

血液流动与血管壁运动*

岑人经

(华南工学院, 1987年5月30日收到)

摘 要

本文讨论了哺乳动物循环系统的血液流动与血管壁运动之间的相互作用问题。在假定流动处于稳定的振荡流动情况下, 导得了一组血液流动速度分布公式, 压力分布公式以及约束应力公式, 管壁位移公式。把 Kuchar 的公式从定常流动情况推广到非定常的振荡流动情况。文中还讨论了动脉血管壁的弹性效应问题。

一、前 言

圆管流动的研究, 对于医学及生物学工程学的意义是明显的。这是因为哺乳动物的循环系统可以模拟为圆管流动系统, 各种圆管的流动模拟研究, 可以方便地应用到循环系统中去。

美国学者 N. R. Kuchar 和 S. Ostrach^[1]曾于 1966 年研究哺乳动物血管流动的入口效应时导得了一组可应用于计算循环系统的血管管壁位移公式和管壁承受的来自其外周组织的约束应力公式。但是, 这些公式是在假设血液流动是定常流动的情况下导得的, 因此它们只适用于定常的流动情况(例如静脉血管, 由于其血流脉动幅值极小而可近似地视为定常流动)。而血管的流动通常都是处于非定常的振荡流动状态的, 这就限制了这些公式的应用范围。本文把血管作为弹性圆管看待, 讨论了血液的非定常振荡流动与血管壁运动的相互作用问题。从管流理论的 Navier-Stokes 方程及弹性薄膜理论出发, 进行相应线化及简化后, 建立了一组描述血管流动进口区域血液的非定常振荡流动及管壁运动的偏微分方程组。在满足相应的边界条件下利用虚宗量的 Bessel 函数方法对偏微分方程组进行求解, 导得了一组计算血液流动的速度分布公式, 压力分布公式以及计算血管的管壁位移公式及管壁的约束应力公式。把只适用于定常流动状态的 Kuchar 结果推广到了非定常的振荡流动情况。此外, 还讨论了动脉血管壁的弹性效应问题。

二、运动方程及边界条件

假设血管是直的、半无限长的, 在血管中流动的血液是均匀的、不可压缩的牛顿流体, 流动是轴对称的层流。这样, 当采用圆柱坐标系, x, r, θ , 坐标原点取在血管入口处的截

* 周履推荐。

面中心点上, 取 x 轴沿管的轴向, r 轴沿管的径向, 则由于流动的轴对称性, 我们可对血液流动直接应用 Navier-Stokes 方程^[2]

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0 \quad (2.3)$$

式中, $V_z = V_z(r, x, t)$, $V_r = V_r(r, x, t)$ 分别是血液流动的轴向、径向速度, $p = p(r, x, t)$ 是流动血液内的压力, ρ 是血液密度, ν 是血液的运动粘性系数。

我们再假设血管壁是各向同性的虎克弹性体, 且血管半径 R 远大于管壁的厚度 h , 则可根据弹性薄膜理论对血管壁运动写出^[3]

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S_{rr} \left(1 - \frac{h}{R}\right) - \frac{h}{R} T_{\theta\theta} + h \frac{\partial T_{rz}}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_{rz} + \left(1 + \frac{h}{R}\right) S_o(x, t) + h \frac{\partial T_{zz}}{\partial x} \quad (2.5)$$

式中, $\eta = \eta(x, t)$, $\xi = \xi(x, t)$ 分别是管壁运动的径向位移, 轴向位移, ρ_w 是管壁的密度, S_{rr} 是血管的内表面承受的径向应力, T_{zz} 是管壁的轴向应力, T_{rz} 是管壁的径向截面上的切应力, $S_o = S_o(x, t)$ 是血管的外周组织对血管的约束应力。

对上述血液流动方程及血管壁运动方程, 可根据血液流动的特点作如下的简化。

由于轴向速度 V_z 在径向的变化远大于在轴向的变化, 且通常 $V_r \ll V_z$, 所以上述式 (2.1), (2.2), (2.3) 可简化为

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \quad (2.8)$$

又由于管壁应力, 位移和流体速度, 压力之间存在如下关系

$$S_{rr} = \left(p - 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (2.9)$$

$$S_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right)_{r=R} \quad (2.10)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\eta}{R} + \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{E h^2 \eta}{12 R^3 (1-\sigma^2)} \quad (2.11)$$

$$T_{zz} = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma \frac{\eta}{R} \right) - \frac{E h^2}{12 R (1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

$$T_{rz} = -\frac{E h^2}{12 (1-\sigma^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \sigma \frac{\eta}{R^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma \frac{\eta}{R} \right) \right] \quad (2.13)$$

式中, σ 是 Poisson 比, E 是 Young 弹性模量, μ 是血液的表观粘性系数。考虑到管壁运动时受到外周组织的纵向约束^[4]而存在 $\xi \ll \eta$, 因而可忽略管壁的轴向变形。所以, 当把式

(2.9)~(2.13)代入方程(2.4)、(2.5)后,管壁运动方程便变成

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left(p - 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)_{r=R} - \frac{Eh\eta}{R^2(1-\sigma^2)} - \left(\frac{\eta}{R^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right) \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (2.14)$$

$$\frac{R}{R+h} S_c(x,t) = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right)_{r=R} - \frac{Eh\sigma}{R(1-\sigma^2)} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{Eh^3}{12R(1-\sigma^2)} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (2.15)$$

可以看到,血液流动控制方程中,式(2.6)是一个复杂的非线性二阶偏微分方程,通常是难以求出其精确解的.为了求出相应的近似解,我们假设

$$U_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} \approx V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (2.16)$$

式中, U_0 是血管入口处的特征流速.这样便可以使式(2.6)线性化,从而使血液流动方程表达为^[5]

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \quad (2.19)$$

应用量级分析方法,我们还可以使血管壁运动方程(2.14), (2.15)简化为^[1]

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{12}{Rh^2} \eta = \frac{12(1-\sigma^2)p}{Eh^3} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{12\sigma}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{12R^2(1-\sigma^2)}{Eh^3(R+h)} S_c(x,t) - \frac{12\mu R(1-\sigma^2)}{Eh^3} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (2.21)$$

相应的边界条件如下确定.假设血管具有喇叭形入口,则端点条件可写成仅是时间的周期函数的形式:

$$V_z|_{z=0} = U_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \right] \quad (2.22)$$

$$p|_{z=0} = p_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \right] = p^* \quad (2.23)$$

$$\eta|_{z=0} = \eta_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t) \right] \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.25)$$

根据血液在血管壁面无滑移,无渗透的要求可知

$$V_z|_{r=R} = 0 \quad (2.26)$$

$$V_r|_{r=R} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.27)$$

式中, p_0 是血管入口处流动血液的特征压力, η_0 是血管入口处的特征径向位移, ω 是振荡角频率, t 是时间.

三、运动方程的解

我们认为血液的振荡流动是由一个定常流动和一个脉动流动组成的, 即

$$V_z(r, x, t) = V_{z1}(r, x) + V_{z2}(r, x, t) \quad (3.1)$$

$$V_r(r, x, t) = V_{r1}(r, x) + V_{r2}(r, x, t) \quad (3.2)$$

$$p(x, t) = p_1(x) + p_2(x, t) \quad (3.3)$$

这样, 当把式(3.1), (3.2), (3.3)分别代入(2.17), (2.18), (2.19), 并加以整理, 便得到两组微分方程组:

第一组

$$U_0 \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_{z1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{z1}}{\partial r} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial V_{z1}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{r1}) \quad (3.6)$$

相应的边界条件是

$$V_{z1}|_{r=R} = 0 \quad (3.7)$$

$$V_{r1}|_{r=R} = 0 \quad (3.8)$$

$$V_{z1}|_{x=0} = U_0 \quad (3.9)$$

$$p_1|_{x=0} = p_0 \quad (3.10)$$

第二组

$$\frac{\partial V_{z2}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_{z2}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_{z2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial V_{z2}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{r2}) \quad (3.13)$$

相应的边界条件是

$$V_{z2}|_{r=R} = 0 \quad (3.14)$$

$$V_{r2}|_{r=R} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$V_{z2}|_{x=0} = U_0 \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (3.16)$$

$$p_2|_{x=0} = p_0 \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \quad (3.17)$$

可以看出, 两组方程组都是线性微分方程组, 是可以求解的。当应用虚宗量 Bessel 函数方法进行求解^[5], 便可分别求出 V_{z1} , p_1 和 V_{z2} , p_2 。把这些已求得的量代入式(3.1), (3.3), 并加以整理后便求得

$$\begin{aligned}
 V_x = & 2U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - 4U_0 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left(1 - \frac{J_0(y_q r/R)}{J_0(y_q)}\right) \exp\left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x\right] \\
 & + U_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) \left(1 + \frac{1}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \left[J_0(\sqrt{i^3 k} \alpha \frac{r}{R}) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{2J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{\sqrt{i^3 k} \alpha} \right] \right) \exp[ik\omega t] \right\} \\
 & + 2U_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k) y_q}{(y_q^2 + i k \alpha^2)} J_1(y_q) \left[J_0\left(\frac{y_q r}{R}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2J_1(y_q)}{y_q} \right] \exp\left[-\frac{y_q^2 + i k \alpha^2}{R_n R} x + ik\omega t\right] \right\} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{1}{3} \rho U_0^2 - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R} x + 4\rho U_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \exp\left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x\right] + p^* \\
 & - \frac{\rho U_0^2}{R_n R} x \operatorname{Re} \left\{ \left(\alpha^2 k i + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) (a_k - ib_k) \exp[ik\omega t] \right\} \\
 & + 4\rho U_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k)}{(y_q^2 + i k \alpha^2)^2} \exp[ik\omega t] \left[\exp\left[-\frac{y_q^2 + i k \alpha^2}{R_n R} x\right] - 1 \right] \right\} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

式(3.18), (3.19)便是描述弹性血管中血液振荡流动的轴向速度分布公式及压力分布公式。式中, $R_n = U_0 R / \nu$ 是 Reynolds 数, $\alpha = R \sqrt{\omega / \nu}$ 是 Womersley 数, y_q 是二阶第一类 Bessel 函数的根, Re 是取实部符号, J_0, J_1, J_2 是零阶, 一阶, 二阶第一类的 Bessel 函数。

把式(3.19)代入式(2.20), 管壁的位移方程变为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{12}{R h^2} \eta = & \frac{12(1 - \sigma^2)}{E h^3} \left[-\frac{1}{3} \rho U_0^2 - \frac{8\rho U_0^2 x}{R_n R} + 4\rho U_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \exp\left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x\right] \right. \\
 & \left. + p^* - \frac{\rho U_0^2 x}{R_n R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\alpha^2 k i + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) N_k \exp[ik\omega t] \right\} \right. \\
 & \left. + 4\rho U_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k y_q^2}{N_{qk}^2} \left(\exp\left[-\frac{N_{qk}}{R_n R} x\right] - 1 \right) \exp[ik\omega t] \right\} \right] \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

式中, $N_k = a_k - ib_k, N_{qk} = y_q^2 + i k \alpha^2$

我们同样认为, 血管壁运动是由定常及非定常的两种分运动组成的, 即

$$\eta(x, t) = \eta_1(x) + \eta_2(x, t) \quad (3.21)$$

把式(3.21)代入(3.20), 并进行整理, 便得如下两个方程, 即

$$\frac{d^4 \eta_1}{dx^4} + \frac{12}{R h^2} \eta_1 = \frac{12(1 - \sigma^2)}{E h^3} \left[-\frac{1}{3} \rho U_0^2 + p_0 - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R} x \right]$$

$$+4\rho U_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \exp\left[-\frac{y_q^2 x}{R_n R}\right] \quad (3.22)$$

相应的边界条件是

$$\eta_1|_{x=0} = \eta_0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dx} \eta_1(x)|_{x=0} = 0 \quad (3.24)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \eta_2}{\partial x^4} + \frac{12}{R h^2} \eta_2 = & \frac{12(1-\sigma^2)}{E h^3} \left[p_0 \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \right. \\ & \left. - \frac{\rho U_0^2 x}{R_n R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\alpha^2 k i + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) N_k \exp[ik\omega t] \right\} \right] \\ & + 4\rho U_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k y_q^2}{N_q^2 k} \left(\exp\left[-\frac{N_{qk} x}{R_n R}\right] - 1 \right) \exp[ik\omega t] \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

相应的边界条件是

$$\eta_2|_{x=0} = \eta_0 \sum_{k=1}^n (c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.27)$$

方程(3.22)是一个非齐次的高阶常微分方程, 在满足边界条件(3.23), (3.24)下求得其解为

$$\begin{aligned} \eta_1(x) = & \frac{N_1}{E h} \left(p_0 - \frac{1}{3} \rho U_0^2 - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R} x \right) + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{E h} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q N_q} \exp\left[-\frac{y_q^2 x}{R_n R}\right] \\ & + \exp[-Nx] \left\{ \left[\eta_0 - \frac{N_1}{E h} \left(p_0 - \frac{\rho U_0^2}{3} \right) + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{E h} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2 N_q} \right] \cos Nx \right. \\ & + \left[\eta_0 - \frac{N_1}{E h} \left(p_0 - \frac{\rho U_0^2}{3} - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R} \right) + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{E h N R_n R} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{N_q} \right. \\ & \left. \left. + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{E h} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2 N_q} \right] \sin Nx \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

式中, $N = (\sqrt{3}/Rh)^{1/2}$, $N_1 = (1-\sigma^2)R^2$, $N_2 = 12R_n^4 R^2$, $N_q = y_q^4 h^2 + 12R_n^4 R^2$. 式(3.28)便是描述定常的血液流动的管壁位移公式. 这一结果曾为 N. R. Kuchar 和 S. Ostrach^[1] 在 1966 年求得过, 但他们未有进一步求出非定常振荡情况的解.

下面对式(3.25)求解. 我们考虑的是非定常的振荡情况, 因而可进一步假设

$$\eta_2(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \eta_k(x) \exp[ik\omega t] \right\} \quad (3.29)$$

把式(3.29)代入式(3.25), 并加以整理得

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \eta_k(x)}{dx^4} + \frac{12}{Rh^2} \eta_k(x) = & \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} \left\{ \rho_0 (g_k - ih_k) \right. \\ & \left. - \frac{\rho U_0^2 x}{R_n R} \left(\alpha^2 k i + 2 \sqrt{i^3 k} \alpha \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) \right. \\ & \left. + 4\rho U_0^2 \frac{N_k y_a^2}{N_{qk}^2} (\exp[-N_{qk} x / R_n R] - 1) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

相应的边界条件是

$$\eta_k(x)|_{x=0} = \eta_0(c_k - id_k) \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dx} \eta_k(x)|_{x=0} = 0 \quad (3.32)$$

式(3.30)同样是一个非齐次高阶常微分方程。在满足边界条件(3.31), (3.32)求出其解 $\eta_k(x)$ 后, 再代入式(3.29)便得

$$\begin{aligned} \eta_2(x, t) = & \operatorname{Re} \left\{ \exp[-Nx] \left[\left(\eta_0 \sum_{k=1}^n (c_k - id_k) - \frac{N_1}{Eh} \rho_0 \sum_{k=1}^n (g_k - ih_k) \right. \right. \right. \\ & + \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{N_2}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} \right) \frac{N_k y_a^2}{N_{qk}^2} \Big) \cos Nx \\ & + \left(\eta_0 \sum_{k=1}^n (c_k - id_k) - \frac{N_1}{Eh} \rho_0 \sum_{k=1}^n (g_k - ih_k) + \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \right. \\ & \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{N_2}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} + \frac{N_2}{R_n R N (N_{qk}^4 h^2 + N_2)} \right) \frac{N_k y_a^2}{N_{qk}^2} \\ & + \frac{\rho U_0^2 N_1}{Eh R_n R} \sum_{k=1}^n \left(\alpha k i + 2 \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) \alpha N_k \\ & \cdot \sin Nx \Big] \exp[ik\omega t] \Big\} + \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{N_1}{Eh} \rho_0 \sum_{k=1}^n (g_k - ih_k) \right. \right. \\ & - \frac{\rho U_0^2 N_1}{Eh R_n R} x \sum_{k=1}^n \left(\alpha k i + 2 \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) \alpha N_k \\ & \left. \left. - \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{N_2 \exp[-N_{qk} x / R_n R]}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} \right) \frac{N_k y_a^2}{N_{qk}^2} \right] \exp[ik\omega t] \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

这样, 把式(3.28), (3.33)代入式(3.21)便求得

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \operatorname{Re} \left\{ \exp[-Nx] \left[\left(\eta_{ik} + \frac{1}{3} \frac{\rho U_0^2 N_1}{Eh} - \frac{N_1}{Eh} \rho_{ik} + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{Eh} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{N_{qk} y_a^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k y_a^2}{N_{qk}^2} \left(1 - \frac{N_2}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} \right) \right) (\cos Nx + \sin Nx) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{\rho U_0^2 N_1}{EhR_nRN} \left[8 + 2N_2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{N_q} + \sum_{k=1}^n N_k \left(\alpha^2 ki \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) \exp[ik\omega t] \right] \right. \\
& \left. + 4N_2 \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k y_q^2 \exp[ik\omega t]}{N_{qk}^2 (N_{qk}^4 h^2 + N_2)} \right) \sin Nx \Big\} \\
& + \operatorname{Re} \left\{ \frac{N_1}{Eh} \left(p_{ik} - \frac{1}{3} \rho U_0^2 \right) - \frac{\rho U_0^2 N_1 x}{EhR_nR} \left[8 + \sum_{k=1}^n \left(\alpha^2 ki \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) \exp[ik\omega t] \right] + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{Eh} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{N_q y_q^2} \exp \left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x \right] \right. \\
& \left. - \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k y_q^2}{N_{qk}^2} \left[1 - \frac{N_2 \exp[-N_{qk} x / R_n R]}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} \right] \exp[ik\omega t] \right\} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

式中, $p_{ik} = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^n (g_k - ih_k) \exp[ik\omega t]$, $\eta_{ik} = \eta_0 + \eta_0 \sum_{k=1}^n (c_k - id_k) \exp[ik\omega t]$. 这便是非定常振荡状态下血管壁位移公式.

由管壁约束应力方程(2.21)看到, 当把式(3.34)代入式(2.21)后, 便很容易解得管壁约束应力为

$$\begin{aligned}
S_c(x, t) = & -\frac{4\mu U_0}{R_1} - \frac{8\rho U_0^2}{R_n R_1} + \sum_{q=1}^{\infty} \left(-\frac{4\mu U_0}{R_1} \frac{1}{y_q} \frac{J_1(y_q)}{J_2(y_q)} - \frac{4\rho U_0^2 R_n R}{R_1 N_q} \right. \\
& \left. + \frac{4\rho U_0^2 N_2 R \sigma y_q^4}{R_1 R_n N_q} \right) \exp \left[-\frac{y_q^2}{R_n R} x \right] + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\alpha \mu U_0}{R_1} \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sigma \rho U_0^2 \alpha^2 R ki}{R_1 R_n} + \frac{2\alpha \rho U_0^2}{R_1 R_n} \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) N_k \exp[ik\omega t] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \left(-\frac{2\mu U_0}{R_1} \frac{N_q y_q^2}{N_{qk}} - \frac{4\sigma \rho U_0^2 N_2 N_k y_q^2 R}{R_1 R_n N_{qk}^2 (N_{qk}^4 h^2 + N_2)} \right. \\
& \left. + \frac{4\rho U_0^2 R_n R N_k N_{qk} y_q^2 h^2}{R_1 (N_{qk}^4 h^2 + N_2)} \right) \exp \left[-\frac{N_{qk} x}{R_n R} + ik\omega t \right] \\
& + \operatorname{Re} \left\{ \frac{2EhN(6\sigma + h^2 N^2) \exp[-Nx]}{R_1 (1 - \sigma^2)} \left[\eta_{ik} + \frac{1}{3} \frac{\rho U_0^2 N_1}{Nh} - \frac{N_1 p_{ik}}{Eh} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\rho U_0^2 N_2 N_1}{Eh} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2 N_q} + \frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_k}{N_{qk}^2} \left(1 - \frac{N_2 y_q^2}{N_{qk}^4 h^2 + N_2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \exp[ik\omega t] \Big] \cos Nx + \left(\frac{4\rho U_0^2 N_1}{Eh} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{2}{N} + \frac{N_2}{y_q^2 N_q} \right) \right. \\
 & + \frac{\rho U_0^2 N_1}{Eh R_n R N} \sum_{k=1}^n \left(\alpha^2 k i + 2\alpha \sqrt{i^3 k} \frac{J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \right) N_k \exp[ik\omega t] \\
 & + \frac{4\rho U_0^2 N_1 N_2}{Eh R_n R N} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{N_q y_q^2 \exp[ik\omega t]}{N_q^2 k (N_q^2 k^2 + N_2)} \Big) \frac{Eh N \exp[-Nx]}{6R_1(1-\sigma^2)} \\
 & \cdot [(6\sigma + h^2 N^2) \cos Nx - (6\sigma - h^2 N^2) \sin Nx] \Big\} \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

式中, $R_1=R+h$.

四、结果的讨论和分析

(1) 上面推导出的速度分布、压力分布、管壁位移等公式, 虽然都是针对血管来讨论的. 但由于我们是把血管作为虎克弹性体, 血液作为均匀不可压缩的牛顿流体来考虑的, 因此不失其一般性, 所得的结果可以应用于一般的粘性不可压缩流体的弹性圆管内的非定常振荡流动.

(2) 由本文推导出的公式看出, 在特殊情况下, 当血管中的血液流动从非定常的振荡状态变为定常状态时, 本文的所有公式均变为和 Kuchar 和 Ostrach 对定常情况下弹性血管研究所得的公式 (见文献[1]中的式(46), (47), (48), (50), (51)) 完全一致. 这表明, 本文公式是他们的结果的推广.

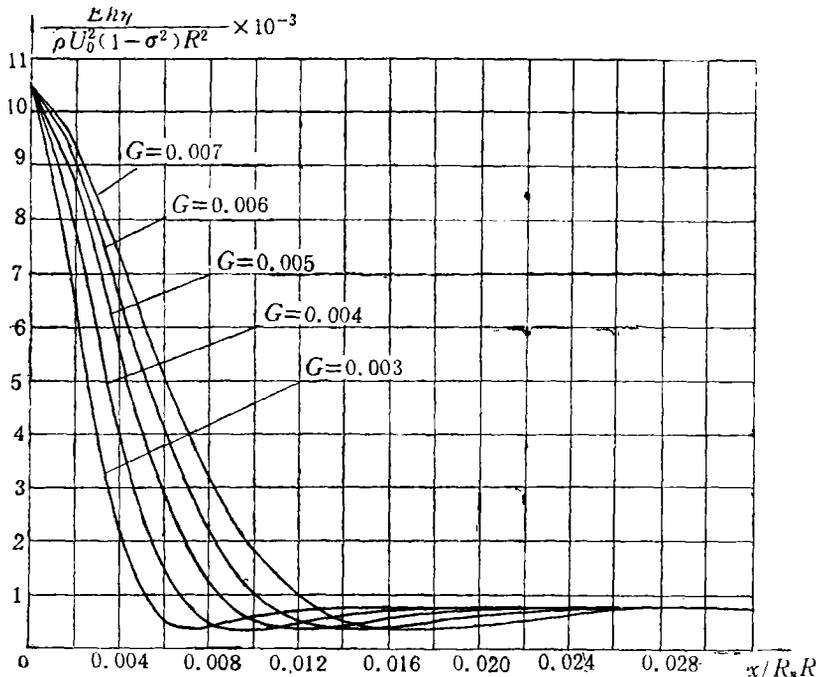


图1 在非定常振荡状态下, 不同 $G = \sqrt{h/R_n R}$ 值的管壁位移沿管轴 $x/R_n R$ 的变化 ($\omega t = 0^\circ$)

(3) 图1、图2、图3是把式(3.34)乘以 $Eh/\rho U_0^2 R^2(1-\sigma^2)$, 使之无量纲化而计算出来的, 表明不同 $G=\sqrt{h/R_0^2}R$ 值情况下管壁位移沿管轴方向的变化规律。可以看到, 无论相位角取任一种数值, 管壁的位移在管轴方向都存在明显的两种不同的区域。例如, 图1中当 $G=0.003$ 时, 在 $x/R_n R > 0.013$ 范围内, 管壁位移曲线变化缓慢; 在 $x/R_n R < 0.013$ 范围

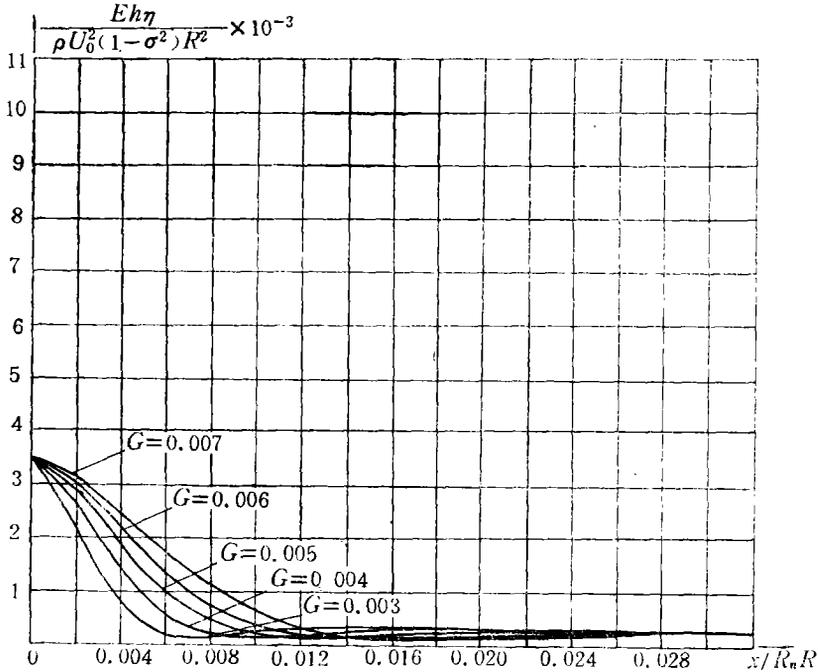


图2 在非正常振荡状态下, 不同 $G=\sqrt{h/R_0^2}R$ 值的管壁位移沿管轴 $x/R_n R$ 的变化($\omega t=180^\circ$)

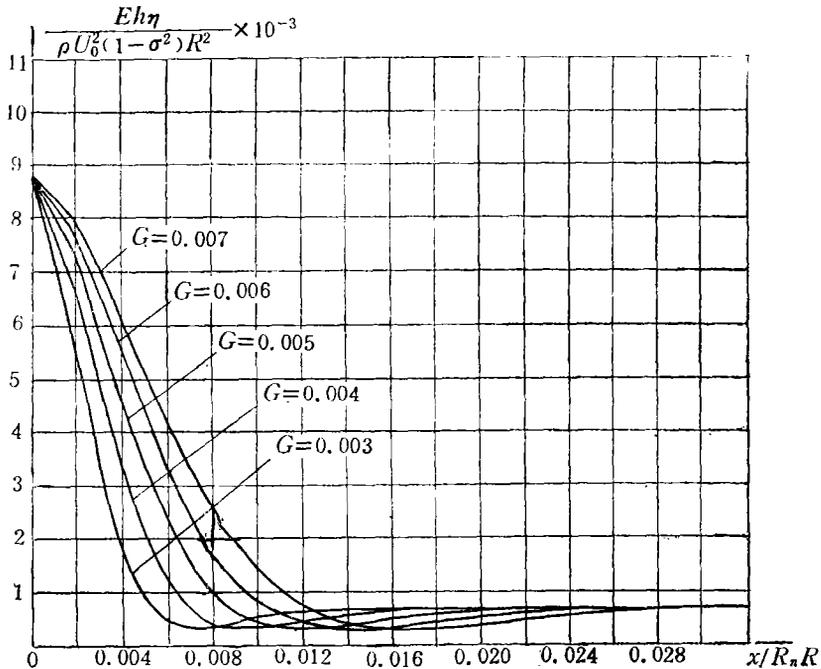


图3 在非正常振荡状态下, 不同 $G=\sqrt{h/R_0^2}R$ 值的管壁位移沿管轴 $x/R_n R$ 的变化($\omega t=300^\circ$)

内，管壁位移曲线变化剧烈，这是因为这一范围内弯曲应力相当高，以致于弹性薄膜理论不适用。Kuchar 当年在研究定常的血液流动时已发现这一问题，并称这一范围为弹性入口长度。因此可以说，对于弹性圆管的轴对称不可压缩流体的流动来说，无论是定常流动还是非定常振荡流动，都同样存在着一个弹性入口区域问题，这一区域有别于通常的流体动力入口区域。

(4) 图 4 也是根据式(3.34)计算出来的，它表明，在血管轴向的不同位置截面上，其管壁的位移是随振荡相位而变化的。这种变化呈马鞍形，对每一个截面来说，当 $\omega t = 180^\circ$ 时管壁位移最小，而当 $\omega t > 180^\circ$ 或 $\omega t < 180^\circ$ 时位移值便逐渐增大。还可看出，紧接血管入口的截面的管壁位移变化的幅值最大。

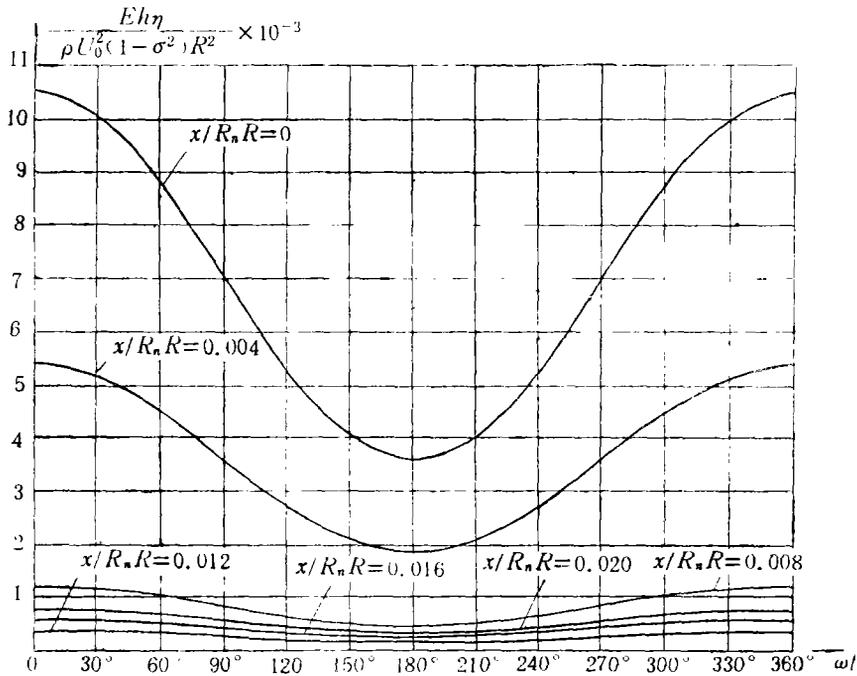


图 4 在非定常振荡状态下，不同轴向位置上 $(x/R_n R)$ 的血管壁位移随振荡相位 (ωt) 的变化 ($G=0.005$)

(5) 由管壁位移公式(3.34)看出，当血管的刚度变大时，其血管的变形将变小；在极限情况下，当血管的刚度变为无限大，即杨氏弹性模量 $E \rightarrow \infty$ 时，管壁变形 $\eta(x, t) \rightarrow 0$ ，这是符合刚性管的情况的。

(6) 由公式(3.18)、(3.19)看出，血液流动的轴向速度分布、压力分布与血管的弹性性质无关。这是很有意义的。Womersley^[6]曾论证过：弹性管流的流动形成区域中的压力梯度与流量的关系是等同于刚性管的。但是，在弹性管的流动发展区域中又将如何呢？Atabek^[7]只是根据 Womersley 的上述结论预言过：在入口区域内，动脉管壁的弹性效应也是可忽略的。这一预测现在已为本文所证实。这表明，在弹性管流中，无论是流动形成区，还是流动发展区，其压力梯度、轴向速度分布都与刚性管情况相同。实用上，其意义是明显的，它表明可以用刚性管模拟血管来测量血管的轴向流速（流量）及压力梯度。

参 考 文 献

- [1] Kuchar, N. R. and S. Ostrach, Flows in the entrance regions of circular elastic tubes, *Biomedical Fluid Dynamics Symposium*, ASME, New York (1966), 45—69.
- [2] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford, England (1938).
- [3] Flügge, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin (1962).
- [4] McDonald, D. A., *Blood Flow in Arteries*, Edward Arnold Ltd. (1974).
- [5] 岑人经, 粘性流体在圆管入口区域内的振荡流动, *华南工学院学报*, 12 (1984), 63—75.
- [6] Womersley, J. R., An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries, Wright Air Development Center Technical Report, WADC-TR 56—614 (1957), 113—114.
- [7] Atabek, H. B., *End Effect, Pulsatile Blood Flow*, Ed. by E. O. Attinger, McGraw-Hill (1964), 201—220.

The Blood Flow and the Motion of Vessel Wall

Cen Ren-jing

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

The correlation problem between the blood flow and the motion of vessel wall in the mammalian circulatory system is discussed in this paper. Supposing the blood flow is under the stable oscillatory condition, a set of formulas for velocity distribution, pressure distribution, displacement of vessel wall and constraining stress are obtained. Kuchar's formulas are extended from steady flow to unsteady oscillatory flow by means of the formulas obtained in this paper. The problem of elasticity effect of vessel wall is also discussed.