应用数学和力学，第 9 卷第 7 期(1988年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

方程$u_{tt}-cu_{xx}+au+bu^3=0$的解析解答*

汪 懋 骅

(北京航空学院，1985年 6 月25日收到)

摘 要

本文给出了方程 $u_{tt}-cu_{xx}+au+bu^3=0$ 的一个解析解系。

一、引 言

寻找非线性方程

$$u_{tt}-cu_{xx}+au+bu^3=0 \tag{1.1}$$

的精确解答是非常困难的，其中

$$u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c，a 和 b 是常数。

然而，方程 (1.1) 的精确解答又是非常需要的，因为，这个非线性方程可以减化到著名的 Landau-Ginzburg-Higgs 方程，KG_3 方程以及 Duffing 方程等等。

二、解 析 解 答

作者获得了方程(1.1)的精确解系为：

$$u_1=\left[\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\mathrm{ch}(Kx\pm\sqrt{cK^2-a}\,t+\varphi)\right]^{-1} \tag{2.1}$$

$$u_2=\sqrt{-\frac{4a}{b}}\left[\mathrm{ch}\,(Kx\pm\sqrt{cK^2-4a}\,t+\varphi)+1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

$$u_3=\sqrt{-\frac{a}{b}}\left\{1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sh}(Kx\pm\sqrt{cK^2+2a}\,t+\varphi)+\frac{1}{2}\right]^{-1}\right\} \tag{2.3}$$

$$u_4=\sqrt{-\frac{a}{b}}\,\mathrm{th}\left(Kx\pm\sqrt{cK^2+\frac{a}{2}}\,t+\varphi\right) \tag{2.4}$$

其中 $a/b<0$，解答 u_2 和 u_1 是等价的，K 和 φ 是任意常数。

* 薛大为推荐，

三、讨 论

下面讨论几种特殊情形:

（1） 当 $c=1$，$a=-m^2$ 和 $b=g^2$ 时，方程(1.1)减化到著名的 Landau-Ginzburg-Higgs 方程

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+g^2u^3=0 \tag{3.1}$$

据解答(2.1)，(2.2)，(2.3)和(2.4)，可得到

$$u_1=\frac{\sqrt{2}\,m}{g}\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+m^2}\,t+\varphi\right)\right]^{-1} \tag{3.2}$$

$$u_2=\frac{2m}{g}\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+4m^2}\,t+\varphi\right)+1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

$$u_3=\frac{m}{g}\left\{1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\left(Kx\pm\sqrt{K^2-2m^2}\,t+\varphi\right)+\frac{1}{2}\right]^{-1}\right\} \tag{3.4}$$

$$u_4=\frac{m}{g}\operatorname{th}\left(Kx\pm\sqrt{K^2-\frac{m^2}{2}}\,t+\varphi\right) \tag{3.5}$$

（2） 当 $c=1$，$a=m^2$ 和 $b=-2m^2$，方程(1.1)可减化到著名的 KG_3 方程

$$u_{tt}-u_{xx}+m^2\varphi-2m^2\varphi^3=0 \tag{3.6}$$

据解答(2.1)、(2.2)，(2.3)和(2.4)可得到

$$u_1=\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2-m^2}\,t+\varphi\right)\right]^{-1} \tag{3.7}$$

$$u_2=\sqrt{2}\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2-4m^2}\,t+\varphi\right)+1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

$$u_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+2m^2}\,t+\varphi\right)+\frac{1}{2}\right]^{-1}\right\} \tag{3.9}$$

$$u_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{th}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+\frac{m^2}{2}}\,t+\varphi\right) \tag{3.10}$$

（3） 当 $c=1$，$a=-1$ 和 $b=1$ 时，方程(1.1)可减化到 ϕ^4 方程[1]

$$u_{tt}-u_{xx}-u+u^3=0 \tag{3.11}$$

据解答(2.1)，(2.2)，(2.3)和(2.4)，可得到

$$u_1=\sqrt{2}\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+1}\,t+\varphi\right)\right]^{-1} \tag{3.12}$$

$$u_2=2\left[\operatorname{ch}\left(Kx\pm\sqrt{K^2+4}\,t+\varphi\right)+1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.13}$$

$$u_3=1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\left(Kx\pm\sqrt{K^2-2}\,t+\varphi\right)+\frac{1}{2}\right]^{-1} \tag{3.14}$$

$$u_4=\operatorname{th}\left(Kx+\sqrt{K^2-\frac{1}{2}}\,t+\varphi\right) \tag{3.15}$$

（4） 当 $c=0$，而 u 仅是 t 的函数时，方程(1.1)可减化到未扰动的 Duffing 方程[2~4]

$$u_{tt}+au+bu^3=0 \tag{3.16}$$

据解答(2.1)，(2 2)，(2.3)和(2.4)可得到

$$u_1=\left[\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\mathrm{ch}(\pm\sqrt{-a}\,t+\varphi)\right]^{-1}\qquad(a<0)\tag{3.17}$$

$$u_2=\sqrt{-\frac{4a}{b}}\,[\mathrm{ch}(\pm\sqrt{-4a}\,t+\varphi)+1]^{-\frac{1}{2}}\qquad(a<0)\tag{3.18}$$

$$u_3=\sqrt{-\frac{a}{b}}\left\{1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sh}(\pm\sqrt{2a}\,t+\varphi)+\frac{1}{2}\right]^{-1}\right\}\qquad(a>0)\tag{3.19}$$

$$u_4=\sqrt{-\frac{a}{b}}\,\mathrm{th}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{2}}\,t+\varphi\right)\qquad(a>0)\tag{3.20}$$

参 考 文 献

[1] Charles, A. Wingate, Numerical search for a ϕ^4 breather model, *Siam Journal on Applied Mathematics*, **43**, 1 (1983), 120—140.

[2] Holmes, C. and P. Holmes, Second order averaging and bifurcation to subharmonics in Duffing's equation, *Journal of Sound and Vibration*, **78**, 2 (1981), 161—174.

[3] Thomas, W. Arnold and William Case, Nonlinear effects in a simple mechanical system, *American Journal of Physics*, **50**, 3 (1982), 220—224.

[4] Rao, A. C., Energy correlation method for the transient solution of a one-degree-of-freedom nonlinear system, *Mechanism and Machine Theory*, **18**, 5 (1983), 335—338.

On Analytical Solutions of the Equation $u_{tt}-cu_{xx}+au+bu^3=0$

Wang Mao-hua

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In this paper a set of the analytical solutions of the equation $u_{tt}-cu_{xx}+au+bu^3=0$ are given.