

文章编号: 1000-0887(2004) 08_0796_05

周期激励 Stuart_Landau 方程的 某些动力学行为*

陈芳启^{1,4}, 梁建术², 陈予恕³

- (1. 南京航空航天大学 数学系, 南京 210016;
2. 河北科技大学 机械电子工程学院, 石家庄 050054;
3. 天津大学 力学系, 天津 300072;
4. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究了周期激励 Stuart_Landau 方程的锁频周期解, 利用奇异性理论分别研究了这些解关于外部激励振幅和频率的分岔行为. 结果表明: 关于外部激励振幅的普适开折具有余维 3, 在某些条件下, 得到了转迁集及分岔图. 另外还证明: 关于频率的分岔问题具有无穷余维, 因此该情形下的动力学分岔行为非常复杂. 发现了一些新的动力学现象, 它们是孙亮等所获结果的补充.

关键词: Stuart_Landau 方程; 分岔; 普适开折; 芽

中图分类号: O193; O177. 91 **文献标识码:** A

引 言

众所周知, 流体稳定性是流体力学中最重要的问题之一, 它涉及到层流如何被破坏以及它的演化过程. 我们还知道, 在非线性流体流动稳定性研究中, Stuart_Landau 方程起着重要作用. 事实上, 大量的研究表明: 在 Reynolds 数接近不稳定临界值时, Stuart_Landau 方程很好地刻画了圆柱体尾迹的动力学特征, 实验研究也表明: 周期激励 Stuart_Landau 方程是研究振动圆柱体尾迹动力学的合适模型.

文[1]得到了周期激励 Stuart_Landau 方程的锁频周期解, 在满足一定条件下, 分别研究了这些解关于外部激励振幅和频率的依赖关系. 本文利用奇异性理论, 研究周期激励 Stuart_Landau 方程锁频周期解关于外部激励振幅和频率的分岔行为, 给出了转迁集和分岔图, 发现了一些新的动力学现象, 它们是[1]中结果的补充.

1 振幅分岔方程分析

考虑由二维钝体尾迹的超临界失稳形成的非定常流动. 当 Reynolds 数接近不稳定临界值

* 收稿日期: 2003_01_16; 修订日期: 2004_03_09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10251001); 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心基金资助项目

作者简介: 陈芳启(1963—), 男, 山东人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86_22_87891822; E-mail: cfqyf@eyou.com)•

时,尾迹的动力学行为可由下列的 Stuart_Landau 方程描述^[2]:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \sigma_r A - \frac{1}{2} l_r A^3, \\ \frac{d\phi}{dt} = \sigma_i - \frac{1}{2} l_i A^2, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $A(t)$ 为振幅, $\phi(t)$ 为相位, l_i 和 l_r 为 Landau 系数, σ_r 和 σ_i 由定常基本流线性稳定性的复特征值 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ 确定。

当周期激励施加于流场时, Provansal 通过在原来的 Stuart_Landau 方程上添加激励项来描述流动的非定常部分, 给出了如下修正方程^[2]

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \sigma_r A - \frac{1}{2} l_r A^3 + A_e \cos(\omega_e t - \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} = \sigma_i - \frac{1}{2} l_i A^2 + \frac{A_e \sin(\omega_e t - \phi)}{A}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 A_e 和 ω_e 是强迫激励速度的振幅和角频率。

在[1]中, 孙亮等研究了方程(2)的满足条件 $dA/dt = 0, d\phi/dt = \omega_e$ 的锁频周期解, 得到了振幅分岔方程

$$f(\xi) = a\xi^3 - b\xi^2 + c\xi - d = 0, \quad (3)$$

其中 $\xi = A_0^2, A_0$ 为周期解的振幅,

$$a = \frac{1}{4}(l_i^2 + l_r^2), \quad b = l_i(\sigma_i - \omega_e) + l_r \sigma_r, \quad c = \sigma_r^2 + (\sigma_i - \omega_e)^2, \quad d = A_e^2.$$

孙亮等在 $a > 0, c > 0, d > 0$ 条件下, 讨论了相应于

$$f(\xi_0) = 0, f'(\xi_0) > 0 \quad (4)$$

的解的动力学行为, 且分别给出了这些解关于外部激励振幅和频率的依赖性。

我们知道, 实系数 3 次代数方程的根可分为下列情形:

- (i) 一实根和一对共扼虚根;
- (ii) 一实根和一个二重实根;
- (iii) 一个三重实根;
- (iv) 三个不同实根。

我们还知道, 在小扰动下, 系统(2)解的分岔仅发生在相应于方程(3)的重根处, 且满足条件(4)的解处一定不发生分岔。

换句话说, 当振幅接近振幅方程(3)的重根时, 系统(2)的动力学行为是更加复杂的。

本文我们讨论从系统(2)的锁频平凡周期解产生的分岔, 对于其它平衡解, 可用类似方法讨论。

1.1 响应振幅关于激励振幅的分岔行为

在方程(3)中, 令 $\alpha = b/a, \beta = c/a, \gamma = d/a$, 我们得到振幅分岔方程

$$\xi^3 - \alpha\xi^2 + \beta\xi - \gamma = 0. \quad (5)$$

为习惯计, 在方程(5)中, 令 $x = \xi, \lambda = A_e/\sqrt{a} = \gamma^{1/2}$, 方程(5)变为

$$g(x, \lambda) \equiv x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \lambda^2 = 0. \quad (6)$$

考虑平凡解 $(x, \lambda) = (0, 0)$, 我们知道, $(x, \lambda) = (0, 0)$ 是 $g(x, \lambda)$ 的分岔点的必要条件是: $g_x(0, 0) = 0$, 即 $\beta = 0$, 换句话说, 这对应于 $\sigma_r = 0, \sigma_i = \omega_e$, 也就是 $1 \square 1$ 内共振。在 $1 \square 1$ 内共振情形, 我们得到 $\alpha = 0$ 。因此, 在强等价意义下, 刻划 $g(x, \lambda)$ 在 $(0, 0)$ 处附近的本质特征

的基本芽是: $g(x, \lambda) \equiv x^3 - \lambda^2$.

由文献 [3], 我们有下列结果

命题 芽 $g(x, \lambda) = x^3 - \lambda^2$ 的普适开折为

$$G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv x^3 - \lambda^2 + \alpha_1 x \lambda + \alpha_2 x + \alpha_3 \tag{7}$$

于是, g 有余维 3.

在小扰动和强等价意义下, 在 $1 \square 1$ 内共振情形, 锁频周期解关于激励振幅的分岔行为完全由式 (7) 描述, 式 (7) 的动力学行为在下面的第 2 节给出.

1.2 响应振幅关于混合频率的分岔行为

在方程 (5) 中, 我们视 β, γ 为开折参数, 它们在 0 附近取值 (β 接近 0 等价于系统 (2) 接近 $1 \square 1$ 内共振), 视 α 为分岔参数. 在方程 (5) 中, 令 $\xi = x, \alpha = \lambda$ 则方程 (5) 变为

$$G(x, \lambda, \beta, \gamma) \equiv x^3 - \lambda x^2 + \beta x - \gamma = 0, \tag{8}$$

在此情形下, 我们取基本芽 $\hat{g}(x, \lambda) = x^3 - \lambda x^2$, 可以证明芽 \hat{g} 有无穷余维.

事实上, 利用限制切空间 $RT(\hat{g})$ 的表达式, 我们有

$$RT(\hat{g}) = \langle \hat{g}, x\hat{g}_x, \lambda\hat{g}_x \rangle = \langle x^3 - \lambda x^2, 3x^3 - 2\lambda x^2, 3x^2\lambda - 2\lambda^2 x \rangle = \langle x^2\lambda, 3x^3 - 2\lambda x^2, 3x^2\lambda - 2\lambda^2 x \rangle = \langle x^3, x^2\lambda, x\lambda^2 \rangle.$$

显然, 对任何正整数 $k, \mathcal{N}^{\frac{3}{4}} RT(\hat{g}),$ 因此, $\text{codim} \hat{g} = \infty$

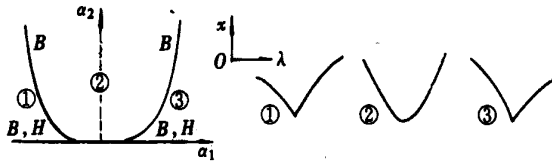


图 1 情形 A 的转迁集和分岔图

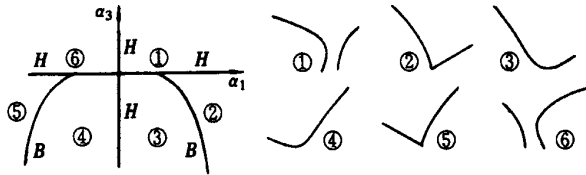


图 2 情形 B 的转迁集和分岔图

由于 $\text{codim} \hat{g} = \infty, \hat{g}(x, \lambda)$ 的普适开折具有无穷多个开折参数, 因此, 这些解关于混合频率 λ 的分岔行为非常复杂. 在下面的第 2 节, 我们将仅讨论芽 $\hat{g}(x, \lambda)$ 的双参数开折 $G(x, \lambda, \beta, \gamma)$ 的分岔行为, 这里的 $G(x, \lambda, \beta, \gamma)$ 由 (8) 给出.

2 转迁集和分岔图

在这部分, 我们讨论普适开折 (7) 和双参数开折 (8) 的分岔行为, 它们分别刻划了响应振幅关于激励振幅及混合频率的分岔特征. 由力学背景, 我们分析了 6 种形式的两参数开折. 根据状态变量和参数的物理意义, 我们得到了带有约束的转迁集和分岔图 (关于约束分岔问题可参见 [4]), 下面我们给出这些结果.

2.1 普适开折 (7) 的转迁集和分岔图

考虑到多项式 $G(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的次数是 3, 我们得到双极限点集是空集.

情形 A $\alpha_3 = 0, \alpha_2 \geq 0$ (见图 1)

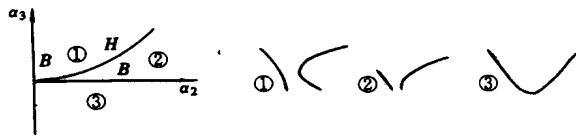


图 3 情形 C 的转迁集和分岔图

分岔点集

$$B: \alpha_2^2(\alpha_1^4 - 64\alpha_2) = 0;$$

滞后集

$$H: \alpha_2 = 0$$

情形 B $\alpha_2 = 0$ (见图 2)

分岔点集

$$B: \alpha_1^6 + 432\alpha_3 = 0;$$

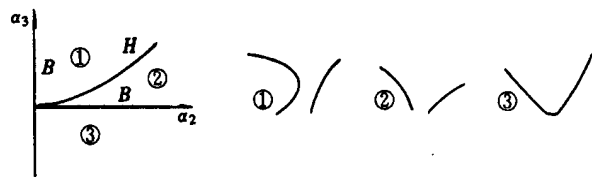


图 5 情形 E 的转迁集和分岔图

滞后集

$$H: \alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$$

为节省篇幅,我们省略情形 C: $\alpha_1 < 0$ ($|\alpha_1|$ 充分小); 情形 D: $\alpha_1 = 0$; 情形 E: $\alpha_1 > 0$ (α_1 充分小)的相应结果. 关于情形 C、情形 D、情形 E 的转迁集和分岔图分别, 见图 3、图 4 和图 5. 我们

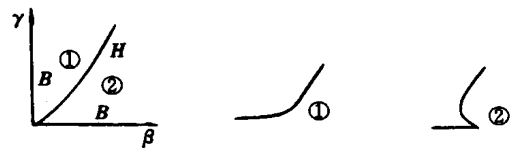


图 6 情形 $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ 的转迁集和分岔图

应当提出: 为完整起见, 在图 1~ 图 5 中, 我们给出了 $\lambda < 0$ 的部分, 实际上, 根据力学背景, 这些部分不存在.

2.2 双参数开折(8)的转迁集和分岔图

根据开折参数 β, γ 的物理意义, 我们仅在 $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ 条件下, 考虑双参数开折(8)的分岔行为.

分岔点集

$$B: \beta = 0, \gamma = 0;$$

滞后集

$$H: 27\gamma^2 - \beta^3 = 0,$$

其转迁集和分岔图见图 6.

3 结 论

利用奇异性理论, 我们研究了周期激励 Stuart-Landau 方程的动力学行为, 得到了锁频周期解关于激励振幅和频率的分岔特征. 结果表明: 源自平凡解 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 的分岔, 仅仅在 1:1 内共振时才会发生, 此时存在着丰富的动力学分岔模式, 展示了一些新的动力学现象, 它们

是[1]中结果的补充。

[参 考 文 献]

- [1] 孙亮, 胡国辉, 孙德军, 等. 激励 Stuart_Landau 方程的研究: 周期解、稳定性及流动控制[J]. 力学学报, 2002, **34**(4): 519—527.
- [2] Provansal M, Mathis C, Boyer L. Benard_von K rm n instability: transient and forced regimes[J]. J Fluid Mech, 1987, **182**: 1—22.
- [3] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Vol 1[M]. New York: Springer_Verlag, 1985.
- [4] 吴志强, 陈予恕. 具有单边约束的基本分岔问题的新分岔模式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1135—1145.
- [5] CHEN Yu_shu, Langford W F. The subharmonic bifurcation solutions of nonlinear Mathieu equation and Euler dynamic buckling problems[J]. Acta Mech Sinica, 1988, **4**(4): 350—362.
- [6] CHEN Yu_shu, Andrew Y T L. Bifurcation and Chaos in Engineering[M]. London: Springer_Verlag, 1998.

Some Dynamical Behavior of the Stuart_Landau Equation With a Periodic Excitation

CHEN Fang_qi^{1,4}, LIANG Jian_shu², CHEN Yu_shu³

(1. Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China ;

2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054, P. R. China ;

3. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China ;

4. Liu Hui Center for Applied Mathematics, Nankai University and Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The lock_in periodic solutions of the Stuart_Landau equation with a periodic excitation are studied. Using singularity theory, the bifurcation behavior of these solutions with respect to the excitation amplitude and frequency were investigated in detail, respectively. The results show that the universal unfolding with respect to the excitation amplitude possesses codimension 3. The transition sets in unfolding parameter plane and the bifurcation diagrams are plotted under some conditions. Additionally, it has also been proved that the bifurcation problem with respect to frequency possesses infinite codimension. Therefore the dynamical bifurcation behavior is very complex in this case. Some new dynamical phenomena are presented, which are the supplement of the results obtained by Sun Liang et al.

Key words: Stuart_Landau equation; bifurcation; universal unfolding; germ