{Re}(\Pi_k(\rho) \exp[i\theta_k]) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

式中

$$\Pi_k(\zeta) = Z_{O_k} - \zeta \exp[-i\theta_k], \quad \zeta \in (O_k, B_k) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

对内裂纹而言, 未知函数 $f_k(\zeta)$ 满足以下位移单值性条件:

$$\int_{O_k}^{B_k} f_k(\zeta) d\zeta = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

解以上积分方程组, 即可求出各裂纹的未知函数 $f_k(\zeta)$, 然后回代, 便求得带裂纹柱体的抗扭刚度及裂纹端点的应力强度因子. 下面用以上结果, 研究实际中典型的裂纹柱的扭转.

四、带有单根水平裂纹的圆柱

当域 Ω^+ 中只有一根水平裂纹时, 并且参数取 (2.5) 的形式, 则问题的积分方程具有最简

单的形式，可以表为

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f_1(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_1(x;t) f_1(t) dt = -x \tag{4.1}$$

式中

$$K_1(x;t) = \frac{-tR^2 + (h^2 + t^2)x}{(R^2 - h^2 - tx)^2 + h^2(t-x)^2}, \quad x \in (a,b) \tag{4.2}$$

函数 $f_1(t)$ 满足以下条件

$$\int_a^b f_1(t) dt = A \tag{4.3}$$

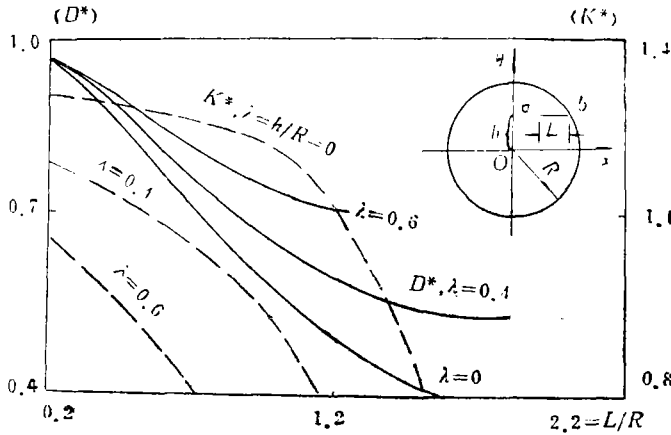
这里 A 为常数，内裂纹时为零，否则由问题的物理意义决定。

积分方程(4.1)，(4.3)的求解可按文献[7]的方法类似地进行，具体做法参看[2]。下面给出了内裂纹和边裂纹的某些结果。内裂纹的结果与文[3]作了比较，符合很好(见表1)。

表 1 应力强度因子比较 ($R=500\text{mm}$, $M=6.5 \times 10^7 \text{kg}\cdot\text{mm}$)

| a | b | h | K(a) (kg·mm ^{-3/2}) | | K(b) (kg·mm ^{-3/2}) | |
|-----|-----|-----|-------------------------------|---------|-------------------------------|--------|
| | | | 文[3] | 本文 | 文[3] | 本文 |
| -50 | 50 | 400 | -0.117 | -0.1172 | 0.117 | 0.1172 |
| -50 | 50 | 0 | -0.117 | -0.1170 | 0.117 | 0.1170 |
| 350 | 450 | 0 | 1.85 | 1.846 | 2.13 | 2.125 |

边裂纹的结果绘于图 2：



$$D^* = 2D / \mu \pi R^2, \quad K^* = K(a) / \mu a R D^* \sqrt{(b-a)/2}$$

图 2

五、带四根裂纹的圆柱

作为第二个例子，本节研究图 3 所示的圆截面内含有两两对称的四根裂纹的扭转问题。根据前面的讨论，此问题的扭曲函数为

$$\varphi(R, h, L, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{h-y}{x-t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{hx-ty}{R^2-hy-tx} \right\} f_1(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{h+y}{t-x} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{hx+ty}{R^2+hy-tx} \right\} f_3(t) dt \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{L-x}{t-y} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{Ly-tx}{R^2-Lx-ty} \right\} f_2(t) dt \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{L+x}{y-t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{Ly+tx}{R^2+Lx-ty} \right\} f_4(t) dt
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

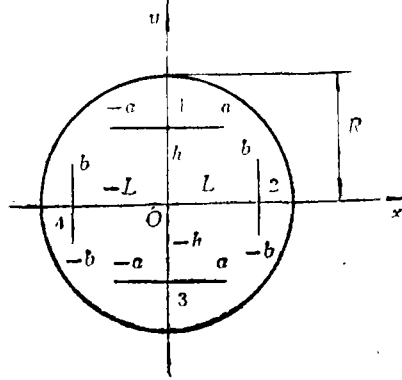


图 3

由于对称, 因而 $f_1=f_3=f$, $f_2=f_4=g$, 于是

$$\begin{aligned}
 \varphi(R, h, L, x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_f(R, h, x, y; t) f(t) dt \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b K_g(R, L, x, y; t) g(t) dt
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

式中

$$K_f(R, h, x, y; t) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{h-y}{x-t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{h+y}{t-x} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{hx-ty}{R^2-hy-tx} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{hx+ty}{R^2+hy-tx} \quad (5.3)$$

$$K_g(R, L, x, y; t) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{L+x}{y-t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{L-x}{t-y} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{Ly+tx}{R^2+Lx-ty} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{Ly-tx}{R^2-Lx-ty} \quad (5.4)$$

相应的剪应力为

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}(R, h, L, x, y) &= -\mu\alpha y + \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \xi_{zzf}(R, h, x, y; t) f(t) dt \\
 &+ \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_{-b}^b \xi_{zsg}(R, L, x, y; t) g(t) dt
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}(R, h, L, x, y) &= \mu\alpha x + \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \xi_{yzf}(R, h, x, y; t) f(t) dt \\
 &+ \frac{\mu\alpha}{\pi} \int_{-b}^b \xi_{yzg}(R, L, x, y; t) g(t) dt
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

这里

$$\xi_{zzf}(R, h, x, y; t) = \frac{y-h}{(t-x)^2 + (y-h)^2} + \frac{hR^2 - (h^2 + t^2)y}{(R^2 - hy - tx)^2 + (ty - hx)^2}$$

$$+ \frac{h+y}{(t-x)^2+(h+y)^2} - \frac{hR^2+(h^2+t^2)y}{(R^2+hy-tx)^2+(ty+hx)^2} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \xi_{zzg}(R, L, x, y; t) = & \frac{y-t}{(t-y)^2+(L+x)^2} + \frac{tR^2-(L^2+t^2)y}{(R^2+Lx-ty)^2+(tx+Ly)^2} \\ & + \frac{y-t}{(t-y)^2+(L-x)^2} + \frac{tR^2-(L^2+t^2)y}{(R^2-Lx-ty)^2+(tx-Ly)^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \xi_{yzz}(R, h, x, y; t) = & \frac{t-x}{(t-x)^2+(h-y)^2} + \frac{-tR^2+(h^2+t^2)x}{(R^2-hy-tx)^2+(ty-hx)^2} \\ & + \frac{t-x}{(t-x)^2+(h+y)^2} + \frac{-tR^2+(h^2+t^2)x}{(R^2+hy-tx)^2+(ty+hx)^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \xi_{yzz}(R, L, x, y; t) = & \frac{-L-x}{(t-y)^2+(L+x)^2} + \frac{LR^2+(L^2+t^2)x}{(R^2+Lx-ty)^2+(tx+Ly)^2} \\ & + \frac{L-x}{(t-y)^2+(L-x)^2} + \frac{-LR^2+(L^2+t^2)x}{(R^2-Lx-ty)^2+(tx-Ly)^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

让应力(5.5)、(5.6)满足裂纹的边界条件, 则得问题的积分方程为:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + K_{11}(R, h, x; t) \right] f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b K_{12}(R, h, L, x; t) g(t) dt = -x \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_{21}(R, h, L, y; t) f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{t-y} + K_{22}(R, L, y; t) \right] g(t) dt = -y \quad (5.12)$$

这里, $x \in (-a, a)$, $y \in (-b, b)$, 而积分核为

$$\left. \begin{aligned} K_{11}(R, h, x; t) = & \frac{-tR^2+(h^2+t^2)x}{(R^2-h^2-tx)^2+h^2(t-x)^2} \\ & + \frac{-tR^2+(h^2+t^2)x}{(R^2+h^2-tx)^2+h^2(t+x)^2} + \frac{t-x}{(t-x)^2+4h^2} \\ K_{22}(R, L, y; t) = & \frac{-tR^2+(L^2+t^2)y}{(R^2-L^2-ty)^2+L^2(t-y)^2} \\ & + \frac{-tR^2+(L^2+t^2)y}{(R^2+L^2-ty)^2+L^2(t+y)^2} + \frac{t-y}{(t-y)^2+4L^2} \\ K_{12}(R, h, L, x; t) = & \xi_{yzz}(R, L, x, h; t) \\ K_{21}(R, h, L, y; t) = & -\xi_{zzg}(R, h, L, y; t) \end{aligned} \right\} \quad (5.13a \sim d)$$

本节只讨论裂纹间不相交的情形, 并且各裂纹均为内裂纹, 因而未知函数 f, g 还满足以下条件:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^b g(t) dt = 0 \quad (5.14)$$

积分方程(5.11)、(5.12)及(5.14)为一组典型的柯西型奇异积分方程, 它们可按文献[7]的数值法进行求解, 具体见[2]。在求得未知函数 $f(t)$ 及 $g(t)$ 后, 即可按类似于第二节的方法计算圆柱的抗扭刚度为:

$$D = D_0 - 2\mu \left\{ \int_{-a}^a (a^2 - t^2) f(t) dt + \int_{-b}^b (b^2 - t^2) g(t) dt \right\} \quad (5.15)$$

式中 $D_0 = \mu\pi R^4/2$, 无量纲抗扭刚度定义为:

$$D^* = \frac{D}{D_0} = 1 - \frac{2\mu}{D_0} \left\{ \int_{-a}^a (a^2 - t^2) f(t) dt + \int_{-b}^b (b^2 - t^2) g(t) dt \right\} \quad (5.16)$$

应力强度因子为

$$K(a) = -\mu\alpha \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(a-x)} f(x) \quad (5.17)$$

$$K(b) = -\mu\alpha \lim_{y \rightarrow b} \sqrt{2(b-y)} g(y) \quad (5.18)$$

这里对参数比为 $a/h=1$, $h/R=0.5$ 的情形作了无量纲数值计算, 结果绘于图4. ($K^*(a) = K(a)/\mu\alpha R D^* \sqrt{a}$, $K^*(b) = K(b)/\mu\alpha R D^* \sqrt{b}$).

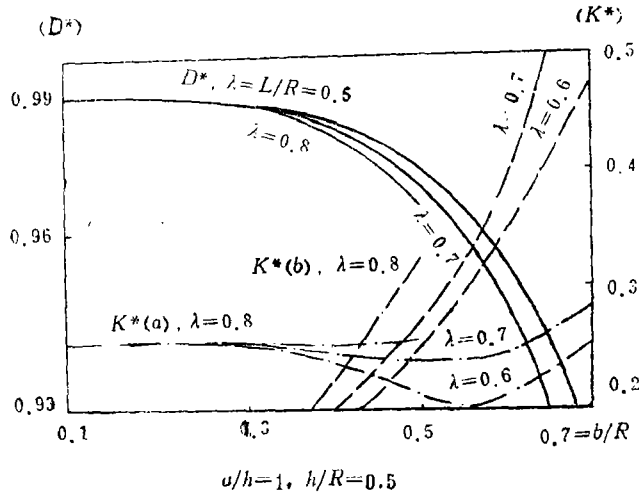


图 4

六、裂纹切割法解矩形柱的扭转

所谓裂纹切割法就是利用已得到的含裂纹圆柱的结果, 让裂纹极限扩展, 而从原来的圆截面割出所要的截面, 从而得到相应的结果。

若在上节的公式中, 选择参数 (L, h) 满足条件

$$L^2 + h^2 = R^2 \quad (6.1)$$

然后让图3中的各裂纹与圆周相交, 在圆截面上割出一完整矩形, 则此矩形柱的扭曲函数 $\varphi_R(x, y)$, 剪应力分量 τ_{Rzz} 和 τ_{Ryz} 及积分方程可直接由前节公式(5.2), (5.5), (5.6), (5.11) 和(5.12)令 $L=a$, $h=b$ 得到, 即

$$\varphi_R(x, y) = \varphi(R, b, a, x, y) \quad (6.2)$$

$$\tau_{Rzz}(x, y) = \tau_{zz}(R, b, a, x, y) \quad (6.3)$$

$$\tau_{Ryz}(x, y) = \tau_{yz}(R, b, a, x, y) \quad (6.4)$$

以及

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + K_{11}^*(x, t) \right] f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b K_{12}^*(x, t) g(t) dt = -x \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_{11}^*(y, t) f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{t-y} + K_{12}^*(y, t) \right] g(t) dt = -y \quad (6.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_{11}^*(x;t) &= K_{11}(R, b, x, t), & K_{12}^*(x;t) &= K_{12}(R, b, a, x, t) \\ K_{21}^*(y;t) &= K_{21}(R, b, a, y, t), & K_{22}^*(y;t) &= K_{22}(R, a, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.7a \sim d)$$

从(5.13)和(6.7)看出, $K_{11}^*(x;t)$ 和 $K_{12}^*(x;t)$ 在棱柱角点处已出现奇性, 因而积分方程(6.5~6.6)是一组广义柯西型奇异积分方程, 这一点与前几节有根本的区别, 因此积分方程的解也与前不同. 根据扭转棱柱角点附近的应力奇性分析^[4], 上述积分方程的解可表为下列形式

$$f(t) = F(\tau) \sqrt{1-\tau^2}, \quad g(\bar{t}) = G(\bar{\tau}) \sqrt{1-\bar{\tau}^2} \quad (6.8)$$

式中 $\tau = t/a$, $\bar{\tau} = \bar{t}/b$, $F(\tau)$ 及 $G(\bar{\tau})$ 为有界函数.

矩形柱的抗扭刚度通过计算矩形域 Ω_R 上的扭矩 M_R 得到, 即

$$D_R = \frac{M_R}{\alpha} = \mu \int_{\Omega_R} (x^2 + y^2) d\Omega + \mu \int_{\Omega_R} \left(x \frac{\partial \varphi_R}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_R}{\partial x} \right) d\Omega \quad (6.9)$$

由于这里的 φ_R 是通过位错密度函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 表示的, 即使在裂纹极限切割的情形, 函数 φ_R 也依然保留在裂纹的上下岸取值不同的特性. 注意到现在矩形边界的内外侧就是原裂纹的上下岸, 再使用格林公式将(6.9)的右边第二项化为围线积分, 经繁琐的数学推演, 就得到

$$D_R = 16a^3 b \mu \left\{ \frac{R^2}{12a^2} + \frac{1}{8a^3 6\pi} \left[\int_{-a}^a K_D(a, b, t) f(t) dt + \int_{-b}^b K_D(b, a, t) g(t) dt \right] \right\} \quad (6.10)$$

式中 K_D 由下式给出:

$$\begin{aligned} K_D(x, y, t) &= \frac{\pi}{2} t^2 + (x^2 - y^2) \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2y}{x+t} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{(x-t)y}{R^2 + y^2 + tx} \right] \\ &\quad - y \cdot F(t, 2y, x) - (x+t) F(y, x+t, y) + (A+x) \cdot F(B, A+x, y) \\ &\quad - \frac{1}{2} (B-y) \cdot F(A, B-y, x) + \frac{1}{2} (B+y) \cdot F(A, B+y, x) \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中

$$A = \frac{R^2 t}{y^2 + t^2}, \quad B = \frac{R^2 y}{y^2 + t^2} \quad (6.12)$$

而函数 F 定义为

$$F(p, t, s) = \int_{-s}^s \frac{\xi^2}{(p \pm \xi)^2 + t^2} d\xi \quad (6.13)$$

为求矩形长边中点内侧的剪应力, 首先考察下列极限

$$\varphi_R(a-0, y) = \lim_{x \rightarrow a-0} \varphi_R(x, y) \quad (6.14)$$

并使用公式

$$\tau_{Ryz}(a-0, y) = \mu \alpha a + \mu \alpha \frac{\partial \varphi_R(a-0, y)}{\partial y} \quad (6.15)$$

则得到无量纲剪应力公式

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^* &= \frac{1}{2\mu \alpha a} \tau_{Ryz}(a-0, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} g(0) + \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a \xi_{Rf}(t) f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \int_{-b}^b \xi_{Rg}(t) g(t) dt \end{aligned} \quad (6.16)$$

式中

$$\xi_{Rf}(t) = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \frac{-tR^2+(b^2+t^2)a}{(R^2-ta)^2+a^2b^2} \quad (6.17)$$

$$\xi_{Rg}(t) = \frac{-2a}{t^2+4a^2} - \frac{(b^2-t^2)a}{b^4+a^2t^2} + \frac{aR^2+(a^2+t^2)a}{(R^2+a^2)^2+a^2t^2} \quad (6.18)$$

表 2 给出了矩形柱抗扭刚度与剪应力 τ_A^* 的数值结果与文[8]的比较,二者符合很好。这表明,本文建议的裂纹切割法在解这类问题时是相当有效的。

表 2 矩形柱抗扭刚度与剪应力 τ_A^*

| b/a | D_R^* ($=D_R/16a^3b\mu$) | | τ_A^* ($=\tau_{Ryz}(a-0.0)/2\mu a a$) | |
|------|------------------------------|--------|--|--------|
| | 文[8] | 本 文 | 文[8] | 本 文 |
| 1.0 | 0.1406 | 0.1406 | 0.675 | 0.6753 |
| 2.0 | 0.229 | 0.2287 | 0.930 | 0.9300 |
| 3.0 | 0.263 | 0.2633 | 0.985 | 0.9854 |
| 4.0 | 0.281 | 0.2808 | 0.997 | 0.9969 |
| 5.0 | 0.291 | 0.2913 | 0.999 | 0.9993 |
| 10.0 | 0.312 | 0.3126 | 1.000 | 0.9999 |

七、结 束 语

关于带有裂纹的矩形截面柱的扭转,我们拟在另一篇专论多角形柱体扭转的文章中考察,在那篇文章中还要讨论裂纹相交的一系列问题。

参 考 文 献

- [1] 汤任基,带裂纹圆柱体的 Saint-Venant 扭转,力学学报,4 (1982).
- [2] 王晓春,多裂纹柱体与非圆柱体的扭转,兰州大学硕士论文 (1986).
- [3] 尹昌言,有穿透裂纹的圆柱体扭转应力及应力强度因子,固体力学学报,3 (1982).
- [4] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅,《弹性柱体的扭转理论》,科学出版社 (1956).
- [5] 汤任基,夹紧矩形板拉伸及角点应力奇异性分析的积分方程解法,力学学报,1 (1986).
- [6] Мухелишвили Н. И.,《奇异积分方程》,上海科学技术出版社 (1966).
- [7] Erdogan, F., Mixed boundary-value problems in mechanics, *Mechanics Today*, 4 (1978).
- [8] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, third edition, New York (1970).

On the Torsion of a Cylinder with Several Cracks

Wang Xiao-chun Tang Ren-ji

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, based on paper [1], the analytic expression of the torsion function for a cylinder containing arbitrary oriented cracks is obtained. The problem is reduced to solve a system of singular integral equations for the unknown dislocation density functions. Using the numerical method of the singular integral equations^(2,7), the torsional rigidities and stress intensity factors are evaluated for several multi-cracked cylinders. Next, the crack-cutting method⁽⁵⁾ is firstly extended to solve the torsion problem for a rectangular prism. The numerical results show that the method presented here is successful.