应用数学和力学，第9卷第8期(1988年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非牛顿流体弹性径向渗流的自型问题的近似解*

袁镒吾

(中南工业大学，1986年10月25日收到)

摘　要

本文研究了非牛顿流体弹性径向渗流的自型解．设流体服从幂函数律．当指数n等于零时，文中得到了准确解．将此解和文献[1]的近似解作了比较．

对于$n>1$及$n<1$的各种情形，文中得到了近似解．有算例．

一、数学模型

非牛顿流体径向渗流的幂函数定律为[1]

$$u_r^n=-\frac{K}{\mu_e}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.1}$$

式中u_r^n为流速，p为压力，K为地层渗流率，μ_e为非牛顿流体似粘性系数．$n<1$时，式(1.1)表示拟塑性流体的阻力定律．$n>1$时，则为膨胀型流体渗流定律．$n=1$时，式(1.1)为牛顿流体的Darcy定律．

服从幂函数定律的非牛顿流体的弱压缩液体的弹性渗流微分方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=C_e\,\phi n\left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{n}}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.2}$$

式中ϕ为地层孔隙度，C_e为综合压缩系数．式(1.2)为非线性偏微分方程，求解很困难．文献[1]假定流量为

$$q_r=q_0\left(1-\frac{r^2}{r_e^2}\right) \tag{1.3}$$

式中q_0为$r=0$时q_r的数值，r_e为圆形封闭地层的半径．在此基础上求得了满足式(1.2)的平均化了的方程的解．

我们则直接求式(1.2)的自型解．

二、自型解

文献[1]设

---

* 叶开沅推荐．

用应数学赵

$$q_r = q_0\left(1-\frac{r^2}{r_e^2}\right)$$

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{q_0}{2\pi hr}\left(1-\frac{r^2}{r_e^2}\right)$$

式中h为地层的厚度。对于牛顿流体（$n=1$），地层中各点的压力变化速度大体相同时，式(1.3)是相当合理的。但是对于非牛顿流体（$n\neq1$），式(1.3)是否合理，就值得怀疑了。因此，我们先设

$$q_r = q_0 q(r/r_e) \tag{2.1}$$

及

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{q_0 q}{2\pi hr} \tag{2.2}$$

将式(2.2)代入式(1.2)得

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = C_e\phi n\left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{q_0 q}{2\pi hr}\right)^{n-1}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.3}$$

令

$$\bar r = r/r_w,\quad \bar r_e = r_e/r_w$$

$$P = \left(\frac{2\pi h}{q_0}\right)^n\frac{K(p-p_i)}{\mu_e r_w^{1-n}} \tag{2.4}$$

式中p_i为原始地层压力；r_w为井的半径。则式(2.3)变为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2\pi h}{q_0}\right)^n\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right)r_w^2\frac{K}{\mu_e r_w^{1-n}}\\
&=C_e\phi n\left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\mu_e}{K}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{q_0 q}{2\pi hr}\right)^{n-1}\frac{\partial p}{\partial t}r_w^2\frac{K}{\mu_e r_w^{1-n}}\left(\frac{2\pi h}{q_0}\right)^n\\
&=\bar r^{(1-n)}q^{n-1}\left(\frac{2\pi h}{q_0}\right)^n\frac{K}{\mu_e r_w^{1-n}}\frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{q_0}{2\pi h}\right)^{n-1}r_w^{3-n}C_e\phi n\mu_e/K\\
&=\bar r^{(1-n)}q^{n-1}\frac{\partial P}{\partial t}\left(\frac{q_0}{2\pi h}\right)^{n-1}r_w^{3-n}C_e\phi n\mu_e/K
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \bar r^2}+\frac{n}{\bar r}\frac{\partial P}{\partial \bar r} = \bar r^{(1-n)}q^{n-1}\frac{\partial P}{\partial \tau} \tag{2.5}$$

式中

$$\tau = \frac{t}{(n\phi C_e\mu_e/K)(2\pi h/q_0)^{1-n}r_w^{3-n}} \tag{2.6}$$

设

$$P = \bar r_e^{1-n}f(x),\qquad x = \bar r/\bar r_e \tag{2.7}$$

则有

$$\frac{\partial P}{\partial \bar r} = f'\bar r_e^{-n},\quad \frac{\partial^2 P}{\partial \bar r^2} = f''\bar r_e^{-n-1},\quad \frac{\partial P}{\partial \tau} = -f'\frac{\bar r}{\bar r_e^2}\frac{d\bar r_e}{d\tau}\bar r_e^{1-n}+f(1-n)\bar r_e^{1-n}\frac{d\bar r_e}{d\tau}$$

式(2.5)变为

$$f''+n\frac{\bar r_e}{\bar r}f'+\frac{\bar r^{(1-n)}}{\bar r_e^{(1-n)}}\cdot q^{(n-1)}\bar r_e^{(2-n)}\frac{d\bar r_e}{d\tau}\left[f'\frac{\bar r}{\bar r_e}+(n-1)f\right]=0 \tag{2.7a}$$

即

$$f''+nx^{-1}f'+x^{1-n}q^{n-1}\bar{r}_e^{2-n}\frac{d\bar{r}_e}{d\tau}[f'x+(n-1)f]=0 \tag{2.8}$$

上式可变为

$$x^{-1}\frac{d}{dx}[f'x+(n-1)f]+x^{1-n}q^{n-1}\bar{r}_e^{2-n}\frac{d\bar{r}_e}{d\tau}[f'x+(n-1)f]=0 \tag{2.9}$$

边界条件为[1]

1．$P(\bar{r},0)=0$，即$P(r_e/r_w,t)=0$，即

$$f(1)=0 \tag{2.10}$$

2．$\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{r}}\right)_{\bar{r}=r_e/r_w}=0$，即

$$f'(1)=0 \tag{2.11}$$

3．$$\left(\bar{r}^n\frac{\partial P}{\partial \bar{r}}\right)_{\bar{r}\to 0}=-1 \tag{2.12}$$

如果式(2.8)有自型解，则必须

$$q=q(x),\quad \bar{r}_e^{2-n}\cdot d\bar{r}_e/d\tau=a=\text{常数} \tag{2.13a,b}$$

由式(2.13b)可见，$\lg\bar{r}_e$—$\lg\tau$曲线的斜率是$1/(3-n)$，它和文献［1］的结果是一致的。

参照文献[1]，即参照式(1.3)，我们设

$$q=1-x^{3-n} \tag{2.14}$$

则式(2.1)成为

$$q_r=q_0\left(1-\frac{r^{3-n}}{r_e^{3-n}}\right) \tag{2.15}$$

当$r\longrightarrow 0$时，$q_r=q_0$；$r=r_e$时，$q_r=0$，理应如此。当$n=1$时，式(2.15)即变为式(1.3)。由式(2.9)及(2.14)可得

$$\int\frac{d[f'x+(n-1)f]}{f'x+(n-1)f}=-\int a(1-x^{3-n})^{n-1}x^{2-n}dx+C_2 \tag{2.16}$$

式中C_2为积分常数。积分得

$$f'x+(n-1)f=C\cdot\exp\left[\frac{a}{n(3-n)}(1-x^{3-n})^n\right] \tag{2.17}$$

式中$C=\ln C_2$。由边界条件(2.10)及(2.11)知，要使式(2.17)中的常数C不为零（以后会知道，$C=0$是不合理的)，必须$n<0$，这是不合理的。

有一种情形可使$C\neq 0$，即

$$n=0$$

其它情形，我们只能求式(2.17)及(2.10)～(2.12)的近似解。

三、n＝0时，问题的精确解

$n=0$时，式(2.16)变为

$$\int\frac{d[f'x+(n-1)f]}{f'x+(n-1)f}=-\int a(1-x^3)^{-1}x^2dx+C_2$$

积分得

$$f'x-f=C(1-x^3)^{a/3}$$

式中，$C_2=\ln C$。再积分得

$$f=C_1x+x\int Cx^{-1}(1-x^3)^{a/3}x^{-1}dx$$

式中C_1为积分常数。设

$$a=3 \tag{3.1}$$

则上式积分成为

$$f=C_1x-C(1+x^3/2) \tag{3.2}$$

$$f'=C_1-(3/2)Cx^2 \tag{3.3}$$

将式(2.10)代入式(3.2)得

$$C_1=3C/2 \tag{3.4}$$

由式(2.7)及(2.12)，注意到$n=0$得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{r}}\right)_{r\to 0}=-1$$

即

$$[f']_{x\to 0}=-1$$

代入式(3.3)得

$$C_1=-1 \tag{3.5}$$

代入式(3.4)得

$$C=-2/3 \tag{3.6}$$

将式(3.5)及(3.6)代入式(3.2)最后得

$$f=\frac{2}{3}-x+\frac{1}{3}x^3 \tag{3.7}$$

显然，式(3.7)及(3.1)满足基本方程(2.16)及边界条件(2.10)～(2.12)。

式(3.7)和文献[1]的相应结果($n=0$)完全一致。

将$n=0$，$a=3$代入式(2.13)得

$$\bar{r}_e^2 d\bar{r}_e/d\tau=3$$

积分，并设$t=0$时，$\bar{r}_e=0$得

$$\bar{r}_e^3=9\tau \tag{3.8}$$

将$n=0$代入式(2.14)得

$$q=1-x^3 \tag{3.9}$$

所以，$q(x)$和$\bar{r}_e(\tau)$和文献[1]的不同，这是由于本文的结果式(3.7)、(3.8) 及 (3.9) 是式(2.8)，(2.10)～(2.12)的精确解，而[1]的相应解是近似解，它们不满足基本方程(2.3)，而只是满足其平均化了的方程。

回到式(2.17)式，如果$C=0$，则得

$$f'x+(n-1)f=0$$

积分得

$$f=C'x^{1-n}$$

由边界条件(2.10)得$C'=0$，这是不合理的。故不能有$C=0$。

四、n＞1时问题的近似解

1. n为整数时

设

$$a=n(3-n) \tag{4.1}$$

则式(2.17)成为

$$f'+(n-1)x^{-1}f=C\cdot\exp[(1-x^{3-n})^n]\cdot x^{-1} \tag{4.2}$$

其通解为

$$f=x^{1-n}\left\{C_3+C\int x^{n-2}\cdot\exp\left[(1-x^{3-n})^n\right]dx\right\} \tag{4.3}$$

求积分

$$X=\int x^{n-2}\cdot\exp\left[(1-x^{3-n})^n\right]dx \tag{4.4}$$

有一定困难。我们只求其近似值。设

$$n=2$$

则式(4.4)成为

$$X=\int\exp(1-x)^2dx=e\cdot\int\left[1-(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2}-\frac{(2x-x^2)^3}{2\times3}+\cdots\right]dx$$

由于x在区间[0,1]内取值，故可略去$(2x-x^2)^2/2$，$(2x-x^2)^3/2\times3$，…而有

$$X\approx e\int[1-(2x-x^2)]dx=e(x-x^2+x^3/3) \tag{4.5}$$

将$n=2$及式(4.5)代入式(4.3)得

$$f=x^{-1}[C_3+C\cdot e(x-x^2+x^3/3)] \tag{4.6}$$

对x求导得

$$f'=-C_3x^{-2}+C\cdot e(-1+2x/3) \tag{4.7}$$

将边界条件(2.10)代入式(4.6)得

$$C_3+C\cdot e/3=0 \tag{4.8}$$

将边界条件(2.11)代入式(4.7)，同样得到式(4.8)。

利用式(2.7)，边界条件(2.12)可改写成

$$[\bar{r}^n\bar{r}_e^{1-n}f'/\bar{r}_e]_{x\to0}=-1$$

即

$$(x^n\cdot f')_{x\to0}=-1 \tag{4.9}$$

将式(4.7)代入(令$n=2$)得

$$C_3=1 \tag{4.10}$$

代入式(4.8)得

$$C=-3/e=-1.104 \tag{4.11}$$

式(4.6)，(4.10)及(4.11)便构成了所论问题的近似解。

由式(4.1)，(2.13)及(2.14)不难求得q_r及r_e的规律。

n为其它整数（例如，$n=4,5,6,\cdots$)的情形，其计算过程和$n=2$相似，但由于出现象ln0这样的奇性，故计算不能成功。

2．n不是整数时

由于对大多数流体我们感兴趣的是剪切变稀，即$n<1$[2]，所以，对于$n>1$，且n不是整数的情形，我们不举算例。(附录Ⅰ中有这种算例)

五、n＜1时问题的近似解

1．$n=0.2$时

如果$n=0.2$，则式(4.4)变为

$$X=\int x^{-1.8}\cdot\exp(1-x^{2.8})^{0.2}dx$$

由于

$$(1-x^{2.8})^{0.2}=1-0.2x^{2.8}+\frac{0.2(-0.8)}{2}x^{5.6}-\frac{0.2(-0.8)(-1.8)}{2\times3}x^{8.4}$$
$$+\frac{0.2(-0.8)(-1.8)(-2.8)}{2\times3\times4}x^{11.2}$$
$$-\frac{0.2(-0.8)(-1.8)(-2.8)(-3.8)}{2\times3\times4\times5}x^{14}$$
$$+\frac{0.2(-0.8)(-1.8)(-2.8)(-3.8)(-4.8)}{2\times3\times4\times5\times6}x^{16.8}$$
$$-\frac{0.2(-0.8)(-1.8)(-2.8)(-3.8)(-4.8)(-5.8)}{2\times3\times4\times5\times6\times7}x^{19.6}+\cdots \tag{5.1}$$

及

$$\exp(1-x^{2.8})^{0.2}\approx e\Big[1+\Big(-0.2x^{2.8}-0.08x^{5.6}-0.08\times0.6x^{8.4}-0.08\times0.6\times0.7x^{11.2}$$
$$-\frac{1}{5}\times0.08\times0.6\times0.7\times3.8x^{14}-\frac{0.08\times0.6\times0.7\times3.8\times4.8}{5\times6}x^{16.8}$$
$$-\frac{0.08\times0.6\times0.7\times3.8\times4.8\times5.8}{5\times6\times7}x^{19.6}\Big)\Big] \tag{5.2}$$

代入式(4.3)得

$$f\approx x^{0.8}\Big[C_3+C\cdot e\Big(-\frac{1}{0.8}x^{-0.8}-\frac{1}{10}x^2-\frac{0.08}{4.8}x^{4.8}-\frac{0.048}{7.6}x^{7.6}$$
$$-\frac{0.08\times0.42}{10.4}x^{10.4}-\frac{0.08\times0.6\times0.7\times3.8}{5\times13.2}x^{13.2}-\frac{0.08\times0.6\times0.7\times3.8\times4.8}{5\times6\times16}x^{16}$$
$$-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times4.8\times5.8}{5\times6\times7\times18.8}x^{18.8}\Big)\Big] \tag{5.3}$$

对x求导得

$$f'\approx0.8C_3x^{-0.2}+C\cdot e\Big(-\frac{2.8}{10}x^{1.8}-\frac{5.6}{60}x^{4.6}-\frac{0.048\times8.4}{7.8}x^{7.4}$$
$$-\frac{0.08\times0.42\times11.2}{10.4}x^{10.2}-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times14}{5\times13.2}x^{13}$$
$$-0.08\times0.42\times3.8\times0.01\times16.8x^{15.8}-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times0.16\times5.8\times19.6}{7\times18.8}x^{18.6}\Big) \tag{5.4}$$

将边界条件(2.10)及(2.11)分别代入式(5.3)及(5.4)得

$$C_3+C\cdot e\Big(-\frac{1}{0.8}-0.1-\frac{1}{60}-\frac{0.048}{7.6}-\frac{0.08\times0.42}{10.4}-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times14}{5\times13.2}$$

$$-0.08\times0.42\times3.8\times0.01-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times0.16\times5.8}{7\times18.8}\Big)=0$$

$$0.8C_3+C\cdot e\Big(-0.28-\frac{5.6}{60}-\frac{0.048\times8.4}{7.6}-\frac{0.08\times0.42\times11.2}{10.4}$$

$$-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times14}{5\times13.2}-0.08\times0.42\times3.8\times0.01\times16.8$$

$$-\frac{0.08\times0.42\times3.8\times0.16\times5.8\times19.6}{7\times18.8}\Big)=0$$

即

$$C_3-1.38C\cdot e=0 \tag{5.5}$$

$$C_3-0.65C\cdot e=0 \tag{5.6}$$

当式(5.1)的展开式取的项数足够多时，式(5.5)及(5.6)的$C\cdot e$前的系数均接近于-1.38(实际上，其绝对值略大于1.38）故只保留式(5.5)而弃去式(5.6)。

边界条件(2.12)利用式(2.8)得式(4.9)，当$n=0.2$时，即是

$$(x^{0.2}f')_{x\to0}=-1$$

代入式(5.4)得

$$C_3=-1.25 \tag{5.7}$$

代入式(5.5)得

$$C=-0.33 \tag{5.8}$$

(实际上C的绝对值略小于0.33)。式(5.3)，(5.7)及(5.8)便构成了本问题的近似解。由式(4.1)，(2.13)及(2.14)不难求得q_r及r_e的规律。

2．$n=0.9$时

如果$n=0.9$，则式(4.4)变为

$$X=\int x^{-1.1}\cdot\exp(1-x^{2.1})^{0.9}dx \tag{5.9}$$

因

$$(1-x^{2.1})^{0.9}=1-0.9x^{2.1}+\frac{0.9(-0.1)}{2}x^{4.2}-\frac{0.9(-0.1)(-1.1)}{2\times3}x^{6.3}$$

$$+\frac{0.9(-0.1)(-1.1)(-2.1)}{2\times3\times4}x^{8.4}$$

$$-\frac{0.9(-0.1)(-1.1)(-2.1)(-3.1)}{2\times3\times4\times5}x^{10.5}-\cdots \tag{5.10}$$

代入式(4.3)得

$$f\approx x^{0.1}\Big[C_3+C\cdot e\Big(-\frac{1}{0.1}x^{-0.1}-0.45x^2-\frac{0.045}{4.1}x^{4.1}$$

$$-\frac{0.015\times1.1}{6.2}x^{6.2}-\frac{0.015\times1.1\times2.1}{4\times8.3}x^{8.3}-\frac{0.015\times1.1\times2.1\times3.1}{20\times10.4}x^{10.4}\Big)\Big] \tag{5.11}$$

对x求导可得f'的表式，重复上段的步骤，将边界条件(2.10)及(2.11)代入f及f'的表式，化简可得

$$C_3-10.564C\cdot e=0 \tag{5.12}$$

$$C_3-10.20C\cdot e=0 \tag{5.13}$$

当式（5.10）的展开式取的项数足够多时，式（5.12）及（5.13）的$C\cdot e$前的系数均接近于-10.564，故我们弃去式(5.13)，而只保留式(5.12)。

当$n=0.9$时，式(4.9)变为

$$(x^{0.9}\cdot f')_{x\to 0}=-1$$

将f'的表式代入，可得

$$C_3=-10 \tag{5.14}$$

代入式(5.12)得

$$C=-0.348 \tag{5.15}$$

式(5.11)，(5.14)及(5.15)便构成了本问题的近似解。由式(4.1)，(2.13)及(2.14)不难求得q_r及r_e的规律。

最后，让我们回顾一下式(2.14)。前已述及，当$n=1$时，式(2.14)或式（1.3）均是颇为合理的。对于$n\neq 1$的一般情形，较早的文献粗略地假设[1]$q_r=$常数。即认为式（1.3）中的$(\bar{r}/\bar{r}_e)^2$为小量。就这个意义说，当$n<1$时，本文作者提出的公式(2.14)似乎较文献[1]的公式(1.3)更为合理。因为前者更接近于$q_r=$常数的假设。

另外，由$n=0$时压力分布的规律式(3.7)和文献[1]的相应结果基本相同这一事实，也说明我们把流量规律(1.3)改为式(2.14)，没有歪曲非牛顿流的基本特征。

附录 I

$n=1.2$时，式（4.2）的近似解

$n=1.2$时，式(4.4)变为

$$X=\int x^{-0.8}\cdot\exp(1-x^{1.8})^{1.2}dx$$

因

$$(1-x^{1.8})^{1.2}=1-1.2x^{1.8}+\frac{1.2\times0.2}{2}x^{3.6}-\frac{1.2\times0.2\times(-0.8)}{2\times3}x^{5.4}+\frac{1.2\times0.2\times(-0.8)(-1.8)}{2\times3\times4}x^{7.2}-\frac{1.2\times0.2\times(-0.8)(-1.8)(-2.8)}{2\times3\times4\times5}x^{9}+\cdots \tag{A.1}$$

代入式（4.3），可得

$$f\approx x^{-0.2}\Big[C_3+C\cdot e\int\Big(1-1.2x^{1.8}+0.12x^{3.6}+0.032x^{5.4}+0.01\times0.8\times1.8x^{7.2}+\frac{0.08\times0.1\times1.8\times2.8}{5}x^{9}\Big)x^{-0.8}dx\Big]$$

即

$$f\approx x^{0.2}\Big[C_3+C\cdot e\Big(5x^{0.2}-0.6x^{2}+\frac{0.12}{3.8}x^{3.8}+\frac{0.032}{5.6}x^{5.6}+\frac{0.008\times1.8}{7.4}x^{7.4}+\frac{0.08\times0.1\times1.8\times2.8}{5\times9.2}x^{9.2}\Big)\Big] \tag{A.2}$$

对x求导得f'，将式（2.10)及(2.11)代入式(A.2)及f'的表式得

$$C_3+4.44C\cdot e=0 \tag{A.3}$$

$$C_3+4.568C\cdot e=0 \tag{A.4}$$

当式(A.1)的展开式取的项数足够多时，式(A.3)及(A.4)的$C\cdot e$前的系数均接近于4.44，故弃去式(A.4)

而只保留式(A.3).

当$n=1.2$时，式(4.9)成为

$$(x^{1.2}f')_{x\to 0}=-1$$

将式(A.2)对x求导得到的f'的表式代入得

$$C_3=5 \tag{A.5}$$

代入式(A.3)得

$$C=-0.414 \tag{A.6}$$

式(A.2)，(A.5)及(A.6)便构成了所论问题的近似解.

由式(4.1)，(2.13)及(2.14)不难求得q_r及r_e的规律.

参 考 文 献

[1] 刘慈群，非牛顿流体弹性径向渗流近似解，力学与实践，4,4 (1982)，41—43.

[2] 陈文芳著，《非牛顿流体力学》，科学出版社 (1984)，113.

The Approximate Solution of the Self-Similar Problem for Radial Flow of Non-Newtonian Fluids through Porous Media

Yuan Yi-wu

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

In this paper, we study the approximate solution of the self-similar problem for radial flow of non-Newtonian fluids through porous media. Assuming that the fluids obey the exponential function law, we obtain an exact solution for the exponent $n=0$ and compare it with the approximate solution in ref.[1].

For $n>1$ and $n<1$, we obtain respectively approximate solutions. Some examples are presented.