应用数学和力学，第 9 卷第 8 期(1988年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一类生态系统的周期解的全局渐近稳定性*

金　　均

（上海师范大学数学系，1987年 5 月27日收到）

摘　　要

本文研究了有三个种群相互作用的数学模式：

$$\begin{cases}\dot N_1=N_1[\ \ f_1(t)-a_{11}\ln N_1-a_{12}\ln N_2-a_{13}\ln N_3]\\ \dot N_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}\ln N_1-a_{22}\ln N_2-a_{23}\ln N_3]\\ \dot N_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}\ln N_1+a_{32}\ln N_2-a_{33}\ln N_3]\end{cases}\qquad (*)$$

与

$$\begin{cases}\dot N_1=N_1[\ \ f_1(t)-a_{11}(t)\ln N_1-a_{12}(t)\ln N_2-a_{13}(t)\ln N_3]\\ \dot N_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}(t)\ln N_1-a_{22}(t)\ln N_2-a_{23}(t)\ln N_3]\\ \dot N_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}(t)\ln N_1+a_{32}(t)\ln N_2-a_{33}(t)\ln N_3]\end{cases}\qquad (**)$$

我们分别建立了系统(*)和(**)存在唯一的大范围渐近稳定的正周期解的充分条件．

一、引　　言

在生物界，有很多是属于三个种群相互作用的群落生态系统，它们相互作用的关系是很复杂的．最近几十年来，许多生态学家、数学工作者总结了很多的关于三个种群相互作用的数学模式[1]．这里我们考虑如图所示的三个种群相互作用的数学模式．A，B，C 表示三种不同的生物种群，其分布密度分别为N_1，N_2，N_3．其中 A 种群不依靠本系统为生，而是把无限的自然资源作为生存条件．A 种群同时是B，C种群的食饵；而B只捕食A；C是 A，B 的捕食者．A，B，C 同时为密度制约的．这种捕食-被捕食关系在数学上可用下面的微分方程组表示：

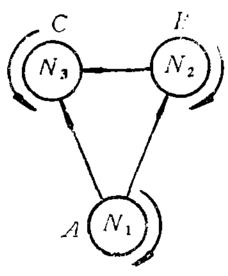

图　1

$$\begin{cases}\dot N_1=N_1[\ \ f_1-a_{11}N_1-a_{12}N_2-a_{13}N_3]\\ \dot N_2=N_2[-f_2+a_{21}N_1-a_{22}N_2-a_{23}N_3]\\ \dot N_3=N_3[-f_3+a_{31}N_1+a_{32}N_2-a_{33}N_3]\end{cases}$$

其中f_i $(i=1,2,3)$，a_{ij} $(i,j=1,2,3)$均为非负常数．而本文要研究的模式是

* 蔡树棠推荐．

$$\begin{cases} \dot{N}_1=N_1[\quad f_1(t)-a_{11}\ln N_1-a_{12}\ln N_2-a_{13}\ln N_3] \\ \dot{N}_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}\ln N_1-a_{22}\ln N_2-a_{23}\ln N_3] \\ \dot{N}_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}\ln N_1+a_{32}\ln N_2-a_{33}\ln N_3] \end{cases} \tag{1.1}$$

与

$$\begin{cases} \dot{N}_1=N_1[\quad f_1(t)-a_{11}(t)\ln N_1-a_{12}(t)\ln N_2-a_{13}(t)\ln N_3] \\ \dot{N}_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}(t)\ln N_1-a_{22}(t)\ln N_2-a_{23}(t)\ln N_3] \\ \dot{N}_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}(t)\ln N_1+a_{32}(t)\ln N_2-a_{33}(t)\ln N_3] \end{cases} \tag{1.2}$$

这两个模式是Prajueshu[2]模式的推广。

为了便于讨论，我们先引入下面的两条引理。

引理1 考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t) \tag{1.3}$$

其中A是$n\times n$常数矩阵，x是n维向量空间V^n中的元素，$f(t)$是R:$(-\infty,\ +\infty)$到V^n的连续周期映射，周期为T。若矩阵A的所有特征值均有负实部，则系统(1.3)存在唯一的以T为周期的周期解：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp[A(t-\tau)]f(\tau)d\tau \tag{1.4}$$

且系统(1.3)的任一初值问题的解当$t\to+\infty$时，趋于(1.4)，证明见文[3]。

引理2 考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t) \tag{1.5}$$

其中$A(t)$是以T为周期的$n\times n$的实连续方阵，$x\in V^n$，$f(t)$是R到V^n的实连续周期映射，周期亦为T。如果系统(1.5)的相应的齐线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x$$

没有周期为T的周期解，则系统(1.5)有唯一的周期为T的周期解。证明见[4]。

二、结论与证明

对于系统(1.1)，我们得到下面的定理。

定理1 如果系统(1.1)满足

1) a_{ij} $(i,j=1,2,3)$均为非负常数，$f_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$是以T为周期的非负实连续函数；

2) $P_1>0$，$P_3>0$，$P_1P_2-P_3>0$；

其中
$$P_1=\sum_{i=1}^{3}a_{ii},\quad P_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32},$$

$$P_3=-\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

则系统(1.1)在R上存在唯一的以T为周期的正周期解：

$$\begin{pmatrix} N_1^* \\ N_2^* \\ N_3^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \exp[x_1^*(t)] \\ \exp[x_2^*(t)] \\ \exp[x_3^*(t)] \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

且系统(1.1)的任一初值($\geqslant 0$)的解当$t\to+\infty$时渐近于(2.1)。

证明　令$x_i=\ln N_i$，则$\dot{x}_i=\dot{N}_i/N_i$ ($i=1,2,3$)，系统(1.1)可化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3+f_1(t) \\ \dot{x}_2=\quad a_{21}x_1-a_{22}x_2-a_{23}x_3-f_2(t) \\ \dot{x}_3=\quad a_{31}x_1+a_{32}x_2-a_{33}x_3-f_3(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

把(2.2)表示成矩阵的形式：

$$dx/dt=Ax+f(t) \tag{2.3}$$

其中，

$$A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \\ -f_3(t) \end{bmatrix}$$

矩阵A的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -a_{11}-\lambda & -a_{21} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{22}-\lambda & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+P_1\lambda^2+P_2\lambda+P_3=0 \tag{2.4}$$

根据Routh-Hurwitz条件知，(2.4)有负实部的解的充要条件为$P_1>0, P_3>0$，$P_1P_2-P_3>0$。所以由条件2）得知，特征方程(2.4)均有负实部的根。这样，由引理1可知系统(2.3)在R上有唯一的以T为周期的周期解

$$x^*(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp[A(t-\tau)]f(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

其中

$$x^*(t)=\begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ x_3^*(t) \end{pmatrix}$$

且(2.3)的任一初值问题的解当$t\to+\infty$时渐近于(2.5)，从而方程组(1.1)在R上存在唯一的以T为周期的正周期解(2.1)，且(1.1)的任一初值大于零的解，当$t\to+\infty$时渐近于(2.1)。定理1证毕。

对于系统(1.2)，我们得到如下的定理

定理2　如果系统(1.2)满足

1）$a_{ij}(t)$，$f_i(t)$ ($i,j=1,2,3$)是定义在R上的以T为周期的实连续函数，且$a_{ij}(t)$在R上可微；

2）
$$\begin{vmatrix} -a_{11}(t)-\lambda & -a_{12}(t) & -a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & -a_{22}(t)-\lambda & -a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & -a_{33}(t)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的根均具有负实部，即$\mathrm{Re}\lambda_i(t)\leqslant-\delta<0$ ($i=1,2,3$)；

3）$|\dot{a}_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon$，$|a_{ij}(t)|\leqslant w$　　($i,j=1,2,3$)

其中w为大于零的一个常数；

$$\varepsilon=\min_{0<t<T}\left(\frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{1j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|},\ \frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{2j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|},\ \frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{3j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|}\right)$$

则系统(1.2)在R上存在唯一的以T为周期的正周期解：

$$\begin{pmatrix} N_1^*(t) \\ N_2^*(t) \\ N_3^*(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp[x_1^*(t)] \\ \exp[x_2^*(t)] \\ \exp[x_3^*(t)]\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

且(1.2)的任一初值($\geqslant 0$)的解当$t\to+\infty$时渐近于(2.6)。

证明 令$x_i=\ln N_i$，$\dot{x}_i=\dot{N}_i/N_i$ $(i=1,2,3)$，系统(1.2)化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-a_{11}(t)x_1-a_{12}(t)x_2-a_{13}(t)x_3+f_1(t)\\ \dot{x}_2=\ \ a_{21}(t)x_1-a_{22}(t)x_2-a_{23}(t)x_3-f_2(t)\\ \dot{x}_3=\ \ a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2-a_{33}(t)x_3-f_3(t)\end{cases} \tag{2.7}$$

下证系统(2.7)所对应的齐线性方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-a_{11}(t)x_1-a_{12}(t)x_2-a_{13}(t)x_3\\ \dot{x}_2=\ \ a_{21}(t)x_1-a_{22}(t)x_2-a_{23}(t)x_3\\ \dot{x}_3=\ \ a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2-a_{33}(t)x_3\end{cases} \tag{2.8}$$

的平凡解是全局渐近稳定的。系统(2.8)的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-a_{11}(t)-\lambda & -a_{12}(t) & -a_{13}(t)\\ a_{21}(t) & -a_{22}(t)-\lambda & -a_{23}(t)\\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & -a_{33}(t)-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+P_1(t)\lambda^2+P_2(t)\lambda+P_3(t)=0 \tag{2.9}$$

其中$P_1(t)=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}(t)$

$$P_2(t)=a_{11}(t)a_{22}(t)+a_{11}(t)a_{33}(t)+a_{22}(t)a_{33}(t)+a_{12}(t)a_{21}(t)+a_{13}(t)a_{31}(t)+a_{23}(t)a_{32}(t)$$

$$P_3(t)=-\begin{vmatrix}-a_{11}(t) & -a_{12}(t) & -a_{13}(t)\\ a_{21}(t) & -a_{22}(t) & -a_{23}(t)\\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & -a_{33}(t)\end{vmatrix}$$

根据条件2)，方程(2.9)的根均具有负实部，所以$\Delta_1=P_1(t)>0$，$\Delta_2=P_1(t)P_2(t)-P_3(t)>0$，$\Delta_3=P_3(t)[P_1(t)P_2(t)-P_3(t)]>0$作Liapunov函数[5]

$$V(t,x_1,x_2,x_3)=\Delta_2\Delta_3\sum_{j=1}^{3}x_j^2+\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\prod_{s=1,s\neq\sigma\pm1}^{3}\Delta_s\Delta_{\sigma j}^2(t,x_1,x_2,x_3) \tag{2.10}$$

若把它展开，即得

$$\begin{aligned}V(t,x_1,x_2,x_3)=&P_3(t)[P_1(t)P_2(t)-P_3(t)]^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\ &+P_1(t)P_3(t)\left[\left(\begin{vmatrix}x_1 & -a_{12}(t)\\ x_2 & -a_{22}(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & -a_{13}(t)\\ x_3 & -a_{33}(t)\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}-a_{11}(t) & x_1\\ a_{21}(t) & x_2\end{vmatrix}\right.\right.\\ &\left.\left.+\begin{vmatrix}x_2 & -a_{23}(t)\\ x_3 & -a_{33}(t)\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}-a_{11}(t) & x_1\\ a_{31}(t) & x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{22}(t) & x_2\\ a_{32}(t) & x_3\end{vmatrix}\right)^2\right]+\left[\left(P_3(t)x_1-P_1(t)\right.\right.\end{aligned}$$

$$\cdot\left|\begin{matrix} x_1 & -a_{12}(t) & -a_{13}(t) \\ x_2 & -a_{22}(t) & -a_{23}(t) \\ x_3 & a_{32}(t) & -a_{33}(t)\end{matrix}\right|\Bigg)^2+\left(P_3(t)x_2-P_1(t)\left|\begin{matrix} -a_{11}(t) & x_1 & -a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & x_2 & -a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & x_3 & -a_{33}(t)\end{matrix}\right|\right)^2$$

$$+\left(P_3(t)x_3-P_1(t)\left|\begin{matrix} -a_{11}(t) & -a_{12}(t) & x_1 \\ a_{21}(t) & -a_{22}(t) & x_2 \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & x_3\end{matrix}\right|\right)^2\Bigg]=\sum_{i,j=1}^{3}V_{ij}(t)x_ix_j \qquad (2.10)'$$

其中$V_{ij}(t)$是关于$a_{ij}(t)$的多项式函数，它比较复杂，我们不打算具体地表示它。

显然，V函数(2.10)是定正的，因为

$$V(t,x_1,x_2,x_3)\geqslant\Delta_2\Delta_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=P_3(t)[P_1(t)P_2(t)-P_3(t)]^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$=(-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)[-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$\geqslant\delta^3(3\delta\cdot3\delta^2+\delta^3)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=100\delta^9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

现对$V(t,x_1,x_2,x_3)$关于t求导，即得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.8)}=-2\Delta_1\Delta_2\Delta_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\sum_{i,j=1}^{3}\dot V_{i,j}(t)x_ix_j$$

$$\leqslant-2\Delta_1\Delta_2\Delta_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\sum_{i,j=1}^{3}|\dot V_{ij}(t)||x_i||x_j|\leqslant-2\prod_{i=1}^{3}\Delta_i\sum_{i=1}^{3}x_i^2$$

$$+\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{2}|\dot V_{ij}(t)||x_i^2+x_j^2|=-2\prod_{i=1}^{3}\Delta_i\sum_{i=1}^{3}x_i^2+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|\dot V_{ij}(t)|x_i^2$$

因为$V_{ij}(t)$均为$a_{i_1j_1}(t)$的函数，所以

$$\dot V_{ij}(t)=\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\frac{\partial V_{ij}}{\partial a_{i_1j_1}}\dot a_{i_1j_1}(t)$$

$$|\dot V_{ij}(t)|\leqslant\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{ij}}{\partial a_{i_1j_1}}\right||\dot a_{i_1j_1}(t)|\leqslant\varepsilon\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{ij}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|$$

所以

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.8)}\leqslant-2\prod_{i=1}^{3}\Delta_i\sum_{i=1}^{3}x_i^2+\sum_{j=1}^{3}|\dot V_{1j}|x_1^2+\sum_{j=1}^{3}|\dot V_{2j}|x_2^2+\sum_{j=1}^{3}|\dot V_{3j}|x_3^2$$

$$\leqslant-2\prod_{i=1}^{3}\Delta_i\sum_{i=1}^{3}x_i^2+\varepsilon\Bigg(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{1j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|x_1^2+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{2j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|x_2^2$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{3j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|x_3^2\Bigg)$$

如果取

$$\varepsilon=\min_{0\leqslant t\leqslant T}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{1j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|},\ \frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{2j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|},\ \frac{\prod_{i=1}^{3}\Delta_i}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i_1,j_1=1}^{3}\left|\frac{\partial V_{3j}}{\partial a_{i_1j_1}}\right|}\right\}$$

则当$|\dot a_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon$时，有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.8)}\leqslant-\prod_{i=1}^{3}\Delta_i\sum_{i=1}^{3}x_i^2=-P_1(t)P_3(t)[P_1(t)P_2(t)-P_3(t)]^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$=-\{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)[-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^2\}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant-300\delta^{10}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以方程(2.8)的平凡解是全局渐近稳定的，从而知道系统(2.8)没有非平凡的周期解，因此根据引理2，知道系统(2.7)存在唯一的以T为周期的周期解。

设$(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ x_3^*(t))$为系统(2.7)的周期解，又设$(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$是(2.7)的在时刻$t$的任一解，现令

$$y_1=x_1(t)-x_1^*(t),\quad y_2=x_2(t)-x_2^*(t),\quad y_3=x_3(t)-x_3^*(t)$$

则(2.7)可化为

$$\begin{cases}\dot y_1=-a_{11}(t)y_1-a_{12}(t)y_2-a_{13}(t)y_3\\ \dot y_2=\ \ a_{21}(t)y_1-a_{22}(t)y_2-a_{23}(t)y_3\\ \dot y_3=\ \ a_{31}(t)y_1+a_{32}(t)y_2-a_{33}(t)y_3\end{cases}\tag{2.11}$$

同样可以证明系统(2.11)的平凡解是全局渐近稳定的，所以系统(2.7)的唯一周期解是全局渐近稳定的，从而知道系统(1.2)有唯一的周期解(2.6)，且系统(1.2)的任一初值大于零的解，当$t\to+\infty$时，渐近于周期解(2.6)。定理2证毕。

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，《数学生态学模型与研究方法》，科学出版社 (1987).

[2] Prajueshu, Statistical study of prey-predator in random environment, *J. Indin. Statist. Assoc*, 15 (1977).

[3] 王荣良，周期系数捕食-被捕食系统的周期解及渐近性，生物数学学报，1，2 (1986).

[4] M·罗梭著，(叶彦谦译)，《常微分方程》，上海科技出版社 (1981).

[5] 秦元勋、王联、王慕秋，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社 (1981).

On the Global Asymptotic Stability of Periodic Solutions of a Class of Ecological System

Jin Jun

(*Shanghai Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, we have made researches on the mathematical models which have three populations of mutual action:

$$\begin{cases}\dot N_1=N_1[\ \ f_1(t)-a_{11}\ln N_1-a_{12}\ln N_2-a_{13}\ln N_3]\\ \dot N_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}\ln N_1-a_{22}\ln N_2-a_{23}\ln N_3]\\ \dot N_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}\ln N_1+a_{32}\ln N_2-a_{33}\ln N_3]\end{cases}\tag{*}$$

and

$$\begin{cases}\dot N_1=N_1[\ \ f_1(t)-a_{11}(t)\ln N_1-a_{12}(t)\ln N_2-a_{13}(t)\ln N_3]\\ \dot N_2=N_2[-f_2(t)+a_{21}(t)\ln N_1-a_{22}(t)\ln N_2-a_{23}(t)\ln N_3]\\ \dot N_3=N_3[-f_3(t)+a_{31}(t)\ln N_1+a_{32}(t)\ln N_2-a_{33}(t)\ln N_3]\end{cases}\tag{**}$$

We have obtained the sufficient conditions respectively for the systems (*) and (**) for existence and uniqueness of single positive periodic solutions which are globally, asymptotically stable.