应用数学和力学，第9卷第8期(1988年8月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

悬臂板侧屈中的几个问题*

成 祥 生

(同济大学，1987年5月6日收到)

摘 要

本文用能量法研究悬臂矩形板侧向屈曲中的几个问题．文中分别讨论了有集中力，均布荷载，三角形分布荷载及集中力偶作用之下悬臂矩形板发生侧向屈曲时的最小临界荷载．

一、引 言

关于梁的侧向屈曲问题在文献[1～3]中有很多叙述，在解析法中得到了变系数的微分方程，有的作者将解用贝塞尔函数来表示；铁摩辛柯曾使用过能量法[1]，文献[3]等也研究过梁的非弹性屈曲．但对板的侧向屈曲问题研究极少，这大概是由于要写出板的侧屈的微分方程是一件并不很容易的事情，但使用能量法却是行之有效的．本文用能量法讨论了悬臂矩形板的侧向屈曲问题，文中分别讨论了有集中力，均布荷载，三角形分布荷载及集中力偶作用的情形．

二、方 法

为了确定悬臂矩形板发生侧向屈曲时最小的临界荷载，我们应用了能量法去求出当屈曲系统的总势能为驻值时的最小的荷载．实际上薄板的侧屈过程经历了两个阶段．设坐标取成如图1所示．在第一阶段中，薄板是在铅直平面内弯曲；第二阶段，薄板在临界荷载下产生扭转和侧向弯曲，偏离了原先的铅直平面．然显，薄板在铅直平面内弯曲的第一阶段中，它和外荷载处于平面形式的平衡状态；由于在板的中面（位于铅直平面）内刚度很大，因而位于中面内的曲率非常小，于是对应于薄板在铅直平面内弯曲的总势能可近似地看成为零，因而在分析总势能时不需要将它们考虑进去．只需研究第二阶段中薄板的总势能．这正如在受压直杆的稳定性问题中，不考虑杆在弯曲前的轴向变形一样．

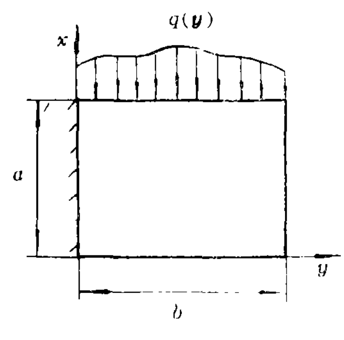

图 1

设有一各向同性等厚矩形板．在弯曲时整个系统的形变势能是[1]

* 潘立宙推荐．

$$U=\frac{D}{2}\iint[w_{xx}^2+w_{yy}^2+2\mu w_{xx}w_{yy}+2(1-\mu)w_{xy}^2]dxdy \tag{2.1}$$

其中$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$是板的弯曲刚度，E，h，μ分别为板材料的弹性模量、厚度和泊松比。w为挠曲函数，w_{xx}，w_{xy}等为挠曲函数对相应下标的偏导数；以上二重积分遍及板的中面区域。

若薄板在顶边($x=a$)受分布的中面荷载作用而屈曲，则外力的势能可表示为

$$V=-\int_0^b q(y)\Delta_x(y)dy \tag{2.2}$$

其中$q(y)$为位于板中面内并沿x方向作用的分布荷载，$\Delta_x(y)$为板发生侧向弯曲时，荷载q的作用点在铅直方向（沿x-轴）的位移，它们都是坐标y的函数。上面的积分是沿着荷载作用的边界上进行的。

于是系统的总势能为

$$\Pi=U+V \tag{2.3}$$

根据 Rayleigh-Ritz 法[4,5]，系统达到稳定平衡的极限时，其总势能为最小，即

$$\delta\Pi=0 \tag{2.4}$$

从而可确定最小的临界荷载。

在公式(2.1)中的挠曲函数$w(x,y)$应事先选择，使它满足薄板全部几何边界条件。

三、悬臂板侧向屈曲的几种情形

情形A 设有一悬臂矩形板，在点$C(a,b)$处有一铅直集中力P作用，如图2所示。今选取如下的挠曲函数

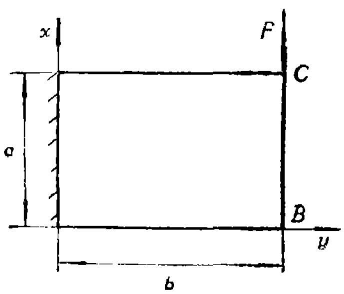

图 2

$$w=\left(f_1+\frac{f_2-f_1}{a}x\right)\left(1-\cos\frac{\pi y}{2b}\right) \tag{3.1}$$

其中a和b分别为薄板沿x-轴和y-轴边的长度，而f_2和f_1分别为矩形板自由边$y=b$上、下两角点C和B的横向挠度，它们都是未知的参数。不难看出，函数(3.1)能满足该薄板的全部几何边界条件。

先计算薄板的形变势能，为此将函数(3.1)代入(2.1)进行积分，可得

$$U=\frac{1}{2}\left[A(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)+\frac{B}{2}(f_1^2+f_2^2-2f_1f_2)\right] \tag{3.2}$$

其中

$$A=\pi^4aD/96b^3,\quad B=(1-\mu)\pi^2D/2ab \tag{3.3}$$

再计算外力的势能V，在这种情形下，由(2.2)可得

$$V=-\frac{1}{2}P(w\cdot w_x)_C \tag{3.4}$$

其中$\Delta_x=(w\cdot w_x)_C/2$，是薄板发生侧向弯曲时，荷载$P$的作用点$C(a,b)$在铅直方向(沿$x$-轴)的位移，下标$C$表示该括号中的量应取$C(a,b)$处的值。将(3.1)代入(3.4)得

$$V=-\frac{P}{2a}(f_2^2-f_1f_2) \tag{3.5}$$

将(3.2)和(3.5)代入(2.3)，并由(2.4)对两个参数f_1和f_2进行变分，可得到下面关于参数f_1和f_2的齐次线性代数方程组

$$(2A+B)f_1+(A-B+c_1)f_2=0,\quad (A+B+c_1)f_1+(2A+B-2c_1)f_2=0 \tag{3.6}$$

其中

$$c_1=P/a \tag{3.7}$$

求方程组(3.6)的非零解，则必须上式的系数行列式为零，于是得到板的稳定性方程

$$c_1^2+6Ac_1-3A(A+2B)=0 \tag{3.8}$$

由此可求出它的最小的正实根

$$c_1=-3A+[6A(2A+B)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

注意到(3.3)和(3.7)，可得到该悬臂矩形板在集中力P作用下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$P_{cr}=\frac{\pi^2D}{4b}\left[-\frac{\pi^2}{8}\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\frac{a}{b}\left(\frac{\pi^2}{24}\frac{a^2}{b^2}+1-\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3.10}$$

对于方板，$b=a$，若取$\mu=0.3$，可得

$$P_{cr}=2.73394D/a \tag{3.11}$$

由(3.10)不难看出，临界力和板的边长比及弯曲刚度有关。

情形B　有一均布荷载q_0作用在悬臂矩形板的自由边$x=a$上，如图3所示。

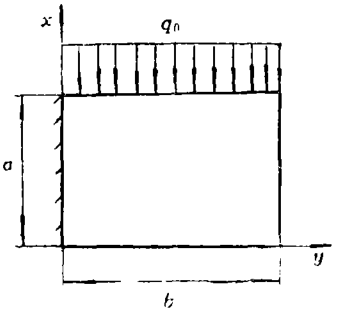

图 3

在这问题中，形变势能仍由(3.2)式表示，而外力的势能则应用下式来计算

$$V=-\frac{1}{2}\int_0^b q_0(w\cdot w_x)_{x=a}dy \tag{3.12}$$

将挠曲函数(3.1)代入上式，并进行积分可得到

$$V=-\frac{1}{2}c_2(f_2^2-f_1f_2) \tag{3.13}$$

其中

$$c_2=\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)\frac{b}{a}q_0 \tag{3.14}$$

进行类似于情形A的运算，可得到该悬臂矩形板在均布荷载q_0作用下发生侧向屈曲时的最小临界荷载

$$(q_0)_{cr}=\frac{2\pi}{3\pi-8}\frac{\pi^2D}{4b^2}\left[-\frac{\pi^2}{8}\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\frac{a}{b}\left(\frac{\pi^2}{24}\frac{a^2}{b^2}+1-\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3.15}$$

对于方板，$b=a$，取$\mu=0.3$可得

$$(q_0)_{cr}=12.05669D/a^2 \tag{3.16}$$

情形C　设有一三角形分布荷载作用在悬臂矩形板的自由边$x=a$，如图4所示，该荷载为

$$q(y)=q_0\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.17}$$

进行类似于上述情形的计算，可得到该悬臂矩形板在三角形分布荷载作用下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

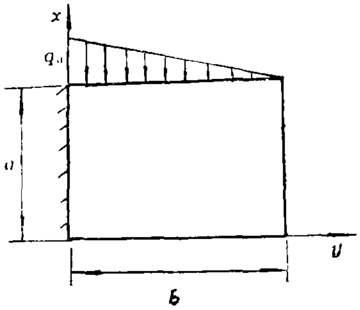

图 4

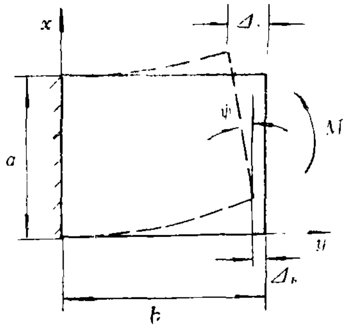

图 5

$$(q_0)_{cr}=\frac{4\pi^2}{3\pi^2-28}\frac{\pi^2 D}{4b^2}\left[-\frac{\pi}{8}\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\frac{a}{b}\left(\frac{\pi^2}{24}\frac{a^2}{b^2}+1-\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3.18}$$

对于方板，取$\mu=0.3$，得到

$$(q_0)_{cr}=67.00919D/a^2 \tag{3.19}$$

如果在前三种情形中将荷载P或q_0作用的水平线降低，例如从$x=a$降低到$x=a/2$或$x=0$，则薄板发生侧屈时的最小临界荷载将提高。

情形D 设有一集中力偶M作用在悬臂矩形板的自由边$y=b$上，如图5所示。形变势能仍由(3.2)式表示，外力的势能由下式来计算

$$V=-M\psi \tag{3.20}$$

角ψ如图中所示，并且

$$\psi=(\Delta_t-\Delta_b)/a \tag{3.21}$$

其中Δ_t和Δ_b的意义也如图5中所示，其值按如下的公式计算

$$\Delta_t=\frac{1}{2}\int_0^b(w_y^2)_{x=a}dy,\quad \Delta_b=\frac{1}{2}\int_0^b(w_y^2)_{x=0}dy \tag{3.22}$$

将挠曲函数(3.1)代入(3.22)进行积分，由(3.21)及(3.20)可得

$$V=-\frac{1}{2}\frac{c_3}{2}(f_2^2-f_1^2) \tag{3.23}$$

其中

$$c_3=\pi^2M/4ab \tag{3.24}$$

进行类似于以上的计算，可得到稳定性方程如下

$$c_3^2-2(2A+B)c_3+3A(A+2B)=0 \tag{3.25}$$

其中A和B仍由(3.3)表示。求出上式的最小正实根$c_3=A+2B$，利用(3.3)和(3.24)，可得到悬臂矩形板在集中力偶作用下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$M_{cr}=4\left(\frac{\pi^2}{96}\frac{a^2}{b^2}+1-\mu\right)D \tag{3.26}$$

对于方板，$b=a$，取$\mu=0.3$得到

$$M_{cr}=3.21123D \tag{3.27}$$

四、结 束 语

1，本文给出了为计算悬臂矩形板在几种受力情形下发生侧向屈曲时最小的临界荷载的

方法。

2．所求得的各个临界荷载的值都和薄板的弯曲刚度及边长的比值有关。

3．由于所选用的挠曲函数不是唯一的，故由不同的挠曲函数所得到的解答一般也不相同，近似解的好坏主要取决于所选的函数。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability* (1936).

[2] Chajes, L., *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Inc. (1974).

[3] Galambos, T. V., Inelastic lateral buckling of beams, *Jour. of Struct. Divis.*, ASCE, **89**, ST5 (1963).

[4] Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, Macmillan and Co., Ltd., London (1877).

[5] Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik, *Jour. für die rein und angewandte Mathematik*, **135** (1908), 1—61.

On Several Problems for Lateral Instability of Cantilever Plates

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The present article researches several problems about the lateral instability of cantilever plates by means of the energy method, in which we discuss the minimum critical load of cantilever rectangular plates under a concentrated force, a uniformly distributed load, a distributed load in triangular form and a concentrated couple, respectively when the lateral buckling takes place.